N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

TD 13
Endomorphismes des espaces euclidiens

1 Isométries et matrices orthogonales

Exercice 1. *Mines-Telecom 24*. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{id}_E$ et $\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle = 0$

1. Montrer que la dimension n de E est paire. On note $n = 2p$.

Correction

On sait que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$, donc $\det(u)^2 = \det(-\mathrm{Id}_E) = (-1)^{\dim(E)}$. Or, $\det(u) \in \mathbb{R}$ donc $\det(u)^2 \geqslant 0$, donc $\dim(E)$ est paire.

2. Montrer que $(u(x), x)$ est libre pour tout $x \neq 0$.

Correction

Soit $x \neq 0$. Alors si $u(x) = \lambda x$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, en appliquant u, on obtient $-x = \lambda u(x) = \lambda^2 x$, donc, comme $x \neq 0_E$, $\lambda^2 = -1$, ce qui est absurde car $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ tels que la famille $(e_1, u(e_1), \ldots, e_p, u(e_p))$ soit orthonormale.

Correction

Déjà, on montre rapidement que pour tous x et y, $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$. Pour ce faire, on développe

$$\langle u(x+y), x+y\rangle = 0 = \langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle = \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle .$$

Le résultat est donc démontré.
Ensuite, on procède par récurrence sur $\dim(E) = 2p$.
Pour l'initialisation, i.e. $p = 1$, si $\dim(E) = 2$, alors on prend $x \neq 0$, de norme 1. On a alors $(u(x), x)$ qui est orthogonale et est donc une base de E. Mais

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = -\langle x, u(u(x))\rangle = -\langle x, -x\rangle = \|x\|^2 = 1.$$

Donc $(x, u(x))$ est bien une BON de E.
Pour l'hérédité, si la propriété est vraie au rang p, on prend un espace E de dimension $2(p+1)$. Par le même raisonnement que précédemment, on trouve e_{p+1} tel que $(e_{p+1}, u(e_{p+1}))$ est une famille orthonormée de E.
Alors si on note $F = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, u(e_{p+1}))$, F est un sous-espace vectoriel stable par u.
On montre que $F^\perp$ est aussi stable par u : soit $x \in F^\perp$. Alors pour tout y dans $F^\perp$,

$$\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle = 0.$$

Donc $F^\perp$ est stable par u.
Ainsi, sur F, u_F vérifie :

$$\forall x \in F,\ \langle u_F(x), x\rangle = 0 \text{ et } u_F^2 = -\mathrm{Id}_F.$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence et on trouve $(e_1, \dots, e_p)$ tels que

$$(e_1, u(e_1), \dots, e_p, u(e_p))$$

soit une BON de F.
Ainsi, $(e_1, u(e_1), \dots, e_p, u(e_p), e_{p+1}, u(e_{p+1}))$ est une bon de E et la récurrence est terminée !

4. En déduire que u est une isométrie.

Correction

On en déduit que

$$(u(e_1), u(u(e_1)), \dots, u(e_p), u(u(e_p)) = (u(e_1), -e_1, \dots, u(e_p), -e_p)$$

est aussi une BON, donc u transforme une BON en une BON, donc u est une isométrie.

Exercice 2. *CCINP 24*. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $MM^\top = M^\top M$ et $M^2 + 2\mathrm{I}_2 = 0$.

1. Montrer que $M^\top M$ est diagonalisable.

Correction

$M^\top M$ est symétrique réelle donc, par le théorème spectral, elle est diagonalisable.

2. Montrer que $\mathrm{Sp}\left(M^\top M\right) \subset \{-2, 2\}$.

Correction

On note $N = M^\top M$. Alors $N^2 = M^2(M^\top)^2$. Mais $M^2 = -2\mathrm{I}_2$ et, en transposant cette relation, $(M^\top)^2 = -2\mathrm{I}_2$, donc

$$N^2 = 4\mathrm{I}_2,$$

donc X^2-4 est annulateur de N, donc $\mathrm{Sp}(N)\subset\{-2,2\}$.

3. Montrer que $\forall\lambda\in\mathrm{Sp}\left(M^\top M\right), \lambda\geqslant 0$. En déduire $\mathrm{Sp}\left(M^\top M\right)$.

Correction

Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}(M^\top M)$, X un vecteur propre associé. Alors

$$M^\top MX=\lambda X \text{ donc } X^\top M^\top MX=\lambda X^\top X,$$

donc

$$\|MX\|^2=\lambda\|X\|^2,$$

donc $\lambda\geqslant 0$, car $X\neq 0_{n,1}$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(M)\subset\{2\}$.

4. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{2}}M$ est orthogonale.

Correction

La matrice $M^\top M$ est diagonalisable, à spectre réduit à $\{2\}$, donc $M^\top M=2\mathrm{I}_2$. Ainsi, si $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}M$, $A^\top A=\dfrac{1}{2}M^\top M=\mathrm{I}_2$, donc A est orthogonale.

5. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{2}}M$ est la matrice d'une rotation d'angle θ à déterminer.

Correction

On sait que $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}M\in\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Donc A est une symétrie ou une rotation. Mais $A^2=-\mathrm{I}_2$, donc A ne peut pas être une symétrie. Ainsi, A est une rotation, $A=R_\theta$. Mais $A^2=-\mathrm{I}_2=R_\pi$, donc $\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$.

6. Déterminer toutes les matrices M possibles.

Correction

On en déduit que $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ ou $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, donc que $M=\pm\begin{pmatrix}0&-\sqrt{2}\\\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$.

Exercice 3. *Mines-Ponts 24*.

1. Que peut-on dire du spectre d'une matrice orthogonale ?

Correction

On l'a fait en cours, le spectre réel est réduit à $\{-1,1\}$.
Et c'est + difficile/HP de parler du spectre complexe, mais on a pu voir des examinateurs en parler. Je vais quand même en dire quelque chose. Soit λ une valeur propre **complexe** de $A\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Soit X un vecteur propre **complexe** associé à A. Alors $AX=\lambda X$. On définit alors un « produit scalaire complexe » $\langle X,Y\rangle=X^*Y$ où X^* est la transposée des conjugués des coefficients. Ainsi, $\|X\|^2=\displaystyle\sum_{i=1}^n|x_i|^2$. Bref, avec tout ça, on montre que $\|AX\|^2=\|X\|^2$ et donc que $|\lambda|=1$, donc $\lambda\in\mathbb{U}$.

2. Que peut-on dire de la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$? Que décrit-elle ?

Correction

Déjà, on remarque que les colonnes de A forment une BON de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc A est orthogonale.
De plus, A est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable. Comme A est aussi une isométrie, on a $A^2 = \mathrm{I}_3$, A est une symétrie orthogonale.

On cherche déjà le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

On a les équivalences

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 6y - 3z = 7x \\ 6x + 3y + 2z = 7y \\ -3x + 2y + 6z = 7z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9x + 6y - 3z = 0 \\ 6x - 4y + 2z = 0 \\ -3x + 2y - z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, A est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)^{\perp}$.

Exercice 4. *Mines-Telecom 24*. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $\det(M) = 0$ et que $M^\top = M^2$.

1. Montrer que $M^4 = M$.

Correction

En transposant la relation $M^\top = M^2$, on obtient $(M^\top)^2 = M$. Ainsi,

$$M^4 = (M^2)^2 = (M^\top)^2 = M.$$

2. Montrer que M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \{0, 1\}$.

Correction

Comme $M^4 = M$, les valeurs propres complexes de M sont parmi les racines de $X^4 - X = X(X-1)(X-j)(X-j^2)$. Mais si j était valeur propre, j^2 serait aussi valeur propre, ce qui est absurde car alors M serait diagonalisable, de déterminant $j \times j^2 = j^3 = 1$.
Donc $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0, 1\}$.

Si $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$, M est nilpotente et donc ou bien nulle, ou bien semblable à $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sinon, M est diagonalisable, donc semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On suppose que $b = 0$. Que peut-on dire de M ?

Correction

Dans ce cas, comme $M^\top = M^2 = 0_2$, M est la matrice nulle.

4. Montrer que $M^2 = M$.

Correction

On en déduit que M est ou bien nulle, ou bien semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dans les deux cas, on a bien $M^2 = M$.

