

# PSI – Programme de colles

## Semaine 18 – du 3 au 7 mars 2025

### Programme en bref.

— Cours et exercices sur les endomorphismes des espaces euclidiens.

### Exemples de questions de cours

1. Description des matrices de  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ .
2. Si  $u$  est une isométrie en dimension 2 : ou bien elle est directe et dans toute BOND, sa matrice a la même forme et c'est une rotation ; ou bien elle est indirecte et pour toute BOND, il existe un  $\theta$  tel que sa matrice soit 
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$
.
3. Réduction des isométries en dimension 3 : si  $u$  est une isométrie, il existe une BOND dans laquelle sa matrice est 
$$\begin{pmatrix} \det(u) & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & R_\theta \end{pmatrix}$$
.
4. Si  $\mathcal{B}$  est une BON,  $u \in \mathcal{S}(E)$  si et seulement si la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .
5. Si  $p$  est un projecteur, alors  $p$  est un projecteur orthogonal si et seulement si  $p$  est autoadjoint.
6. Si  $u \in \mathcal{S}(E)$  et  $F$  est stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u$ .
7. Si  $u \in \mathcal{S}(E)$ , les sous-espaces propres de  $u$  sont deux à deux orthogonaux.
8. Pour  $u \in \mathcal{S}(E)$ , équivalence entre «  $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0$  » et « le spectre de  $u$  est dans  $\mathbb{R}_+$ . »
9. Si  $u \in \mathcal{S}(E)$  et  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  sont ses valeurs propres, encadrement de  $\langle u(x), x \rangle$  à l'aide de  $\lambda_1$  et  $\lambda_n$ .

### Programme en détail (extraits du programme officiel)

#### Endomorphismes d'un espace euclidien

Cette section vise les objectifs suivants :

- étudier les isométries vectorielles et matrices orthogonales, et les décrire en dimension deux et trois en insistant sur les représentations géométriques ;
- approfondir la thématique de réduction des endomorphismes dans le cadre euclidien en énonçant les formes géométrique et matricielle du théorème spectral ;
- introduire la notion d'endomorphisme autoadjoint positif, qui trouvera notamment son application au calcul différentiel d'ordre 2.

La notion d'adjoint est hors programme.

#### CONTENUS

#### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.  
Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.  
Groupe orthogonal.

Exemple : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions.

Notation  $O(E)$ .

On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.

**b) Matrices orthogonales**

Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est orthogonale si  $A^T A = I_n$ .

Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.

Groupe orthogonal.

Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal.

Orientation. Bases orthonormées directes.

Interprétation en termes de colonnes et de lignes.

Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.

On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ».

Notations  $O_n(\mathbb{R})$ ,  $O(n)$ .

Notations  $SO_n(\mathbb{R})$ ,  $SO(n)$ .

**c) Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3**

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base orthonormée directe : produit mixte.

Produit vectoriel. Calcul dans une base orthonormée directe.

Orientation d'un plan ou d'une droite dans un espace euclidien orienté de dimension 3.

Notations  $[u, v]$ ,  $[u, v, w]$ .

Interprétation géométrique comme aire ou volume.

**d) Isométries vectorielles d'un plan euclidien**

Description des matrices de  $O_2(\mathbb{R})$ , de  $SO_2(\mathbb{R})$ .

Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.

Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.

Commutativité de  $SO_2(\mathbb{R})$ .

On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.

**e) Isométries d'un espace euclidien de dimension 3**

Description des matrices de  $SO_3(\mathbb{R})$ .

Rotation vectorielle d'un espace euclidien orienté de dimension 3.

Axe et mesure de l'angle d'une rotation.

**f) Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles**

Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien.

Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.

Théorème spectral :

tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.

Matrice symétrique positive, définie positive.

Notation  $\mathcal{S}(E)$ .

Caractérisation des projecteurs orthogonaux.

On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant celle d'« endomorphisme autoadjoint ».

La démonstration n'est pas exigible.

Forme matricielle du théorème spectral.

Caractérisation spectrale. Notations  $\mathcal{S}^+(E)$ ,  $\mathcal{S}^{++}(E)$ .

Caractérisation spectrale. Notations  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .