TD 14
Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 1. *Mines 24*. Soient $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. On note, pour $f \in E$, $N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$.

1. Montrer que N_φ est une norme si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide.

Correction

Déjà, on remarque que quelle que soit la fonction φ, la positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire viennent directement de la positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On va donc montrer que N_φ vérifie la propriété de séparation si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide.

- supposons que $\varphi^{-1}(\{0\})$ soit d'intérieur vide. Soit $f \in E$ vérifiant $N_\varphi(f) = 0$. Alors pour tout x dans $[0,1]$, $f(x)\varphi(x) = 0$, donc, si on note $B = [0,1] \setminus \varphi^{-1}(\{0\})$, pour tout x dans B, $f(x) = 0$.
  Mais $\varphi^{-1}(x)$ est d'intérieur vide donc B est dense (dans $[0,1]$).
  Comme f est continue sur $[0,1]$ et est nulle sur une partie dense, elle est nulle sur tout $[0,1]$.
  Ainsi, N_φ vérifie aussi l'axiome de séparation et est donc une norme sur E.
- supposons que $A = \varphi^{-1}(\{0\})$ ne soit pas d'intérieur vide : cela signifie que l'on dispose de $x_0 \in A$, de $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset A$. Si on prend alors f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur $[0,1] \setminus [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ mais non nulle sur $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ (par exemple, en étant affine par morceaux et valant 1 en x_0), on a $N_\varphi(f) = 0$ mais f n'est pas la fonction nulle. Ainsi, N_φ n'est pas une norme.

2. Montrer que N_φ et $\|\|_\infty$ sont équivalentes si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est vide.

Correction

C'est une question délicate !

- si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est vide, alors φ est une fonction **continue** sur le **segment** $[0,1]$, donc elle y est bornée et atteint ses bornes. Comme, de plus, φ ne s'annule pas, on sait que l'on dispose de $m > 0$ et de $M > 0$ tels que pour tout x dans $[0,1]$, $m \leqslant |\varphi(x)| \leqslant M$. Alors, pour tout f dans E,
  $$m\,\|f\|_\infty \leqslant N_\varphi(f) \leqslant M\,\|f\|_\infty\,,$$
  ce qui signifie exactement que N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.
- si φ s'annule en un point $a \in [0,1]$, on va trouver un contre-exemple à l'équivalence des normes. Déjà, on sait que φ est bornée sur $[0,1]$ donc on dispose de $M > 0$ tel que pour tout x dans $[0,1]$, $|\varphi(x)| \leqslant M$. Ainsi, on a immédiatement : $N_\varphi(f) \leqslant M\,\|f\|_\infty$ pour tout f dans E.
  On va donc trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $N_\varphi(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais pas $\|f_n\|_\infty$. On considère, pour n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n affine par morceaux, faisant un petit triangle autour de a. Plus précisément, on pose f_n affine par morceaux telle que
  $$f_n(0) = 0,\ f_n\left(a - \frac{1}{n}\right) = 0,\ f_n(a) = 1,\ f_n\left(a + \frac{1}{n}\right) = 0,\ f_n(1) = 0.$$
  Alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = 1$. Mais pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, et x dans $[0,1]$,
  $$|f_n(x)\varphi(x)| \leqslant \max_{t\in B_n} |\varphi(t)|,$$

en notant $B_n = \left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right]$. Mais, par continuité de φ en a, on sait que $\max_{t \in B_n} |\varphi(t)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,

$$N_\varphi(f_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \|f_n\|_\infty = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Les normes N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 2. *Mines 24*. Soit E l'ensemble des applications lipschitzienne de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note $K(f) = \inf\left\{k \in \mathbb{R}^+, f \text{ est } k\text{-lipshitzienne }\right\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.

Correction

On montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[0,1]}$. Déjà, la fonction nulle est clairement lipschizienne.
Soient f et g deux applications lipschitziennes. On dispose donc de k et ℓ dans $\mathbb{R}$ tels que pour tous x et y dans $[0,1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| \text{ et } |g(x) - g(y)| \leqslant \ell|x - y|.$$

Soient λ et μ deux réels. Alors, pour tous x et y dans $[0,1]$,

$$\begin{aligned} |(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(y)| &\leqslant |\lambda|.|f(x) - f(y)| + |\mu|.|g(x) - g(y)| \\ &\leqslant (|\lambda|k + |\mu|\ell)|x - y|, \end{aligned}$$

donc $\lambda f + \mu g$ est lipschitzienne.

2. Montrer que, pour tout $f \in E$, f est $K(f)$-lipschitzienne.

Correction

Il faut déjà comprendre la question, c'est-à-dire se rendre compte que l'on veut passer d'un inf à un min.
Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on dispose d'une suite de réels positifs $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $k_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} K(f)$ et telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, f est k_n-lipschitzienne. Soient x et y dans $[0,1]$. Alors pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k_n|x - y|.$$

Soit en faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit, par passage à la limite dans les inégalités larges, que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K(f)|x - y|,$$

donc f est $K(f)$-lipschitzienne.

3. Montrer que toute fonction polynomiale P appartient à E et déterminer $K(P)$.

Correction

On peut tout à fait faire les choses à la main en montrant que les monômes sont bien dans E mais on va faire mieux en révisant nos théorèmes de sup.

La fonction P est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, donc P' est continue sur le segment $[0,1]$ donc, d'après le théorème des bornes atteintes, $|P'|$ atteint son maximum $\|P'\|_\infty$ sur $[0,1]$. Mais, d'après le théorème des accroissements finis, on en déduit que pour tous x et y dans $[0,1]$,

$$|P(x) - P(y)| \leqslant \|P'\|_\infty |x-y|.$$

On montre alors que $K(P) = \|P'\|_\infty$. Soit k dans $\mathbb{R}_+$ tel que pour tous x et y dans $[0,1]$,

$$|P(x) - P(y)| \leqslant k|x-y|.$$

Alors, en supposant $x \neq y$, $\left|\dfrac{P(x)-P(y)}{x-y}\right| \leqslant k$, donc, en faisant tendre y vers x, on démontre que $|P'(x)| \leqslant k$. Ainsi, pour tout x dans $[0,1]$, $|P'(x)| \leqslant k$. On en déduit que $\|P'\|_\infty \leqslant k$, donc $K(P) = \|P'\|_\infty$.

4. L'application $f \mapsto K(f)$ est-elle une norme sur E ? Si ce n'est pas le cas, quels axiomes d'une norme vérifie-t-elle/ne vérifie-t-elle pas ?

Correction

L'application K n'est pas une norme car elle ne satisfait pas l'axiome de séparation : pour toute fonction f constante, $K(f) = 0$. Cependant :

- K est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,
- Si $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, non nul, alors pour tous x et y,

  $$|\lambda f(x) - \lambda f(y)| \leqslant |\lambda|.K(f)|x-y|,$$

  donc $K(\lambda f) \leqslant |\lambda|.K(f)$. Ensuite, en remarquant que $f = \dfrac{1}{\lambda}\lambda f$, on montre que $K(f) \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|}K(\lambda f)$. On en déduit donc l'homogénéité.
- Si f et g sont dans E,

  $$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leqslant (K(f) + K(g)).|x-y|,$$

  donc $K(f+g) \leqslant K(f) + K(g)$.

5. Prouver que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leqslant \inf\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| + K(f)$.

Correction

Soit $f \in E$. Alors f est lipschitzienne donc continue sur le segment $[0,1]$ donc, d'après le théorème des bornes atteintes, elle est bornée sur $[0,1]$ et atteint ses bornes. Notons a un point de $[0,1]$ tel que $|f(a)| = \inf\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Soit $x \in [0,1]$. Alors

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |f(x) - f(a) + f(a)| \\ &\leqslant |f(x) - f(a)| + |f(a)| \\ &\leqslant K(f)|x-a| + |f(a)| \\ &\leqslant K(f) + \inf_{t\in[0,1]} |f(t)|\end{aligned}$$

6. L'application $f \mapsto \dfrac{K(f)}{\|f\|_\infty}$ est-elle bornée sur $E\backslash\{0\}$?

Correction

La réponse à cette question est non et la question sur les polynômes peut nous aider. Notons $f_n : x \mapsto x^n$. Alors on sait que $K(f) = \|f'\|_\infty = n$. Donc

$$\frac{K(f)}{\|f\|_\infty} = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc cette application n'est pas bornée sur $E \setminus \{0\}$.