Exercice 5. *CCINP 24*. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour que A soit la matrice d'une rotation vectorielle.

Correction

Condition nécessaire. Si A est la matrice d'une rotation vectorielle, on a

- les colonnes de A sont de norme 1 donc $a^2 + b^2 + c^2 = 1$,
- les colonnes de A sont orthogonales, donc $ac + ab + bc = 0$,
- A est de déterminant 1, donc (exceptionnellement, Sarrus nous aide !)

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1.$$

On va alors montrer que (a, b, c) sont racines d'un polynôme de degré 3. On écrit ce polynôme $P(X) = X^3 + pX^2 + qX + r$. On remarque que $ac + ab + bc = 0$ donc $q = 0$. Donc $P(X) = X^3 + pX^2 + r$ où $r = -abc$ et $p = -(a + b + c)$.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 1,$$

donc $a + b + c = \pm 1$. Donc $p = \pm 1$.
Mais

$$\begin{aligned} 1 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3r \\ &= -p(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= -p \end{aligned}$$

Donc $p = -1$. Donc (a, b, c) sont les racines de

$$X^3 - X^2 + r$$

Comme (a, b, c) doivent être réelles, le polynôme $X^3 - X^2 + r$ doit avoir 3 racines réelles. On cherche les points d'annulation de sa dérivée, qui vaut $3X^2 - 2X$. Ainsi, les points d'annulation de la dérivée sont 0 et $\frac{2}{3}$. Or,

$$P(0) = r \text{ et } P\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} + r = -\frac{4}{27} + r < r.$$

Il faut donc, pour que P change 3 fois de signe, que $r \geqslant 0$ et $r \leqslant \frac{4}{27}$.
Réciproquement, si (a, b, c) sont racines d'un tel polynôme, alors ils sont réels et vérifient toutes les relations définissant une matrice orthogonale !
On peut alors chercher les éléments caractéristiques de cette rotation.

- axe de rotation. On remarque que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a + b + c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ car $p = -1$.
- angle. On remarque que $\mathrm{Tr}(A) = 3a$, donc $1 + 2\cos(\theta) = 3a$ donc $\cos(\theta) = \frac{3a - 1}{2}$.

Exercice 6. *CCINP PC 22*. Soient n un entier $\geqslant 2$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \mathrm{I}_n + A$ et $N = \mathrm{I}_n - A$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $X^\top AX \in \mathbb{R}$. Calculer $\left(X^\top AX\right)^\top$ et montrer que $X^\top AX = 0$.

Correction

Déjà, $X^\top AX = \langle X, AX \rangle \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$(X^\top AX)^\top = X^\top A^\top X = -X^\top AX,$$

donc $X^\top AX = 0$.

2. Montrer que la seule valeur propre réelle possible de A est zéro. En déduire que M et N sont inversibles.

Correction

Soit λ une valeur propre de A, X un vecteur propre associé (donc non nul). Alors $X^\top AX = X^\top \lambda X = \lambda \|X\|^2$, mais $X^\top AX = 0$ donc, comme $X \neq 0$, $\lambda = 0$. Ainsi, 0 est la seule valeur propre possible de A.
On en déduit que $\det(A - \mathrm{I}_n) = \chi_A(1) \neq 0$ et $\det(A + \mathrm{I}_n) = \chi_A(-1) \neq 0$. Donc M et N sont inversibles.

3. Montrer que M et N commutent, et qu'il en est de même pour M^{-1} et N^{-1}. Montrer que $\Omega = MN^{-1}$ est orthogonale et n'admet pas -1 comme valeur propre.

Correction

On calcule

$$\begin{aligned} MN &= (\mathrm{I}_n + A)(\mathrm{I}_n - A) = \mathrm{I}_n - A + A - A^2 = \mathrm{I}_n - A^2 \\ NM &= (\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + A) = \mathrm{I}_n + A - A - A^2 = \mathrm{I}_n - A^2 = MN. \end{aligned}$$

Donc M et N commutent. Donc $MN = NM$, donc, en passant à l'inverse, $N^{-1}M^{-1} = M^{-1}N^{-1}$.

Ensuite, pour étudier Ω, on remarque que $M^\top = \mathrm{I}_n - A = N$. Donc

$$\begin{aligned}\Omega^\top\Omega &= (N^{-1})^\top M^\top M N^{-1}\\ &= (N^{-1})^\top NMN^{-1}\\ &= (N^{-1})^\top MNN^{-1}\\ &= (N^{-1})^\top M\\ &= (N^{-1})^\top N^\top\\ &= \mathrm{I}_n,\end{aligned}$$

donc Ω est orthogonale. De plus, si -1 était valeur propre de Ω, on disposerait de X tel que $MN^{-1}X = -X$, donc, en posant $Y = N^{-1}X$, $MY = -NY$, donc

$$(\mathrm{I}_n + A)Y = -(\mathrm{I}_n - A)Y, \text{ donc } 2Y = 0,$$

ce qui est absurde. Donc -1 n'est pas valeur propre de Ω.

4. Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ qui n'admet pas -1 comme valeur propre. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $U = (\mathrm{I}_n + B)(\mathrm{I}_n - B)^{-1}$.

Correction

On essaie de résoudre l'équation. SOit $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned}U = (\mathrm{I}_n + B)(\mathrm{I}_n - B)^{-1} &\Leftrightarrow (\mathrm{I}_n - B)U = (\mathrm{I}_n + B)\\ &\Leftrightarrow U - BU = \mathrm{I}_n + B\\ &\Leftrightarrow B(\mathrm{I}_n + U) = U - \mathrm{I}_n\\ &\Leftrightarrow B = (U - \mathrm{I}_n)(U + \mathrm{I}_n)^{-1},\end{aligned}$$

la matrice $U + \mathrm{I}_n$ étant bien inversible car $-1 \notin \mathrm{Sp}(U)$. Si un tel B existe, il est unique. Il reste à vérifier que la formule précédente donne bien une matrice antisymétrique. Afin de faciliter les calculs, on va transposer la relation $U - BU = \mathrm{I}_n + B$.

$$\begin{aligned}U - BU = \mathrm{I}_n + B \text{ donc} &U^\top - (BU)^\top = \mathrm{I}_n + B^\top\\ &\text{D'où } U^{-1} - U^{-1}B^\top = \mathrm{I}_n + B^\top.\\ &\text{Donc, en multipliant par } U,\ \mathrm{I}_n - B^\top = U + UB^\top.\\ &\text{D'où } (U + \mathrm{I}_n)B^\top = \mathrm{I}_n - U.\\ &\text{Ainsi } B^\top = (U + \mathrm{I}_n)^{-1}(\mathrm{I}_n - U) = (\mathrm{I}_n - U)(U + \mathrm{I}_n)^{-1} = -B,\end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que si $AB = BA$, alors $BA^{-1} = A^{-1}B$.
On en déduit que B est bien antisymétrique.

Exercice 7. *TPE 2019*. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie. On prend T une isométrie vectorielle de E, et on définit $S = T - \mathrm{Id}_E$. On note, pour $(u, v) \in E^2$, $(u|v)$ le produit scalaire sur E.

1. Montrer que $\forall (u, v) \in E^2, (u \mid T(v) - v) = \big(T^{-1}(u) - u \mid v\big)$.

Correction

Soient $(u, v) \in E^2$. Alors

$$\begin{aligned}(u|T(v) - v) &= (u|T(v)) - (u, v)\\ &= (T^{-1}u|v) - (u, v) \text{ car } T^{-1} \text{ est aussi une isométrie.}\\ &= (T^{-1}u - u|v)\end{aligned}$$

2. Montrer que $(\mathrm{Im}(S))^{\perp} = \mathrm{Ker}(S)$.

Correction

Soient u dans $\mathrm{Im}(S)$ et v dans $\ker(S)$. Alors on dispose de $x \in E$ tel que $u = T(x) - x$. On en déduit que

$$\begin{aligned}(u|v) &= (Tx - x|v)\\ &= (Tx|v) - (x|v)\\ &= (Tx|v) - (Tx|Tv) \text{ car } T \text{ est une isométrie}\\ &= (Tx|v) - (Tx|v) \text{ car } v \in \ker(T - \mathrm{Id}_E)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}(S)$ et $\ker(S)$ sont orthogonaux. Mais, par le théorème du rang, $\dim(\ker(S)) + \dim(\mathrm{Im}(S)) = \dim(E)$, donc $\mathrm{Im}(S)$ et $\ker(S)$ sont supplémentaires orthogonaux. En particulier, $(\mathrm{Im}(S))^{\perp} = \ker(S)$.

