TD 13
Endomorphismes des espaces euclidiens

1 Isométries et matrices orthogonales

Exercice 1. *Mines-Telecom 24*. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{id}_E$ et $\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle = 0$

1. Montrer que la dimension n de E est paire. On note $n = 2p$.

2. Montrer que $(u(x), x)$ est libre pour tout $x \neq 0$.

3. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, \dots, e_p$ tels que la famille $(e_1, u(e_1), \dots, e_p, u(e_p))$ soit orthonormale.

4. En déduire que u est une isométrie.

Exercice 2. *CCINP 24*. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $MM^\top = M^\top M$ et $M^2 + 2\mathrm{I}_2 = 0$.

1. Montrer que $M^\top M$ est diagonalisable.

2. Montrer que $\mathrm{Sp}\left(M^\top M\right) \subset \{-2, 2\}$.

3. Montrer que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\left(M^\top M\right), \lambda \geqslant 0$. En déduire $\mathrm{Sp}\left(M^\top M\right)$.

4. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{2}}M$ est orthogonale.

5. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{2}}M$ est la matrice d'une rotation d'angle θ à déterminer.

6. Déterminer toutes les matrices M possibles.

Exercice 3. *Mines-Ponts 24*.

1. Que peut-on dire du spectre d'une matrice orthogonale ?

2. Que peut-on dire de la matrice $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$? Que décrit-elle ?

Exercice 4. *Mines-Telecom 24*. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $\det(M) = 0$ et que $M^\top = M^2$.

1. Montrer que $M^4 = M$.

2. Montrer que M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \{0, 1\}$.

3. On suppose que $b = 0$. Que peut-on dire de M ?

4. Montrer que $M^2 = M$.

Exercice 5. *CCINP 24*. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour que A soit la matrice d'une rotation vectorielle.

Exercice 6. *CCINP PC 22*. Soient n un entier $\geqslant 2$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \mathrm{I}_n + A$ et $N = \mathrm{I}_n - A$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $X^\top AX \in \mathbb{R}$. Calculer $\left(X^\top AX\right)^\top$ et montrer que $X^\top AX = 0$.

2. Montrer que la seule valeur propre réelle possible de A est zéro. En déduire que M et N sont inversibles.

3. Montrer que M et N commutent, et qu'il en est de même pour M^{-1} et N^{-1}. Montrer que $\Omega = MN^{-1}$ est orthogonale et n'admet pas -1 comme valeur propre.

4. Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ qui n'admet pas -1 comme valeur propre. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $U = (\mathrm{I}_n + B)(\mathrm{I}_n - B)^{-1}$.

Exercice 7. *TPE 2019*. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie. On prend T une isométrie vectorielle de E, et on définit $S = T - \mathrm{Id}_E$. On note, pour $(u, v) \in E^2$, $(u|v)$ le produit scalaire sur E.

1. Montrer que $\forall (u, v) \in E^2, (u \mid T(v) - v) = \left(T^{-1}(u) - u \mid v\right)$.
2. Montrer que $(\mathrm{Im}(S))^{\perp} = \mathrm{Ker}(S)$.
3. On définit, $\forall n \in \mathbb{N}*, T_n = \dfrac{1}{n}\left(\mathrm{Id}_E + T + \ldots + T^{n-1}\right)$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$. On note p cette limite.
   (b) Caractériser p.

Exercice 8. *Centrale 24*. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, $v \in E$ non nul et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On considère

$$f : \left| \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x - \lambda \langle x, v\rangle v \end{array} \right.$$

1. (a) Montrer que f est autoadjoint.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de λ l'endomorphisme f est-il une isométrie vectorielle ?
2. Dans le cas où f est une isométrie vectorielle, déterminer les éléments caractéristiques de f.
3. (question en +) Quelles sont les isométries autoadjointes ?
4. Déterminer les éléments propres de f.

Exercice 9. *CCINP 22*. Soit E un espace euclidien de dimension $3, \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe, $e = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 + e_3)$ et D la droite portée par le vecteur e. On considère la rotation u autour de l'axe D, d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Déterminer la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

Exercice 10. *CCINP 24*. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. On note $A^\top$ sa transposée. Soit λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

1. En calculant de deux façons le produit $\overline{(AX)^\top}(AX)$, montrer que $|\lambda| = 1$.
2. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\det(A + B)| \leqslant 2^n$.

Exercice 11. *Mines 23*. Soient E un espace euclidien de dimension trois orienté et u un vecteur de norme 1 . On note f la fonction $x \in E \mapsto \langle x, u\rangle u + u \wedge x$.

