PSI – Programme de colles
Semaine 17 – du 9 au 14 février 2025

Programme en bref.

- Cours sur les isométries.
- Exercices sur les équations différentielles/séries entières et probabilités ; un peu d'isométries en deuxième partie de colle.

Exemples de questions de cours

1. Si E est euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$, $u \in \mathscr{O}(E)$ ssi u préserve le produit scalaire ssi u transforme toute BON en BON.
2. $\mathscr{O}(E)$ est inclus dans $GL(E)$, stable par composition et passage à l'inverse.
3. Une matrice A est dans $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si ses colonnes forment une BON de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.
4. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ est une BON, alors $u \in \mathscr{O}(E)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.
5. Si u est une isométrie, pour tout sous-espace stable F, $F^\perp$ est stable par u.
6. Classification des isométries en dimension 2.
7. Étant donnée une matrice 2×2 concrète dans $\mathscr{O}_2(\mathbb{R})$, reconnaître le type d'isométrie.
8. Réduction des isométries en dimension 3 : si u est une isométrie, il existe une BOND dans laquelle sa matrice est $\begin{pmatrix} \det(u) & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & R_\theta \end{pmatrix}$.
9. Étant donnée une matrice 3×3 concrète dans $\mathscr{S}\mathscr{O}_3(\mathbb{R})$, trouver l'axe et l'angle de rotation.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Équations différentielles linéaires scalaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$.	
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	La résolution explicite de l'équation différentielle doit comporter des indications.
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène, dimension.	Exemples d'utilisation de développements en série entière pour la recherche de solutions.

Fonctions génératrices de variables aléatoires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)\,t^n.$$	La série entière définissant G_X est de rayon $\geqslant 1$ et converge normalement sur $[-1,1]$. Continuité de G_X. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.	
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = G_X{}'(1)$.	La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.
Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.

Endomorphismes d'un espace euclidien

Cette section vise les objectifs suivants :

— *étudier les isométries vectorielles et matrices orthogonales, et les décrire en dimension deux et trois en insistant sur les représentations géométriques ;*

— *approfondir la thématique de réduction des endomorphismes dans le cadre euclidien en énonçant les formes géométrique et matricielle du théorème spectral ;*

— *introduire la notion d'endomorphisme autoadjoint positif, qui trouvera notamment son application au calcul différentiel d'ordre 2.*

La notion d'adjoint est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.	Exemple : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions.
Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Matrices orthogonales	
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^\top A = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ».
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation. Bases orthonormées directes.	
c) Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base orthonormée directe : produit mixte.	Notations $[u, v]$, $[u, v, w]$. Interprétation géométrique comme aire ou volume.
Produit vectoriel. Calcul dans une base orthonormée directe.	
Orientation d'un plan ou d'une droite dans un espace euclidien orienté de dimension 3.	
d) Isométries vectorielles d'un plan euclidien	
Description des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.	Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	
e) Isométries d'un espace euclidien de dimension 3	
Description des matrices de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.	
Rotation vectorielle d'un espace euclidien orienté de dimension 3.	Axe et mesure de l'angle d'une rotation.