3. On définit, $\forall n \in \mathbb{N}*, T_n = \dfrac{1}{n}\left(\mathrm{Id}_E + T + \ldots + T^{n-1}\right)$.

(a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$. On note p cette limite.

Correction

Soit x dans E. On écrit $x = u + v$ où $u \in \ker(S)$ et $v \in \mathrm{Im}(S)$. Alors on dispose de w dans E tel que $u = T(w) - w$ et

$$\begin{aligned}T_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i(x)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i(u+v)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(T^i(u) + T^i(v))\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(T^i(T(w) - w) + v) \text{ car } T(v) = v\\ &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(T^{i+1}(w) - T^i(w))\right) + v\\ &= \frac{T^n(w) - w}{n} + v \text{ par télescopage.}\end{aligned}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Mais

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T^n(w)-w}{n}\right\| &\leqslant \frac{1}{n}\|T^n(w)\| + \frac{1}{n}\|w\| \\ &\leqslant \frac{2}{n}\|w\| \text{ car } T \text{ est une isométrie} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

donc $T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v$.

(b) Caractériser p.

Correction

p est donc le projecteur orthogonal sur $\ker(S)$.

Exercice 8. *Centrale 24*. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, $v \in E$ non nul et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On considère

$$f : \left| \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x - \lambda \langle x, v\rangle v \end{array}\right.$$

1. (a) Montrer que f est autoadjoint.

Correction

Soient x et y dans E. Alors

$$\begin{aligned}\langle f(x), y\rangle &= \langle x - \lambda\langle x, v\rangle v, y\rangle \\ &= \langle x, y\rangle - \lambda\langle x, v\rangle\langle v, y\rangle \\ &= \langle x, y - \lambda\langle v, y\rangle v\rangle \\ &= \langle x, f(y)\rangle,\end{aligned}$$

donc f est autoadjoint.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de λ l'endomorphisme f est-il une isométrie vectorielle ?

Correction

Soit $(x, y) \in E^2$. On calcule

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= \langle x - \lambda\langle x, v\rangle v, y - \lambda\langle y, v\rangle v\rangle \\ &= \langle x, y\rangle - \lambda\langle x, v\rangle\langle y, v\rangle - lambda\langle x, v\rangle\langle v, y\rangle + \lambda^2\langle x, v\rangle\langle y, v\rangle\|v\|^2 \\ &= \langle x, y\rangle + (\lambda^2\|v\|^2 - 2\lambda)\langle x, v\rangle\langle y, v\rangle.\end{aligned}$$

Cette quantité vaut $\langle x, y\rangle$ pour tous x et y si et seulement si

$$\lambda^2\|v\|^2 - 2\lambda = 0,$$

i.e. ssi $\lambda = 0$ ou $\lambda = \dfrac{2}{\|v\|^2}$.

2. Dans le cas où f est une isométrie vectorielle, déterminer les éléments caractéristiques de f.

Correction

On regarde les deux possibilités :

- si $\lambda = 0$, alors $f = \mathrm{Id}_E$...
- si $\lambda = \dfrac{2}{\|v\|^2}$, on suppose v unitaire ! On a alors

$$f(x) = x - 2\langle x, v\rangle v = (x - \langle x, v\rangle v) - (\langle x, v\rangle v) = p - q,$$

  où p est la projection orthogonale sur $v^\perp$ et $q = \mathrm{Id}_E - p$. Donc f est la symétrie orthogonale par rapport à $v^\perp$.

3. (question en +) Quelles sont les isométries autoadjointes ?

Correction

Ce sont

4. Déterminer les éléments propres de f.

Correction

L'espace propre associé à la valeur propre 1 est $v^\perp$, celui associé à la valeur propre -1 est $\mathrm{Vect}(v)$.

Exercice 9. *CCINP 22*. Soit E un espace euclidien de dimension $3, \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe, $e = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 + e_3)$ et D la droite portée par le vecteur e. On considère la rotation u autour de l'axe D, d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Déterminer la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

Correction

L'idée est d'abord d'écrire la matrice dans une base adaptée à la décomposition $\mathrm{Vect}(e) \oplus^\perp \mathrm{Vect}(e)^\perp = E$. On sait que dans une telle base $\mathcal{B}'$, étant donné que $\cos(2\pi/3) = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin(2\pi/3) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, la matrice de u sera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

On cherche ensuite à expliciter $\mathcal{B}'$. Déjà, le premier vecteur de la base est donné, c'est $e = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ensuite, on remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est orthogonal à e, donc $f = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est orthogonal à e et de norme 1. Pour trouver le troisième vecteur de la base, on calcule

$$g = e \wedge f = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, (e, f, g) est la BON désirée. On note alors

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Par définition, cette matrice est orthogonale et son inverse est

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) &= P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice 10. *CCINP 24*. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. On note $A^\top$ sa transposée. Soit λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

1. En calculant de deux façons le produit $\overline{(AX)^\top}(AX)$, montrer que $|\lambda| = 1$.

Correction

Déjà, $AX = \lambda X$ donc

$$\overline{(AX)^\top}(AX) = \overline{(\lambda X)^\top}(\lambda X) = |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.$$

D'autre part, on remarque que

$$\begin{aligned}
\overline{(AX)^\top}(AX) &= \overline{X^\top A^\top}(AX) \\
&= \overline{X}^\top \overline{A}^\top (AX) \\
&= \overline{X}^\top A^\top (AX) \text{ car } A \text{ est réelle.} \\
&= \overline{X}^\top X \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2
\end{aligned}$$

Donc, comme X n'est pas le vecteur nul, $|\lambda| = 1$.

2. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\det(A+B)| \leqslant 2^n$.

Correction

On écrit que

$$\det(A+B) = \det(A)\det(\mathrm{I}_n + A^{-1}B) = \det(\mathrm{I}_n + M),$$

où $M = A^{-1}B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ les valeurs propres complexes de M. Alors

$$\det(\mathrm{I}_n + M) \leqslant |\det(\mathrm{I}_n + M)| = \prod_{i=1}^{n} |1+\lambda_i| \leqslant \prod_{i=1}^{n}(1+|\lambda_i|) = 2^n,$$

d'où le résultat désiré.

Exercice 11. *Mines 23*. Soient E un espace euclidien de dimension trois orienté et u un vecteur de norme 1 . On note f la fonction $x \in E \mapsto \langle x, u\rangle u + u \wedge x$.

1. Montrer que f est une isométrie et la caractériser.

Correction

Soient x et y dans E. Alors

$$\begin{aligned}\|f(x)\|^2 &= \|\langle x, u\rangle u + u \wedge x\|^2 \\ &= \langle x, u\rangle^2 \|u\|^2 + 2\langle x, u\rangle \langle u, u \wedge x\rangle + \|u \wedge x\|^2 \\ &= \langle x, u\rangle^2 + \|u \wedge x\|^2\end{aligned}$$

On note θ l'angle entre u et x. Alors

$$\langle x, u\rangle^2 + \|u \wedge x\|^2 = \|x\|^2 \|u\|^2 \cos(\theta)^2 + \|u\|^2 \|x\|^2 \sin(\theta)^2 = \|x\|^2,$$

donc f est une isométrie. On remarque que $f(u) = u$, et que si $x \in u^\perp$, $f(u) = u \wedge x$. Ainsi, si on complète u en une BOND (u, e_2, e_3), $f(e_2) = e_3$ et $f(e_3) = -e_2$. Ainsi, f est la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Sa matrice dans (u, e_2, e_3) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Trouver les isométries g vérifiant $g^2 = f$.

Correction

Soit g vérifiant $g^2 = f$. Alors g commute avec f donc g stabilise $\mathrm{Vect}(u)$ (sous-espace propre de f). Donc $g(u) = u$ ou $g(u) = -u$. De même, g stabilise $\mathrm{Vect}(u)^\perp$. Ainsi, la matrice de g dans (u, e_2, e_3) est

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

On cherche alors les matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifiant $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{2}}$:

- si $M \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, alors $M = R_\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Donc $R_{2\theta} = R_{\frac{\pi}{2}}$ donc $\theta = \frac{\pi}{4}[\pi]$, i.e. $\theta = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $\theta = -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$. Donc

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- si $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, alors $M = S_\theta$ (c'est une symétrie axiale), donc $M^2 = \mathrm{I}_2$, impossible.

Finalement, les 4 g possibles sont représentés par les matrices suivantes

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. *Centrale PC 23*. Soit E un espace euclidien de dimension 3 . On considère deux isométries vectorielles directes $f, g \in \mathcal{SO}(E)$.

1. Montrer que 1 est une valeur propre de f.

Correction

Déjà, les valeurs propres réelles possibles pour f sont ± 1.
Ensuite, on sait que le polynôme caractéristique de f est de degré 3, dont f possède une racine réelle. D'où deux possibilités :

- ou bien χ_f possède 3 racines réelles, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{-1, 1\}^3$. Mais comme $\det(f) = 1$, $\alpha\beta\gamma = 1$, donc au moins l'un des trois réels vaut 1.
- ou bien χ_f possède une racine réelle α et deux racines complexes non réelles conjuguées, β et $\overline{\beta}$. Et $\det(f) = \alpha|\beta|^2$. Mais comme $\det(f) \geqslant 0$, $\alpha = 1$.

Donc 1 est valeur propre de f.

2. Montrer qu'il existe une base orthonormée (u, v, w) de E et un réel θ tels que

$$\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction

On prend w un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.
Alors $F = w^\perp$ est aussi stable par f et f_F est une isométrie directe en dimension 2 : c'est une isométrie car f est une isométrie et elle est directe par déterminant par blocs. Donc f a sa matrice dans une BOND égale à R_θ. D'où le résultat.

3. On suppose qu'il existe $x \in E\setminus\{0\}$ tel que $f(x) = g(x) = x$. Montrer que f et g commutent.

Correction

Si x est vecteur propre de f et g associé à la valeur propre 1, on considère $F = x^\perp$ qui est stable par f et g et sur lequel f et g sont des isométries directes. On dispose alors d'une base $\mathscr{B} = (x, y, z)$ dans laquelle les matrices de f et g sont

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & R_\theta \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & R_\varphi \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices commutent car deux matrices de rotation commutent, donc f et g commutent.

4. On suppose que f et g commutent. Montrer qu'on a l'une des deux propriétés suivantes :

(a) il existe $x \in E\backslash\{0\}$ tel que $f(x) = g(x) = x$;

(b) les isométries f et g sont des symétries orthogonales par rapport à deux droites orthogonales entre elles.

Correction

Déjà, si $f = \mathrm{Id}_E$, c'est fini : 1 est valeur propre de g et tout élément de E est vecteur propre de f pour la valeur propre 1.
Sinon, alors $E_1(f)$ est de dimension 1, $E_1(f) = \mathrm{Vect}(x)$. Alors, comme $g(x) \in E_1(f)$, x est vecteur propre de g. Donc

- ou bien x est vecteur propre de g associé à la valeur propre 1 et alors $g(x) = x$, d'est la première possibilité envisagée par l'énoncé,
- ou bien x est vecteur propre de g associé à la valeur propre -1. Mais alors g possède deux valeurs propres : 1 de multiplicité 1 et -1 de multiplicité 2. De plus, $F = x^\perp$ est stable par f et par g. Les induits f_F et g_F commutent et g_F est diagonalisable avec comme valeurs propres 1 et -1 : on dispose de y tel que $g_F(y) = -y$ et z tel que $g_F(z) = +z$. Mais $\mathrm{Vect}(y)$ et $\mathrm{Vect}(z)$ sont stables par f_F, donc y et z sont des vecteurs propres de f_F donc de f. Comme 1 est valeur propre de f_F de multiplicité 1, on en déduit que $f(y) = -y$ et $f(z) = -z$. Ainsi, dans la base orthogonale $\mathscr{B} = (x, y, z)$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc g est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathrm{Vect}(z)$ et f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $\mathrm{Vect}(x)$: ces droites sont bien orthogonales.

2 Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques

Exercice 13. *CCINP PC 24*. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^\top = A^\top A$ On suppose que $P = X^p$ est un polynôme annulateur de A.

1. Montrer que P est annulateur de $A^\top A$.

Correction

On remarque que $(AA^\top)^2 = AA^\top AA^\top = A^2(A^\top)^2$ donc, par récurrence immédiate, pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$(AA^\top)^k = A^k(A^\top)^k$$

En particulier,

$$(AA^\top)^p = A^p(A^\top)^p = 0,$$

donc P est annulateur de A.

2. En déduire que $A = 0$.

Correction

La matrice $AA^\top$ est symétrique réelle donc, par le théorème spectral, elle est diagonalisable. Comme elle est annulée par P, sa seule valeur propre possible est 0, donc $AA^\top$ est nulle. Donc, en particulier, $\mathrm{Tr}(AA^\top) = 0$ donc, comme $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB^\top)$ est un produit scalaire, on en déduit que A est nulle.

Exercice 14. *CCINP 23, Mines-Telecom 24*. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer l'existence d'un vecteur propre $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Correction

La matrice A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable en base orthonormée. Il existe donc un vecteur propre X de A.

On définit $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ par $B = \begin{pmatrix} A & XX^\top \\ XX^\top & A \end{pmatrix}$.

2. Donner les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $Y_a = \begin{pmatrix} X \\ aX \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B.

Correction

On note λ le réel tel que $AX = \lambda X$. On calcule par blocs

$$\begin{aligned} BY_a &= \begin{pmatrix} AX + aXX^\top X \\ XX^\top X + AaX \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda + a\|X\|^2)X \\ (\|X\|^2 + \lambda a)X \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il faut donc que $(\|X\|^2 + \lambda a) = a(\lambda + a\|X\|^2)$, c'est-à-dire que

$$\|X\|^2 a^2 = \|X\|^2,$$

donc que $\boxed{a = \pm 1}$.

3. Donner une base de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de B.

Correction

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de A. Étant donné la question précédente, la famille

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_1 \\ -e_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_2 \\ e_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_2 \\ -e_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} e_n \\ e_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_n \\ -e_n \end{pmatrix}$$

est une famille de vecteurs propres de B. On vérifie que c'est bien une base de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Soient $(\alpha_1, \alpha_{-1}, \alpha_2, \alpha_{-2}, \ldots, \alpha_n, \alpha_{-n})$, $2n$ réels tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \begin{pmatrix} e_i \\ e_i \end{pmatrix} + \alpha_{-i} \begin{pmatrix} e_i \\ -e_i \end{pmatrix} = 0_{2n,1}.$$

Alors, en regardant les n premières lignes de chaque vecteur, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_{-i}) e_i = 0$ donc pour tout i, $\alpha_i + \alpha_{-i} = 0$.

 nlaillet.math@gmail.com

Ensuite, en regardant les n dernières lignes de chaque vecteur, on obtient $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \alpha_{-i})e_i = 0$ donc pour tout i, $\alpha_i - \alpha_{-i} = 0$.
On conclut donc que pour tout i, $\alpha_i = \alpha_{-i} = 0$.

4. On suppose $n = 3$. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. On définit B comme ci-dessus. Donner un polynôme annulateur de B de degré 3 .

Correction

On sait que A est diagonalisable (car symétrique réelle), de valeurs propres 0 et 3. On sait ensuite que les valeurs propres de B sont les $\lambda \pm \|X\|^2$. Or, ici, $\|X\|^2 = \sqrt{3}$. Ainsi, les valeurs propres de B sont

$$3, -3, 3-3, 3+3, \text{ c'est-à-dire } \{-3, 3, 6\}.$$

Ainsi, comme B est diagonalisable et qu'il ne possède que 3 valeurs propres, on en déduit que $(X+3)(X-3)(X-6)$ annule B.

Exercice 15. *Mines-Telecom 22, CCINP 24*. **1.** Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Correction

Si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien réel, de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$, alors pour tous x et y dans E,

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \|y\|^2 ,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

2. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$, $\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\right)^2 \leqslant r \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2$.