1. Montrer que f est une isométrie et la caractériser.
2. Trouver les isométries g vérifiant $g^2 = f$.

Exercice 12. *Centrale PC 23*. Soit E un espace euclidien de dimension 3 . On considère deux isométries vectorielles directes $f, g \in \mathcal{SO}(E)$.

1. Montrer que 1 est une valeur propre de f.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée (u, v, w) de E et un réel θ tels que

$$\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On suppose qu'il existe $x \in E\backslash\{0\}$ tel que $f(x) = g(x) = x$. Montrer que f et g commutent.
4. On suppose que f et g commutent. Montrer qu'on a l'une des deux propriétés suivantes :
   (a) il existe $x \in E\backslash\{0\}$ tel que $f(x) = g(x) = x$;
   (b) les isométries f et g sont des symétries orthogonales par rapport à deux droites orthogonales entre elles.

 nlaillet.math@gmail.com

2 Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques

Exercice 13. *CCINP PC 24*. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^\top = A^\top A$ On suppose que $P = X^p$ est un polynôme annulateur de A.

1. Montrer que P est annulateur de $A^\top A$.
2. En déduire que $A = 0$.

Exercice 14. *CCINP 23, Mines-Telecom 24*. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer l'existence d'un vecteur propre $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On définit $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ par $B = \begin{pmatrix} A & XX^\top \\ XX^\top & A \end{pmatrix}$.

2. Donner les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $Y_a = \begin{pmatrix} X \\ aX \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B.
3. Donner une base de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de B.
4. On suppose $n = 3$. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. On définit B comme ci-dessus. Donner un polynôme annulateur de B de degré 3 .

Exercice 15. *Mines-Telecom 22, CCINP 24*. **1.** Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$, $\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\right)^2 \leqslant r \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2$.
3. Soit $B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(\operatorname{tr}(B))^2 \leqslant \operatorname{rg}(B) \operatorname{tr}\left(B^2\right)$.

Soit $B \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $b_{i,i} = 1$ pour tout i et $|b_{i,j}| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $i \neq j$.

1. Exprimer $\operatorname{tr}\left(B^2\right)$ et montrer que $\operatorname{tr}\left(B^2\right) \leqslant 2n$.
2. Montrer que $\operatorname{rg}(B) \geqslant n/2$.

Exercice 16. *Mines-Telecom 24*. Soit une matrice carrée d'ordre S symétrique réelle définie positive. Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_k = \dfrac{S^k \cdot X}{\|S^k X\|}$. Montrer que (Y_k) converge vers un vecteur propre de S.

Exercice 17. *Mines-Telecom 24*. Soit S une matrice symétrique réelle et D une matrice diagonale dont les coefficients sont ceux de la diagonale de S. On suppose que S et D sont semblables. Montrer que $S = D$.

Exercice 18. *Mines-Ponts 24*. Soit $n \geqslant 2$ entier. A^T désigne la transposée de A et $\mathcal{S}_n^{++}$désigne l'ensemble des matrices définies positives de taille n.

1. Montrer que pour toute matrice carré A inversible de taille n on a : $\operatorname{Tr}\left(A^\top A\right) > 0$. Pourquoi a-t-on $\operatorname{Tr}\left(A^\top A\right) \neq 0$?
2. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer qu'il existe A inversible telle que $S = A^\top A$.
3. Montrer que : $\forall S, S' \in \mathcal{S}_n^{++}, \operatorname{Tr}(SS') > 0$.

Exercice 19. *Centrale 24*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = A^\top A$.

1. Montrer que les valeurs propres de B sont positives. On les note $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p$.
2. On pose $N(A) = \sup_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$. Montrer que $N(A) = \sqrt{\lambda_p}$.
3. On suppose à présent A inversible. On pose $C(A) = N(A) \cdot N\left(A^{-1}\right)$. Exprimez C en fonction des valeurs propres de B.

Exercice 20. *Mines PC 24*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice trigonalisable.

1. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Ω et une matrice triangulaire supérieure B telles que $A = \Omega B \Omega^T$.
2. On suppose que $AA^\top = A^\top A$. Montrer que A est diagonalisable.
3. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

Exercice 21. *Mines 24*. Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{R})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $B = QDQ^\top$ et $A = QQ^\top$. Que dire des éléments diagonaux de D si $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$?