Exercice 3. *Mines PC 24*. Les parties $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2(x-1)(x-3) + y^2\left(y^2-4\right) = 0\right\}$ et $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 - y(y-1) = 0\right\}$ sont elles fermées ? bornées ?

Correction

Caractère fermé. On note

$$f : \left|\begin{array}{c}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2(x-1)(x-3) + y^2\left(y^2-4\right)\end{array}\right. \quad \text{et } g : \left|\begin{array}{c}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto 2x^2 - y(y-1)\end{array}\right. .$$

Alors f et g sont **polynomiales donc continues**. Ainsi, $E = f^{-1}(\{0\})$ et $F = g^{-1}(\{0\})$ sont fermées (un singleton est bien sûr un fermé !).

Caractère borné. L'ensemble E a l'air borné : l'idée est que, quand x et y sont grands, $f(x,y)$ ressemble à $x^4 + y^4$, qui a peu de chances de s'annuler.
Plus précisément, pour (x,y) vérifiant $|x| \geqslant 4$ et $|y| \geqslant 5$, alors

$$f(x,y) \geqslant 3 \times 16 + 25 \geqslant 1,$$

donc f ne s'annule pas en-dehors du rectangle $[-4,4] \times [-5,5]$. Ainsi, $E \subset [-4,4] \times [-5,5]$ et est donc bornée.
En revanche, F n'a pas l'air bornée à cause du signe $-$. Plus précisément, on remarque que si l'on prend $y_n = n \in \mathbb{N}^*$ et $x_n = \sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}$, alors $u_n = (x_n, y_n) \in F$ mais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Exercice 4. *Centrale PC 24*. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice T est-elle diagonalisable ?

Correction

La matrice T ne possède que 1 comme valeur propre et n'est pas égale à I_3 donc n'est pas semblable à I_3, donc n'est pas diagonalisable.

2. La matrice T est-elle la limite d'une suite de matrices diagonalisables ?

Correction

La matrice T est, en revanche, la limite de la suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ T_k = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{1}{k} & 2 & 3 \\ 0 & 1+\dfrac{2}{k} & 2 \\ 0 & 0 & 1+\dfrac{3}{k} \end{pmatrix}$$

Or, T_k possède trois valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable. Ainsi, T est bien la limite d'une suite de matrices diagonalisables.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $c > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geqslant |\mathfrak{Im}(z)|^n$.

Correction

Raisonnons par double implication.

- déjà, si P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, alors il admet une racine $\omega \notin \mathbb{R}$, pour laquelle $P(\omega) = 0$ et pourtant $|\mathfrak{Im}(\omega)| \neq 0$.
- ensuite, si P est scindé sur $\mathbb{R}$, on écrit $P(z) = \prod_{k=1}^{r}(z-\alpha_k)^{m_k}$. Alors pour $z \in \mathbb{C}$,

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^{r} |z-\alpha_k|^{m_k}.$$

Mais $|z-\alpha_k| = \sqrt{(\mathfrak{Re}(z)-\alpha_k)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2} \geqslant |\mathfrak{Im}(z)|$, car $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$|P(z)| \geqslant \prod_{k=1}^{r} |\mathfrak{Im}(z)|^{m_k} = |\mathfrak{Im}(z)|^n,$$

car $\sum_{k=1}^{r} m_k = n$.

L'équivalence est ainsi établie.

4. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$. Montrer que A est trigonalisable.

Correction

Pour tout k, A_k est diagonalisable donc trigonalisable. Notons χ_{A_k} le polynôme caractéristique de A_k. Comme le déterminant est une application polynomiale, on en déduit que pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$\chi_{A_k}(z) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_A(z).$$

Or, pour tout k dans $\mathbb{N}$, χ_{A_k} est scindé et unitaire de degré n, donc pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$|\chi_{A_k}(z)| \geqslant |\mathfrak{Im}(z)|^n$$

Par passage à la limite dans les inégalités larges et continuité du module,

$$|\chi_A(z)| \geqslant |\mathfrak{Im}(z)|^n,$$

ce qui signifie que χ_A est scindé, donc que A est bien trigonalisable.