Correction

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$. Notons $U \in \mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ le vecteur constitué de 1 uniquement et $V = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix}$. En notant $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\right)^2 = \langle U, V\rangle^2 \leqslant \|U\|^2 \|V\|^2 = r \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2.$$

3. Soit $B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(\operatorname{tr}(B))^2 \leqslant \operatorname{rg}(B) \operatorname{tr}\left(B^2\right)$.

Correction

La matrice B est symétrique réelle donc est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. On dispose de P orthogonale et de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des réels tels que $B = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Alors
$$B^2 = PD^2P^{-1} = P\mathrm{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)P^{-1}.$$
Notons maintenant r le rang de B. Alors $r = \mathrm{rg}(D)$, ce qui signifie que, parmi $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, exactement r éléments sont non nuls. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il s'agit de $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. On a alors
$$(\mathrm{Tr}(B))^2 = \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\right)^2 \leqslant r \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 = \mathrm{rg}(B)\mathrm{Tr}(B^2).$$

Soit $B \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $b_{i,i} = 1$ pour tout i et $|b_{i,j}| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $i \neq j$.

1. Exprimer $\mathrm{tr}\left(B^2\right)$ et montrer que $\mathrm{tr}\left(B^2\right) \leqslant 2n$.

Correction

On calcule les coefficients diagonaux de B^2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors
$$\begin{aligned}[B^2]_{i,i} &= \sum_{k=1}^{n} [B]_{ik}[B]_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} [B]_{ik}^2 \\ &= 1 + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ k\neq i}} [B]_{ik}^2 \\ &\leqslant 1 + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ k\neq i}} \frac{1}{n} \\ &\leqslant 1 + \frac{n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.\end{aligned}$$
Ainsi, en sommant,
$$\mathrm{Tr}(B^2) \leqslant 2n - 1$$

2. Montrer que $\mathrm{rg}(B) \geqslant n/2$.

Correction

On en déduit donc que
$$n^2 = \mathrm{Tr}(B)^2 \leqslant (2n-1)\mathrm{rg}(B)$$
Donc
$$\mathrm{rg}(B) \geqslant \frac{n^2}{2n-1} \geqslant \frac{n}{2}.$$

Exercice 16. *Mines-Telecom 24*. Soit une matrice carrée d'ordre S symétrique réelle définie positive. Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_k = \dfrac{S^k \cdot X}{\|S^k X\|}$. Montrer que (Y_k) converge vers un vecteur propre de S.

Correction

Ordonnons les valeurs propres de S, $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$, et notons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propre correspondant. On écrit

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{r} x_i e_i,$$

où r est le plus grand entier de $[\![1, n]\!]$ tel que $x_i \neq 0$. Alors

$$S^k X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k x_i e_i.$$

Mais

$$\left\| S^k X \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k x_i^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \lambda_r^k \left\| p(X) \right\|,$$

où $p(X)$ est le projeté de X sur $E_{\lambda_r}(S)$. (il est tout à fait possible que cet espace soit de dimension strictement supérieure à 1) Ainsi,

$$\frac{S^k X}{\|S^k X\|} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i^k x_i}{\|S^k X\|} e_i.$$

Mais alors

$$\frac{\lambda_i^k x_i}{\|S^k X\|} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda_i^k x_i}{\lambda_r^k x_r} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda_i < \lambda_r \\ \dfrac{x_i}{\|p(X)\|} \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi, on peut dire que

$$\frac{S^k X}{\|S^k X\|} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant r \\ \lambda_i=\lambda_r}} \frac{x_i}{\|p(X)\|} e_i = \frac{p(X)}{\|p(X)\|},$$

qui est bien un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ_r.

Exercice 17. *Mines-Telecom 24*. Soit S une matrice symétrique réelle et D une matrice diagonale dont les coefficients sont ceux de la diagonale de S. On suppose que S et D sont semblables. Montrer que $S = D$.

Correction

On note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres de S, qui sont donc aussi ses coefficients diagonaux. On peut supposer sans perte de généralité que $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.
Déjà, par le théorème spectral, S est orthogonalement semblable à D. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de diagonalisation, et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On écrit $e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$. Alors

$$\lambda_n = \langle S e_n, e_n \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \lambda_n \left\| e_n \right\|^2 = \lambda_n.$$

Comme il y a égalité dans toutes les inégalités, on en déduit que pour tout i, ou bien $\alpha_i = 0$, ou bien $\lambda_i = \lambda_n$. Ainsi, e_n appartient au sous-espace propre associé à λ_n, i.e. e_n est un vecteur propre de S. Mais comme $(e_1, \dots, e_{n-1}) = e_n^\perp$ est stable par S, on en déduit que

$$S = \begin{pmatrix} S' & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & \lambda_n \end{pmatrix},$$

où S' est aussi une matrice symétrique, semblable à D' définie par $D = \begin{pmatrix} D' & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & \lambda_n \end{pmatrix}$. S' et D' ont en outre les mêmes coefficients diagonaux.
On conclut par récurrence sur la dimension des matrices !

Exercice 18. *Mines-Ponts 24*. Soit $n \geqslant 2$ entier. A^T désigne la transposée de A et $\mathcal{S}_n^{++}$désigne l'ensemble des matrices définies positives de taille n.

1. Montrer que pour toute matrice carré A inversible de taille n on a : $\operatorname{Tr}\left(A^\top A\right) > 0$. Pourquoi a-t-on $\operatorname{Tr}\left(A^\top A\right) \neq 0$?

Correction

En fait, on a pour toute matrice non nulle de taille n

$$\operatorname{Tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A]_{ij}^2 > 0.$$

2. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer qu'il existe A inversible telle que $S = A^\top A$.

Correction

La matrice S est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormée : on dispose de $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et de $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $S = PDP^\top$. Alors en notant $D' = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, on obtient

$$S = PDP^\top = PD'P^\top PD'P^\top = A^\top A,$$

car $A = PD'P^\top$ est symétrique.

3. Montrer que : $\forall S, S' \in \mathcal{S}_n^{++}, \operatorname{Tr}(SS') > 0$.

Correction

Soient S et S' dans $\mathcal{S}_n^{++}$. On écrit $S = A^\top A$ et $S' = B^\top B$. Alors

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(SS') &= \operatorname{Tr}(A^\top AB^\top B) \\ &= \operatorname{Tr}((BA^\top)(AB^\top)) \\ &= \operatorname{Tr}((AB^\top)^\top(AB^\top)) > 0.\end{aligned}$$

Exercice 19. *Centrale 24*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = A^\top A$.

1. Montrer que les valeurs propres de B sont positives. On les note $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p$.

Correction

Déjà, B est symétrique. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}\langle BX, X\rangle &= (BX)^\top X\\ &= X^\top B^\top X\\ &= X^\top A^\top AX\\ &= \|AX\|^2 \geqslant 0,\end{aligned}$$

donc, par le cours, $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, donc les valeurs propres de B sont positives.

2. On pose $N(A) = \sup\limits_{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$. Montrer que $N(A) = \sqrt{\lambda_p}$.

Correction

Déjà, on montre que pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\dfrac{\|AX\|}{\|X\|} \leqslant \lambda_p$. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les valeurs propres associées. Alors, en notant $X = \sum\limits_{i=1}^n x_i e_i$,

$$\begin{aligned}\|AX\|^2 &= \langle BX, X\rangle\\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i Be_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i\right\rangle\\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i\alpha_i e_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i\right\rangle\\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2\\ &\leqslant \lambda_p \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_p \|X\|^2,\end{aligned}$$

Donc, déjà, pour tout X dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\dfrac{\|AX\|}{\|X\|} \leqslant \sqrt{\lambda_p}$.
Ensuite, si X est un vecteur propre associé à λ_p, on a l'égalité. Donc $N(A) = \sqrt{\lambda_p}$.

3. On suppose à présent A inversible. On pose $C(A) = N(A)\cdot N\left(A^{-1}\right)$. Exprimez C en fonction des valeurs propres de B.

