Chapitre 14
Topologie des espaces vectoriels normés – résumé de cours

On notera $B(x,r)$ la boule **ouverte** de centre x et de rayon r, et $B_f(x,r)$ la boule **fermée** de centre x et de rayon r.

1 Fonctions continues

Définition 1

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$, $a \in E$. On dit que f est continue en a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E,\ \|x - a\|_E \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_E \leqslant \varepsilon.$$

Si A est une partie de E, on dit que f est continue sur A si elle l'est en tout point de A.

Proposition 2

Si f est continue en ℓ, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$, alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.

Remarque 3

La réciproque est vraie mais moins utile et plus compliquée à démontrer : si pour toute suite d'éléments $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$, on a $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$, alors f est continue en ℓ.

Définition 4

Une application $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ est dite lipschitzienne s'il existe $K > 0$ tel que pour tous x et y dans E, $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant K \|x - y\|_E$.

Proposition 5

1. Une application lipschitzienne est continue.
2. Si $f : E \to F$ est une **application linéaire**, on a les équivalences :
   (a) f est continue sur E
   (b) f est continue en 0
   (c) f est bornée sur $B_f(0,1)$
   (d) $\exists K > 0,\ \forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant K \|x\|_E$.

Exemple 6

1. Attention, si f est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on peut très bien avoir : pour tout x, $y \mapsto f(x,y)$ est continue, pour tout y, $x \mapsto f(x,y)$ continue mais f n'est pas continue en 0. Exemple de la fonction
$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$$
2. Continuité (ou non) de l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{R}_n[X]$, sur $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 7

Soit E un espace de **dimension finie**, F un espace vectoriel

1. Toute application linéaire de E dans F est continue.
2. Toute application bilinéaire/multilinéaire de E^k dans F est continue.
3. Toute application **polynomiale** de E dans $\mathbb{R}$ est continue.

Remarque 8

1. Il faut bien comprendre ce que « polynomiale » signifie. Une application f de E dans $\mathbb{K}$ est dite polynomiale si, étant donnée une base $\mathscr{B}$ de E fixée, alors la quantité $f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n)$ est une combinaison linéaire de produits de la forme $x_1^{p_1}x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n}$.
2. L'exemple à **toujours** avoir en tête est le **déterminant**, qui est polynomial en les coefficients de la matrice, donc est continu de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

Remarque 9

En sup, on a un très beau théorème sur les fonctions continues : le théorème des bornes atteintes. Ce que l'on va faire dans la suite a pour but d'arriver à ce théorème.

2 Ouverts, fermés

Définition 10

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie de E.

1. A est dite ouverte si
$$\forall a \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset A.$$
2. A est dite fermée si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments $\boxed{\text{de } A}$ convergeant vers $\boxed{\ell \in E}$, on a en fait $\boxed{\ell \in A}$.

Remarque 11

1. Il faut retenir que
   - dans un ouvert, on a toujours un peu de place pour bouger dans toutes les directions,
   - un fermé est stable par passage à la limite.
2. *Il faut qu'une porte soit ouverte ou fermée*, mais **ce n'est pas le cas pour les ensembles !** Dans $\mathbb{R}$, par exemple,
   - $\mathbb{R}$ est à la fois ouvert et fermé !
   - $[0,1[$ n'est **ni ouvert, ni fermé**.

Proposition 12

Une boule ouverte est ouverte, une boule fermée est fermée.

Proposition 13

1. Le complémentaire d'un ouvert est fermé ; le complémentaire d'un fermé est ouvert.
2. Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte ; une intersection finie d'ouverts est ouverte.
3. Une intersection quelconque de fermés est fermée ; une réunion finie de fermés est fermée.

Remarque 14

Lorsqu'on a une partie qui n'est ni ouverte, ni fermée, par exemple $A = [0,1[$, on veut pouvoir donner un statut particulier à $]0,1[$ et à $[0,1]$, le premier étant le plus grand ouvert de A, le second étant le plus petit fermé contenant A.

Définition 15

Soit A une partie d'un evn E.

1. a est dit intérieur à A s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset A$.
2. (def HP) L'intérieur de A, noté $\overset{\circ}{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à A.
3. On peut reformuler alors « A est ouvert » en « l'intérieur de A est égal à A ».

Définition 16

Soit A une partie d'un evn E. Soit $b \in E$.

1. b est dit adhérent à A s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.
2. L'adhérence de A est l'ensemble des points adhérents à A. On la note $\overline{A}$.
3. On peut reformuler alors « A est fermé » en « l'adhérence de A est égale à A ».
4. On dit que A est **dense** dans E si $\overline{A} = E$, c'est-à-dire si

$$\forall x \in E,\ \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Remarque 17

1. Si $f : A \subset E \to F$, on peut élargir la définition de la limite de f en un point de $\overline{A}$.
2. Si on connaît une fonction continue sur une partie dense de E, alors on connaît cette fonction sur tout E.
3. (exo classique) Si $A \subset E$ et $B = E \setminus A$, alors A est d'intérieur vide si et seulement si B est dense.

Proposition 18

1. L'image réciproque d'un ouvert (resp. d'un fermé) par une application continue est un ouvert (resp. un fermé).
2. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une application continue, l'ensemble

$$\{x \in E,\ f(x) > 0\}$$

est un ouvert et les ensembles

$$\{x \in E,\ f(x) = 0\} \text{ et } \{x \in E,\ f(x) \geqslant 0\}$$

sont des fermés.

Théorème 19 (Théorème des bornes atteintes)

Toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.

Exemple 20

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\|\cdot\|$ est une norme sur E, la quantité

$$|||u||| = \sup_{x\in B_f(0,1)} \|u(x)\| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

est bien définie et est une norme sur $\mathscr{L}(E)$. Dans le cas où E est euclidien, $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne et u est autoadjoint, $|||u||| = \max\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$.