Exercice 5. *Mines-Télécom 23.* **1.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire, de degré n. Montrer que P est scindé si et seulement si pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$|P(z)| \geqslant |\mathfrak{Im}(z)|^n.$$

Correction

Raisonnons par double implication.

- déjà, si P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, alors il admet une racine $\omega \notin \mathbb{R}$, pour laquelle $P(\omega) = 0$ et pourtant $|\mathfrak{Im}(\omega)| \neq 0$.
- ensuite, si P est scindé sur $\mathbb{R}$, on écrit $P(z) = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(z-\alpha_k)^{m_k}$. Alors pour $z \in \mathbb{C}$,

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^{r} |z-\alpha_k|^{m_k}.$$

Mais $|z-\alpha_k| = \sqrt{(\mathfrak{Re}(z)-\alpha_k)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2} \geqslant |\mathfrak{Im}(z)|$, car $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$|P(z)| \geqslant \prod_{k=1}^{r} |\mathfrak{Im}(z)|^{m_k} = |\mathfrak{Im}(z)|^n,$$

car $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} m_k = n$.

L'équivalence est ainsi établie.

2. Montrer que l'ensemble des matrices trigonalisables est une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de matrices trigonalisables convergeant vers $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Notons χ_{A_k} le polynôme caractéristique de A_k. Comme le déterminant est une application polynomiale, on en déduit que pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$\chi_{A_k}(z) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_A(z).$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Or, pour tout k dans $\mathbb{N}$, χ_{A_k} est scindé et unitaire de degré n, donc pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$|\chi_{A_k}(z)| \geqslant |\mathfrak{Im}(z)|^n$$

Par passage à la limite dans les inégalités larges et continuité du module,

$$|\chi_A(z)| \geqslant |\mathfrak{Im}(z)|^n,$$

ce qui signifie que χ_A est scindé, donc que A est bien trigonalisable.

Exercice 6. *Mines PC 24*. Soit E un espace euclidien. Soit $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ et un ouvert Ω dense dans E tels que $\forall x \in \Omega$, $\dfrac{\left\|u^{k+1}(x)\right\|}{\|u^k(x)\|} \xrightarrow[k\to+\infty]{} m$.

Correction

C'est un exercice délicat.
On considère $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de vecteurs propres de u (qui existe par le théorème spectral), $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres **ordonnées** associées. Si $x \in E$, on écrit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i$.
On note

$$m = \max\{i \in [\![1, n]\!],\ x_i \neq 0\}.$$

On note enfin $r \in [\![1, m]\!]$ l'unique entier tel que

$$\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_{r-1} < \lambda_r \leqslant \dots \leqslant \lambda_m.$$

En d'autres termes, toutes les valeurs propres de la r-ième à la m-ième sont les mêmes, et sont strictement plus grandes que celles d'avant. On peut alors écrire, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left\|u^k(x)\right\|^2 &= \sum_{i=1}^m x_i^2\lambda_i^k \\ &\underset{k\to+\infty}{\sim} \sum_{i=r}^m x_i^2\lambda_i^k \\ &\underset{k\to+\infty}{\sim} \lambda_m^k \sum_{i=r}^m x_i^2.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\left\|u^{k+1}(x)\right\|}{\|u^k(x)\|} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda_m^{k+1}\sqrt{\sum_{i=r}^m x_i^2}}{\lambda_m^k\sqrt{\sum_{i=r}^m x_i^2}} = \lambda_m.$$

En particulier, si $x_n \neq 0$, alors $\dfrac{\left\|u^{k+1}(x)\right\|}{\|u^k(x)\|} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \lambda_n$.
On note alors

$$\Omega = \{x = \sum_{i=1}^n x_i e_i,\ x_n \neq 0\}.$$

Or,

$$E \setminus \Omega = \{x \in E,\ \langle x, e_n\rangle = 0\},$$

donc $E \setminus \Omega$ est un sous-espace vectoriel strict d'un espace de dimension finie donc est fermé, d'intérieur vide, donc Ω est un ouvert dense.

Autre manière de dire que Ω est un ouvert dense.