Correction

Par la question précédent, on sait que $N(A^{-1})^2$ est la plus grande valeur propre de la matrice $(A^{-1})^\top A^{-1} = (AA^\top)^{-1}$. Malheureusement, $B^{-1} = (A^\top A)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^\top$. Cependant, si M et N sont deux matrices inversibles,

$$MN = M(NM)M^{-1},$$

donc MN et NM sont semblables donc elles ont même polynôme caractéristique, dont même spectre. Ainsi, $N(A^{-1})^2$ est la plus grande valeur propre de B^{-1}, c'est-à-dire, en

diagonalisant B, $\dfrac{1}{\lambda_1}$. Donc
$$C(A) = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}$$
Remarque : la quantité que nous venons de calculer est appelée **conditionnement** *de la matrice A.*

Exercice 20. *Mines PC 24*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice trigonalisable.

1. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Ω et une matrice triangulaire supérieure B telles que $A = \Omega B \Omega^T$.

Correction

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Alors on dispose d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit triangulaire supérieure.
Orthonormalisons $(e_1, \dots, e_n)$ par le procédé de Gram-Schmidt. Alors on obtient une base orthonormée de E, $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ telle que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)$.
En particulier,
$$f(\varepsilon_i) \in f(\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)) = f(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)),$$
et $f(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)$ car $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est triangulaire supérieure. On en déduit donc que pour tout i,
$$f(\varepsilon_i) \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i),$$
donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ est triangulaire supérieure, ce qui signifie que f est trigonalisable en base orthonormée.

2. On suppose que $AA^\top = A^\top A$. Montrer que A est diagonalisable.

Correction

Plusieurs manières de faire :

- On note B une matrice triangulaire à laquelle A est semblable. Alors $BB^\top = B^\top B$ et B est triangulaire supérieure. En particulier,
$$[BB^\top]_{11} = [B^\top B]_{11},$$
donc
$$\sum_{k=1}^{n} [B]_{1k}[B^\top]_{k1} = \sum_{k=1}^{n} [B^\top]_{1k}[B]_{k1},$$
soit
$$\sum_{k=1}^{n} [B]_{1k}^2 = \sum_{k=1}^{n} [B]_{k1}^2,$$
mais, comme pour $k > 1$, $[B]_{k1} = 0$, on en déduit que
$$\sum_{k=1}^{n} [B]_{1k}^2 = [B]_{11}^2, \text{ donc que } \sum_{k=2}^{n} [B]_{1k}^2$$
Ainsi, tous les coefficients de la première ligne de B sont nuls sauf le premier. Ensuite, on écrit que
$$[BB^\top]_{22} = [B^\top B]_{22},$$

et on en déduit que
$$\sum_{k=1}^{n}[B]_{2k}^2 = \sum_{k=1}^{n}[B]_{k2}^2,$$
Mais $[B]_{12} = 0$ par ce qu'on a fait précédemment, et pour $k > 2$, $[B]_{k2} = 0$ donc
$$\sum_{k=1}^{n}[B]_{2k}^2 = [B]_{22}^2,$$
donc tous les coefficients de la deuxième ligne sont nuls sauf le second.
On poursuit ainsi par récurrence.

- Autre manière de faire : on montre par récurrence que deux matrices qui commutent sont trigonalisables dans la même base.
Pour $n = 1$ c'est évident.
Ensuite, si M et N commutent, M possède un sous-espace propre non réduit à zéro, $E_\lambda(M)$. Comme N commute avec M, N stabilise $E_\lambda(M)$. Mais l'induit de N sur $E_\lambda(M)$ est aussi trigonalisable (son polymôme caractéristique est scindé). Donc M et N possèdent un vecteur propre en commun. Donc, par un changement de base commençant par ce vecteur propre, M et N sont semblables (via la même matrice de passage !) à
$$\begin{pmatrix}\lambda & (*)\\ 0 & M'\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}\mu & (*)\\ 0 & N'\end{pmatrix}$$
Mais alors M' et N' sont aussi trigonalisables et commutent. Par récurrence, le résultat vient.
Par conséquent, on dispose de B et C triangulaires supérieures, de P inversible, et même orthogonale par la question précédente, telles que $A = PBP^\top$ et $A^\top = PCP^\top$. Mais on a aussi $A^\top = PB^\top P^\top$ donc $B^\top = C$, donc B est diagonale.

3. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

Correction

Non, elle n'est pas vraie : $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ est diagonalisable mais ne commute pas avec $A^\top$.

Exercice 21. *Mines 24*. Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{R})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $B = QDQ^\top$ et $A = QQ^\top$. Que dire des éléments diagonaux de D si $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$?

Correction

Déjà, A est symétrique définie positive doncon dispose de Δ diagonale, de P orthogonale telles que $A = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^\top$. Si on note $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on note $\Delta' = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $M = P\Delta'$. Alors $A = MM^\top$.
Ensuite, si on considère $S = M^{-1}B(M^\top)^{-1}$, alors S est symétrique réelle, donc diagonalisable : on dispose de D diagonale, de N dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = NDN^\top = NDN^{-1}$.
On écrit alors
$$B = (MN)D(MN)^\top,$$
soit, en notant $Q = MN$,
$$QQ^\top = MNN^\top M^\top = MM^\top = A.$$

D'où le résultat !
Comme D est la matrice des valeurs propres de B, si $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, les coefficients diagonaux de B sont strictement positifs.

Exercice 22. *Centrale PC 19*. On appelle E_n l'ensemble des vecteurs à n coordonnées réelles. On rappelle le produit scalaire usuel sur E_n : $\forall (X,Y) \in E_n^2, \langle X, Y\rangle = X^\top Y$. On pose $H_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $H_n = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Montrer que H_n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$. On notera α_n la plus petite valeur propre, β_n la plus grande.

Correction

La matrice H_n est clairement symétrique, à coefficients réels donc, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable.

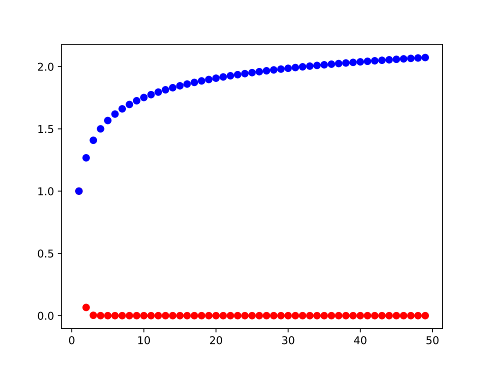
2. Partie Python : calculer $(\alpha_n)_{2\leqslant n\leqslant 100}$ et $(\beta_n)_{2\leqslant n\leqslant 100}$. Conjecturer que $[\alpha_n, \beta n]$ est inclus dans un segment indépendant de n et si (α_n) et (β_n) convergent ou divergent.

Correction

On propose

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
import matplotlib.pyplot as plt

def H(n):
    M = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            M[i,j] = 1/(i+j+1)
    return M

def vp(n):
    M = H(n)
    L = alg.eigvals(M)
    return min(L),max(L)

N = list(range(1,50))
A,B = [],[]
for n in N:
    a,b = vp(n)
    A.append(a)
    B.append(b)