Exercice 22. *Centrale PC 19*. On appelle E_n l'ensemble des vecteurs à n coordonnées réelles. On rappelle le produit scalaire usuel sur E_n : $\forall (X,Y) \in E_n^2, \langle X, Y\rangle = X^\top Y$. On pose $H_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $H_n = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Montrer que H_n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$. On notera α_n la plus petite valeur propre, β_n la plus grande.
2. Partie Python : calculer $(\alpha_n)_{2 \leqslant n \leqslant 100}$ et $(\beta_n)_{2 \leqslant n \leqslant 100}$. Conjecturer que $[\alpha_n, \beta n]$ est inclus dans un segment indépendant de n et si (α_n) et (β_n) convergent ou divergent.
3. Montrer que $\forall X \in E_n,\ \alpha_n ||X||^2 \leqslant \langle X, H_n X\rangle \leqslant \beta_n ||X||^2$.
4. Démontrer que l'ensemble $\{X \in E_n,\ \langle X, H_n X\rangle = \beta_n ||X||^2\}$ est un sous-espace propre de H_n.
5. Expliciter un polynôme P_X de degré au plus $n-1$ tel que $\langle X, H_n X\rangle = \displaystyle\int_0^1 (P_X(t))^2 dt$.
6. Démontrer que $\alpha_n \geqslant 0$ et trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$. On note F_n le sous-espace propre associé à la valeur propre β_n.
7. (a) Montrer que, si $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top \in F_n$, alors $|X| = \begin{pmatrix} |x_1| & \cdots & |x_n| \end{pmatrix}^\top \in F_n$.
   (b) En déduire que un vecteur propre de H_n pour la valeur propre β_n est un vecteur à coefficients non nuls et de même signe. *On pourra d'abord s'intéresser, si X est un vecteur propre, à $H_n|X|$.*
   (c) En déduire $\dim(F_n)$. *Si U et V sont deux vecteurs de F_n, on s'intéressera aux coordonnées de $U + tV$ avec $t \in \mathbb{R}$.*
8. *Convergence de $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$*
   (a) Démontrer que si Q est un polynôme, $\displaystyle\int_0^1 Q(t)dt = -i \int_0^\pi Q(e^{i\theta})e^{i\theta} d\theta$.
   (b) Montrer que $\langle X, H_n X\rangle \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi |P_X(e^{i\theta}|^2 d\theta$.
   (c) En déduire que $X^\top H_n X \leqslant \pi \|X\|^2$, puis la convergence de $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 23. *Mines-Ponts PC 24*. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de spectre $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\|X\|^4 \leqslant \langle AX, X\rangle \left\langle A^{-1}X, X\right\rangle$.
   Indication. On pourra montrer qu'il existe B dans $\mathcal{S}_n^{++}$ telle que $B^2 = A$.
2. Montrer que $\langle AX, X\rangle \left\langle A^{-1}X, X\right\rangle \leqslant \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|X\|^4$.
   Indication. On pourra considérer le polynôme du second degré

$$f(t) = \langle AX, X\rangle t^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)\|X\|^2 t + \lambda_1\lambda_n \left\langle A^{-1}X, X\right\rangle.$$

Exercice 24. *Racine carrée d'une matrice, d'après écrit Centrale PC 2024*. **Préliminaire (et révision de sup)** Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On définit la suite $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} c_0(a) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1}(a) = \dfrac{1}{2}\left(c_n(a) + \dfrac{a}{c_n(a)}\right) \end{cases}$$

1. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(a)$ est bien défini et que $c_n(a) > 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de $c_{n+1}(a)^2 - a$ faisant intervenir $\left(c_n(a)^2 - a\right)^2$. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $c_n(a) \geqslant \sqrt{a}$.
3. Montrer que $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

On note $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices $M \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ vérifiant $X^\top MX \geqslant 0$ pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$. Dans toute cette partie, étant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, on appelle racine carrée de M toute matrice $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.

4. Déterminer les racines carrées de I_2 appartenant à $\mathrm{O}(2)$. Que peut-on conclure quant au nombre de racines carrées de I_2 ?
5. Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.
6. Montrer que B est la seule racine carrée de M appartenant à $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. On note alors $\sqrt{M}$ l'unique racine carrée symétrique positive de M.

Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ les valeurs propres de M comptées avec multiplicité. On rappelle que, d'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}(q)$ telle que

$$M = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) P^\top$$

On pose alors :

$$\begin{cases} M_0 = \mathrm{I}_q \\ \forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(M_n + MM_n^{-1}\right) \end{cases}$$

7. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est bien définie et que

$$M_n = P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \ldots, c_n(\lambda_q)) P^\top$$

8. En déduire que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{M}$.