- $\varphi : x \mapsto \langle x, e_n \rangle$ est une forme linéaire donc est continue (car E est de dimension finie) donc $E \setminus \Omega = \varphi^{-1}(\{0_{\mathbb{R}}\})$ est fermé.
- si $x \in E$, alors ou bien $x \in \Omega$ et c'est gagné, ou bien $x \notin \Omega$ et $y_k = x + \dfrac{1}{k} e_n \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} x$ et $y_k \in \Omega$. Donc Ω est bien dense dans E.

Exercice 7. *Mines PC 24*.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que $F_A = \{Q(A); Q \in \mathbb{C}[X]\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Correction

On peut remarquer que l'application $Q \mapsto Q(A)$ est linéaire, donc C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Or, un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est fermé, donc F_A est un fermé de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On suppose que B a n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = Q(A)$.

Correction

On sait que B possède n valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donc B est diagonalisable : on dispose de P inversible telle que

$$B = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Or, Q est dans $\mathbb{C}[X]$, non constant donc Q est surjectif (cela vient du théorème de D'Alembert-Gauss : si $z \in \mathbb{C}$, $Q(X) - z$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$, i.e. l'équation $Q(x) = z$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$ admet au moins une solution).

On pose, pour ß $\in [\![1, n]\!]$, α_i un antécédent de λ_i par Q. Alors en notant

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} P^{-1},$$

on obtient bien

$$Q(A) = P \begin{pmatrix} Q(\alpha_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & Q(\alpha_n) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = B.$$

3. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que $E_Q = \{Q(A); A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\}$ est une partie dense de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Cet ensemble est-il borné ? Est-il fermé pour $Q(X) = X$? Pour $Q(X) = X^2$?
On peut chercher à savoir pour quels Q cet ensemble est fermé mais la question est délicate.

Correction

Soit $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Alors :

- si B possède deux valeurs propres distinctes, $B \in E_Q$,
- sinon, B possède deux fois la même valeur propre λ, donc, comme B est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, on dispose de $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que
$$B = P \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}.$$
On note
$$B_n = P \begin{pmatrix} \lambda + \dfrac{1}{n} & a \\ 0 & \lambda + \dfrac{2}{n} \end{pmatrix} P^{-1},$$
alors B_n possède deux valeurs propres distinctes donc $B_n \in E_Q$, et $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B$.

On a donc montré que E_Q était dense dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

Ensuite, E_Q n'est pas borné car si A est diagonale, disons $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, alors $Q(A) = \begin{pmatrix} Q(\lambda) & 0 \\ 0 & Q(\mu) \end{pmatrix}$, et Q n'est pas borné sur $\mathbb{C}$.

Enfin, on cherche à savoir si E_Q est fermé. On remarque que par exemple, pour $Q(X) = X$, $E_Q = \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ donc E_Q est bien fermé. En revanche, pour $Q(X) = X^2$, on peut montrer facilement qu'il n'existe pas de matrice A telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc E_Q n'est pas fermé, car E_Q est dense et un ensemble dense est fermé si et seulement si c'est tout l'espace.

Exercice 8. *Mines PC 22*. Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. On note B la boule unité fermée de E.

1. Montrer que B est fermée, bornée, convexe, symétrique par rapport à 0 et que 0 est intérieur à B.

Correction

Démontrons chaque point dans l'ordre :

- on a déjà démontré qu'une boule fermée était fermée.
- par définition, B est bornée car pour tout x dans B, $\|x\| \leqslant 1$.
- ensuite, B est convexe : soient x et y dans B, $t \in [0,1]$. Alors
$$\|(1-t)x + ty\| \leqslant (1-t)\|x\| + t\|y\| \leqslant (1-t).1 + t \leqslant 1,$$
donc $(1-t)x + ty \in B$.
- B est bien symétrique par rapport à 0 car si $\|x\| \leqslant 1$, $\|-x\| \leqslant 1$.
- 0 est bien intérieur à B car $B(0, 1/2) \subset B$.

2. Soit K une partie fermée, bornée, convexe, symétrique par rapport à 0 et contenant 0 dans son intérieur. On note $J : E \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \inf \left\{ r > 0, \dfrac{x}{r} \in K \right\}$. Montrer que J est bien définie, que c'est une norme sur E et que K est la boule unité pour J.
On aura intérêt à montrer que cet inf *est en fait un* min.