plt.plot(N,A,'or')
plt.plot(N,B,'ob')
plt.show()
```

et on obtient



$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger (vers 0) et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger aussi.

3. Montrer que $\forall X \in E_n,\ \alpha_n||X||^2 \leqslant \langle X, H_nX\rangle \leqslant \beta_n||X||^2$.

Correction

Soit $X \in E_n$, $U_1,\dots,U_n$ une base orthonormée de diagonalisation de H_n, $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les n valeurs propres de H_n rangées dans l'ordre croissant. Alors, si on écrit $X = \sum_{i=1}^{n} x_iU_i$, on a

$$H_nX = \sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_iU_i,$$

donc

$$\langle X, H_nX\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

(formule du produit scalaire lorsqu'on connaît la décomposition dans une BON) Mais $(x_1^2,\dots,x_n^2)$ sont positifs et $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \alpha_n \leqslant \lambda_i \leqslant \beta_n$, donc

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_n x_i^2 \leqslant \langle X, H_nX\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{n} \beta_n x_i^2,$$

donc

$$\alpha_n \|X\|^2 \leqslant \langle X, H_nX\rangle \leqslant \beta_n \|X\|^2 .$$

4. Démontrer que l'ensemble $\{X \in E_n,\ \langle X, H_nX\rangle = \beta_n||X||^2\}$ est un sous-espace propre de H_n.

Correction

Soit B_n le sous-espace propre de H_n associé à la valeur propre β_n.
Déjà, si $X \in B_n$, $\langle X, H_nX\rangle = \langle X, \beta_nX\rangle = \beta_n \|X\|^2$.
Ensuite, si $\langle X, H_nX\rangle = \beta \|X\|^2$, alors, avec les notations de la question précédente, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_n x_i^2$, donc, en soustrayant,

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_n - \lambda_i)x_i^2 = 0.$$

On a une somme de termes positifs qui est nul donc chaque terme est nul, donc pour tout i tel que $\lambda_i \neq \beta_n$, $x_i^2 = 0$. Donc

$$X = \sum_{\lambda_i = \beta_i} x_i U_i,$$

donc X appartient à l'espace propre associé à la valeur propre β_n !

5. Expliciter un polynôme P_X de degré au plus $n-1$ tel que $\langle X, H_n X\rangle = \int_0^1 (P_X(t))^2 dt$.

Correction

Effectuons le calcul plus précisément :

$$\begin{aligned}
\langle X, H_n X\rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i [H_n X]_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1} x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j} dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} x_i x_j t^{i+j-2} dt \\
&= \int_0^1 P_X(t)^2 dt, \text{ où } P_X(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}.
\end{aligned}$$

6. Démontrer que $\alpha_n \geqslant 0$ et trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$. On note F_n le sous-espace propre associé à la valeur propre β_n.

Correction

Déjà, si U est un vecteur propre associé à α_n, $\alpha \|U\|^2 = \langle U, H_n U\rangle = \int_0^1 U(t)^2 dt \geqslant 0$.

Ensuite, en prenant $P_{X_n} : t \mapsto t^{n-1}$, on remarque que $\|X_n\|^2 = 1$ et que $\langle X_n, H_n X_n\rangle = \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $0 \leqslant \alpha_n \|X_n\|^2 \leqslant \frac{1}{2n}$ donc $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

7. (a) Montrer que, si $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top \in F_n$, alors $|X| = \begin{pmatrix} |x_1| & \cdots & |x_n| \end{pmatrix}^\top \in F_n$.

Correction

Calculons

$$\begin{aligned}\beta_n \|X\|^2 = \langle X, H_n X\rangle &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j-1} x_j \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| \sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j-1} |x_j| \\ &= \langle |X|, H_n |X| \rangle \\ &\leqslant \beta_n \||X|\|^2 \text{ par la question 2}\end{aligned}$$

Mais on remarque que $\|X\|^2 = \||X|\|^2$, donc on a égalité dans toutes les inégalités, donc $\langle |X|, H_n|X|\rangle = \beta_n \||X|\|^2$. Donc, par la question 3, $|X| \in F_n$.

(b) En déduire que un vecteur propre de H_n pour la valeur propre β_n est un vecteur à coefficients non nuls et de même signe. *On pourra d'abord s'intéresser, si X est un vecteur propre, à $H_n|X|$.*

Correction

On remarque que si X est dans F_n, $|X|$ aussi. Or, $H_n|X| = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j-1}|x_j|\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Ainsi, comme $|X|$ n'est pas nul, $H_n|X|$ a toutes ses coordonnées non nulles.
Maintenant, $\beta_n > 0$ car sinon H_n serait la matrice nulle (toutes les valeurs propres de H_n sont $\geqslant 0$ et β_n est la plus grande). Or, $H_n|X| = \beta_n|X|$. Donc $|X|$ a toutes ses coordonnées non nulles.
Si X avait deux coordonnées de signes différents, alors $X + |X|$ aurait au moins une coordonnée nulle et serait dans F_n, absurde !
Donc X a toutes ses coordonnées de même signe.

(c) En déduire $\dim(F_n)$. *Si U et V sont deux vecteurs de F_n, on s'intéressera aux coordonnées de $U + tV$ avec $t \in \mathbb{R}$.*

Correction

Si (U, V) sont dans F_n, non nuls, alors pour tout t dans $\mathbb{R}$, $U + tV \in F_n$. Mais alors, par le TVI, en regardant la première coordonnée, on dispose de $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $U + t_0V$ ait sa première coordonnée nulle. Donc $U + t_0V = 0$. Donc $U = -t_0V$, donc tous les vecteurs de F_n sont colinéaires. Ainsi, $\dim(F_n) = 1$.

8. *Convergence de $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

(a) Démontrer que si Q est un polynôme, $\int_0^1 Q(t)dt = -i\int_0^\pi Q(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$.

Correction

En théorie, on ne fait pas de changement de variables complexes ! On écrit $Q(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$. Alors

$$\int_0^1 Q(t)dt = \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{k+1}.$$

Et

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} Q(\mathrm{e}^{i\theta})e^{i\theta}d\theta &= \int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{n} a_k\mathrm{e}^{ik\theta}\mathrm{e}^{i\theta}d\theta\\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{i(k+1)\theta}d\theta\\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k\left[\frac{\mathrm{e}^{i(k+1)\theta}}{i(k+1)}\right]_0^{\pi}\\ &= -i\sum_{k=0}^{n} a_k\frac{1}{k+1},\end{aligned}$$

d'où le résultat !

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (P_X(t))^2dt = -i.\int_0^{\pi} P_X(e^{i\theta})^2e^{i\theta}d\theta$

(b) Montrer que $\langle X, H_nX\rangle \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} |P_X(e^{i\theta}|^2d\theta$.

Correction

On en déduit que

$$\begin{aligned}\langle X, H_nX\rangle &= |\langle X, H_nX\rangle|\\ &= \left|\int_0^1 P_X(t)^2dt\right|\\ &= \left|-i\int_0^{\pi} P_X(\mathrm{e}^{i\theta})^2\mathrm{e}^{i\theta}dt\right|\\ &\leqslant \int_0^{\pi}\left|P_X(\mathrm{e}^{i\theta})^2\right|dt.\end{aligned}$$

(c) En déduire que $X^\top H_nX \leqslant \pi\|X\|^2$, puis la convergence de $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

On calcule

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\left|P_X(\mathrm{e}^{i\theta})^2\right|dt\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|P_X(\mathrm{e}^{i\theta})^2\right|dt\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\mathrm{e}^{i(k-1)\theta}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell\mathrm{e}^{i(\ell-1)\theta}\right)d\theta\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_kx_\ell\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(k-1)\theta}\mathrm{e}^{i(\ell-1)\theta}d\theta\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_kx_\ell 2\pi\delta_{k\ell} = \pi\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \pi\|X\|^2.\end{aligned}$$

Ainsi, $X^TH_nX \leqslant \pi\|X\|^2$.

Donc β_n est majorée par π. Elle est croissante car si $X \in \mathbb{R}^n$, associé à β_n, et

$Y \in \mathbb{R}^{n+1}$ est tel que les n premières coordonnées de Y soient celles de X, alors

$$\beta_n \|X\|^2 = X^T H_n X = Y^T H_n Y \leqslant \beta_{n+1} \|Y\|^2 = \beta_{n+1} \|X\|^2 .$$

Croissante et majorée, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge !

Exercice 23. *Mines-Ponts PC 24*. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de spectre $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\|X\|^4 \leqslant \langle AX, X\rangle \left\langle A^{-1}X, X\right\rangle$.
Indication. On pourra montrer qu'il existe B dans $\mathcal{S}_n^{++}$ telle que $B^2 = A$.

Correction

Déjà, A est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc on dispose de P dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, de D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. De plus, les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs. Si on note $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors en notant $B = P\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P^{-1}$, on a $B^2 = A$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Ensuite, on écrit que

$$\langle AX, X\rangle = \left\langle B^2X, X\right\rangle = \langle BX, BX\rangle = \|BX\|^2 .$$

