TD 14
Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 1. *Mines 24*. Soient $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. On note, pour $f \in E$, $N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$.

1. Montrer que N_φ est une norme si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide.
2. Montrer que N_φ et $\|\|_\infty$ sont équivalentes si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est vide.

Exercice 2. *Mines 24*. Soit E l'ensemble des applications lipschitzienne de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note $K(f) = \inf\left\{k \in \mathbb{R}^+, f \text{ est } k\text{-lipshitzienne }\right\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que, pour tout $f \in E$, f est $K(f)$-lipschitzienne.
3. Montrer que toute fonction polynomiale P appartient à E et déterminer $K(P)$.
4. L'application $f \mapsto K(f)$ est-elle une norme sur E ? Si ce n'est pas le cas, quels axiomes d'une norme vérifie-t-elle/ne vérifie-t-elle pas ?
5. Prouver que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leqslant \inf\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| + K(f)$.
6. L'application $f \mapsto \dfrac{K(f)}{\|f\|_\infty}$ est-elle bornée sur $E\backslash\{0\}$?

Exercice 3. *Mines PC 24*. Les parties $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2(x-1)(x-3) + y^2\left(y^2-4\right) = 0\right\}$ et $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 - y(y-1) = 0\right\}$ sont elles fermées ? bornées ?

Exercice 4. *Centrale PC 24*. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice T est-elle diagonalisable ?
2. La matrice T est-elle la limite d'une suite de matrices diagonalisables ?
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $c > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geqslant |\mathfrak{Im}(z)|^n$.
4. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} A$. Montrer que A est trigonalisable.

Exercice 5. *Mines-Télécom 23*.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire, de degré n. Montrer que P est scindé si et seulement si pour tout z dans $\mathbb{C}$,
$$|P(z)| \geqslant |\mathfrak{Im}(z)|^n.$$
2. Montrer que l'ensemble des matrices trigonalisables est une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6. *Mines PC 24*. Soit E un espace euclidien. Soit $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ et un ouvert Ω dense dans E tels que $\forall x \in \Omega, \dfrac{\left\|u^{k+1}(x)\right\|}{\|u^k(x)\|} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} m$.

Exercice 7. *Mines PC 24*.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que $F_A = \{Q(A); Q \in \mathbb{C}[X]\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
2. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On suppose que B a n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = Q(A)$.
3. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que $E_Q = \{Q(A); A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\}$ est une partie dense de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Cet ensemble est-il borné ? Est-il fermé pour $Q(X) = X$? Pour $Q(X) = X^2$?
On peut chercher à savoir pour quels Q cet ensemble est fermé mais la question est délicate.

Exercice 8. *Mines PC 22*. Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. On note B la boule unité fermée de E.

1. Montrer que B est fermée, bornée, convexe, symétrique par rapport à 0 et que 0 est intérieur à B.

2. Soit K une partie fermée, bornée, convexe, symétrique par rapport à 0 et contenant 0 dans son intérieur. On note $J : E \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \inf\left\{r > 0, \frac{x}{r} \in K\right\}$. Montrer que J est bien définie, que c'est une norme sur E et que K est la boule unité pour J.
On aura intérêt à montrer que cet inf *est en fait un* min.

Exercice 9. *Centrale 23*. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[-1,1]} |f(t)|$.

1. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Montrer qu'on a les équivalences :

- φ est continue sur E,
- φ est continue en 0_E,
- $\exists M > 0,\ \forall f \in E,\ |\varphi(f)| \leqslant M\,\|f\|_\infty$.

On considère l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = \int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t - \int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t$$

2. Démontrer que φ est continue sur E.

3. Déterminer $M = \sup\{|\varphi(f)| \in \mathbb{R} \mid f \in E, \|f\|_\infty = 1\}$.

Exercice 10. *Mines 22*. Soient E un evn et F un sev de E.

1. Montrez que l'adhérence de F est un sev de E.

2. Lorsque F est un hyperplan, démontrer que ou bien F est fermé, ou bien F est dense dans E. Que se passe-t-il en dimension finie ?

3. Dans $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on considère l'hyperplan H des fonctions $f \in E$ vérifiant $f(0) = 0$. On note, pour $f \in E$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

Démontrer que H est fermé pour la première norme et dense pour la seconde.