De même, $\left\langle A^{-1}X, X\right\rangle = \left\|B^{-1}X\right\|^2$. Ainsi, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|X\|^4 = \langle X, X\rangle^2 = \left\langle BX, B^{-1}X\right\rangle^2 \leqslant \|BX\|^2 \left\|B^{-1}X\right\|^2 = \langle AX, X\rangle \left\langle A^{-1}X, X\right\rangle ,$$

ce qui est le résultat désiré.

2. Montrer que $\langle AX, X\rangle \left\langle A^{-1}X, X\right\rangle \leqslant \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|X\|^4$.
Indication. On pourra considérer le polynôme du second degré

$$f(t) = \langle AX, X\rangle t^2 - (\lambda_1 + \lambda_n) \|X\|^2 t + \lambda_1\lambda_n \left\langle A^{-1}X, X\right\rangle.$$

Correction

On utilise l'indication et on considère

$$f(t) = \langle AX, X\rangle t^2 - (\lambda_1 + \lambda_n) \|X\|^2 t + \lambda_1\lambda_n \left\langle A^{-1}X, X\right\rangle .$$

Étant donnée l'inégalité que l'on souhaite démontrer, on sait qu'il faut démontrer que le discriminant de f est positif, c'est-à-dire que f s'annule en au moins un point.
On remarque que $f(0) = \lambda_1\lambda_n \left\langle A^{-1}X, X\right\rangle > 0$.
Ensuite, calculons $f(1)$:

$$\begin{aligned} f(1) &= \langle AX, X\rangle - (\lambda_1 + \lambda_n) \|X\|^2 + \lambda_1\lambda_n \left\langle A^{-1}X, X\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)x_i^2 + \lambda_1\lambda_n \frac{x_i^2}{\lambda_i}, \end{aligned}$$

si on note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de X dans une BON de diagonalisation de A.

Mais, à i fixé,

$$\begin{aligned}\lambda_i - \lambda_1 - \lambda_n + \lambda_1\lambda_n\frac{1}{\lambda_i} &= \frac{\lambda_i^2 - \lambda_1\lambda_i - \lambda_n\lambda_i + \lambda_1\lambda_n}{\lambda_i}\\ &= \frac{(\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_n)}{\lambda_i} \leqslant 0,\end{aligned}$$

donc $f(1) \leqslant 0$. Ainsi, par le TVI, comme f est continue et change de signe, f s'annule. Donc son discriminant est négatif, d'où l'inégalité désirée !

Exercice 24. *Racine carrée d'une matrice, d'après écrit Centrale PC 2024*. **Préliminaire (et révision de sup)** Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On définit la suite $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} c_0(a) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1}(a) = \dfrac{1}{2}\left(c_n(a) + \dfrac{a}{c_n(a)}\right) \end{cases}$$

1. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(a)$ est bien défini et que $c_n(a) > 0$.

Correction

Déjà, $c_0(a)$ est bien défini et strictement supérieur à 0. L'initialisation est faite.
Soit désormais $n \in \mathbb{N}$ tel que $c_n(a)$ soit défini et strictement positif. Alors $c_n(a) \neq 0$ donc $c_{n+1}(a)$ est bien défini. De plus, par stricte positivité de $c_n(a)$, $c_{n+1}(a) > 0$.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(a)$ est bien défini et que $c_n(a) > 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de $c_{n+1}(a)^2 - a$ faisant intervenir $\left(c_n(a)^2 - a\right)^2$. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $c_n(a) \geqslant \sqrt{a}$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} c_{n+1}(a)^2 - a &= \frac{1}{4}(c_n(a)^2 + 2a + \frac{a^2}{c_n(a)^2}) - a \\ &= \frac{1}{4c_n(a)^2}\left(c_n(a)^4 + 2ac_n(a)^2 + a^2 - 4ac_n(a)^2\right) \\ &= \frac{1}{4c_n(a)^2}\left(c_n(a)^4 - 2ac_n(a)^2 + a^2\right) \\ &= \frac{1}{4c_n(a)}(c_n(a)^2 - a)^2 \end{aligned}$$

Soit alors $n \geqslant 1$. On sait que

$$c_n(a)^2 - a \geqslant \frac{1}{4c_{n-1}(a)}(c_{n-1}(a)^2 - a)^2 \geqslant 0,$$

donc $c_n(a)^2 \geqslant a$ donc, par positivité de $c_n(a)$ et de a, $c_n(a) \geqslant \sqrt{a}$.

3. Montrer que $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

Correction

On remarque que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} c_{n+1}(a) - c_n(a) &= \frac{1}{2}\left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)}\right) - c_n(a) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c_n(a)} - c_n(a)\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{a - c_n(a)^2}{c_n(a)} \\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Donc $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par $\sqrt{a}$, donc elle converge.

On note $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices $M \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ vérifiant $X^\top MX \geqslant 0$ pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$. Dans toute cette partie, étant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, on appelle racine carrée de M toute matrice $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.

4. Déterminer les racines carrées de I_2 appartenant à O(2). Que peut-on conclure quant au nombre de racines carrées de I_2 ?

Correction

Soit $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

- $M \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, alors on dispose de θ tel que $M = R_\theta$. Alors on a les équivalences
$$M^2 = \mathrm{I}_2 \Leftrightarrow R_{2\theta} = \mathrm{I}_2 = R_0,$$
donc $2\theta = 0[2\pi]$ donc $\theta = \pm\pi[2\pi]$. Donc $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, alors M est une matrice de symétrie donc $M^2 = \mathrm{I}_2$.

Donc l'ensemble des racines de I_2 est

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \cup \{\pm\mathrm{I}_2\}.$$

5. Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.

Correction

On sait que $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$, donc M est diagonalisable en base orthonormée : on dispose de $P \in \mathcal{O}_q(\mathbb{R})$, de $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale à coefficients positifs telles que $M = PDP^\top$. En posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $B = P\Delta P^\top$, on a $B \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.

6. Montrer que B est la seule racine carrée de M appartenant à $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. On note alors $\sqrt{M}$ l'unique racine carrée symétrique positive de M.

Correction

(question **difficile !**)
On note u l'endomorphisme canoniquement associé à M, φ l'endomorphisme canoniquement associé à B. Soit C une matrice symétrique, ψ son endomorphisme canoniquement

associé. Clairement, C et M commutent, donc ψ et u commutent, donc ψ stabilise les sous-espaces propres de u. Soit λ une valeur propre de u, E_λ le sous-espace propre correspondant.
Alors $u_{E_\lambda} = \lambda \mathrm{Id}_{E_\lambda}$ et, par construction, $\varphi_{E_\lambda} = \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_{E_\lambda}$.
Mais ψ_{E_λ} est symétrique donc diagonalisable en base orthonormée : on dispose d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r)$ de E_λ qui diagonalise ψ_{E_λ}. Soit $i \in [\![1, r]\!]$, α_i la valeur propre associée à e_i. Alors $\psi(e_i) = \alpha_i e_i$ donc $\psi^2(e_i) = \alpha_i^2 e_i$, donc $u(e_i) = \alpha_i^2 e_i$ donc $\lambda e_i = \alpha_i^2 e_i$, donc $\alpha_i^2 = \lambda$. Mais comme $\alpha_i \geqslant 0$, $\alpha_i = \sqrt{\lambda}$.
Donc, finalement, $\psi_{E_\lambda} = \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_{E_\lambda}$. Donc ψ et φ coïncident sur les espaces propres de u, donc coïncident.

Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ les valeurs propres de M comptées avec multiplicité. On rappelle que, d'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}(q)$ telle que

$$M = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q) P^\top$$

On pose alors :

$$\begin{cases} M_0 = \mathrm{I}_q \\ \forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(M_n + M M_n^{-1}\right) \end{cases}$$

7. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est bien définie et que

$$M_n = P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) P^\top$$

Correction

L'initialisation est claire : $M_0 = \mathrm{I}_n = P\mathrm{diag}(1, \dots, 1)P^\top$.
Soit désormais n tel que la proposition soit vraie au rang n. Alors

$$\begin{aligned}
M_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(M_n + M M_n^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) P^\top + P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q) P^\top \left(P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) P^\top\right)^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) P^\top + P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q) P^\top (P^\top)^{-1} \operatorname{diag}(1/c_n(\lambda_1), \dots, 1/c_n(\lambda_q)) P^{-1}\right) \\
&= P\frac{1}{2}\left(\operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) + \operatorname{diag}(1/c_n(\lambda_1), \dots, 1/c_n(\lambda_q))\right) P^\top \\
&= P \operatorname{diag}(c_{n+1}(\lambda_1), \dots, c_{n+1}(\lambda_q)) P^\top
\end{aligned}$$

D'où l'hérédité et le résultat.

8. En déduire que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{M}$.

Correction

On en déduit alors, par convergence de $c_n(a)$ vers $\sqrt{a}$, que

$$M_n = P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) P^\top \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M_n = P \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_q}\right) P^\top = \sqrt{M}.$$