Correction

Dans tout le corrigé, on note

$$A_x = \left\{ r > 0, \frac{x}{r} \in K \right\}$$

- on montre déjà que J est bien définie : si $x \in E$, alors A_x est une partie de $\mathbb{R}$, minorée, et non vide. Elle est non vide car, 0 étant intérieur à K, on dispose de ε tel que $B(0, \varepsilon) \subset K$. Mais alors $\dfrac{x}{\frac{\|x\|}{\varepsilon}} \in K$, donc $\dfrac{norx}{\varepsilon} \in A$.

  Donc A admet une borne inférieure, donc $J(x)$ est bien définie.
- on montre un petit peu mieux, que $J(x)$ est en fait un **minimum** et pas un inf. En effet, si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A_x telle que $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} J(x)$, alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\dfrac{x}{r_n} \in K$, et $\dfrac{x}{r_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x}{J(x)}$. Donc $J(x) \in A_x$.
- ensuite, J est bien positive,
- puis on montre l'homogénéité. Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

  On suppose d'abord $\lambda > 0$. Alors par définition, $\dfrac{x}{J(x)} \in K$, donc $\dfrac{\lambda x}{\lambda J(x)} \in K$, donc $\dfrac{1}{\lambda J(x)} \in A_{\lambda x}$, donc $\lambda J(x) \geqslant J(\lambda x)$.

  Ensuite, de même, $\dfrac{\lambda x}{J(\lambda x)} \in K$ donc $\dfrac{x}{\frac{J(\lambda x)}{\lambda}} \in K$, donc $\dfrac{J(\lambda x)}{\lambda} \geqslant J(x)$.

  Finalement, avec ces deux inégalités,

  $$J(\lambda x) = \lambda J(x)$$

  Ensuite, si $\lambda < 0$, vu que K est symétrique, on remarque juste que $J(-x) = J(x)$ et on se ramène au cas précédent.

  Enfin, le cas $\lambda = 0$ est évident car pour tout $r > 0$, $\dfrac{0_E}{r} \in K$, donc $J(0_E) = 0$.
- on montre ensuite la séparation. On suppose que $J(x) = 0$. Alors sait que pour tout $r > 0$, $\dfrac{x}{r} \in K$. Or, K est borné, disons par M (pour tout y dans K, $\|y\| \leqslant M$). Mais alors si $x \neq 0$, pour $r < \dfrac{\|x\|}{M}$, alors $\left\|\dfrac{x}{r}\right\| > M$, donc $x \notin K$. Donc $J(x) \geqslant \dfrac{x}{M}$, ce qui est absurde. Donc $x = 0$.
- enfin, on montre l'inégalité triangulaire. Soient x et y dans E. On sait que

  $$\frac{x}{J(x)} \in K \text{ et } \frac{y}{J(y)} \in K.$$

  Or, K est convexe *et on n'a toujours pas utilisé cette hypothèse !* Comme K est convexe, en posant $t = \dfrac{J(x)}{J(x)+J(y)}$ et $1 - t = \dfrac{J(y)}{J(x)+J(y)}$, alors on sait que $t\dfrac{x}{J(x)} + (1-t)\dfrac{y}{J(y)} \in K$, donc

  $$\frac{J(x)}{J(x)+J(y)}\frac{x}{J(x)} + \frac{J(y)}{J(x)+J(y)}\frac{y}{J(y)} \in K,$$

  c'est-à-dire que $\dfrac{x+y}{J(x)+J(y)} \in K$, donc $J(x) + J(y) \in A_{x+y}$, donc

  $$J(x) + J(y) \geqslant J(x+y),$$

  ce qui est exactement l'inégalité triangulaire.

Enfin, on remarque que, pour $x \in E$,

$$x \in K \Leftrightarrow \frac{x}{1} \in K \Leftrightarrow 1 \in A_x \Leftrightarrow 1 \geqslant J(x),$$

donc K est bien la boule unité fermée de la norme J.
Pour information, on dit que J est une « jauge », d'où la lettre J.

Exercice 9. *Centrale 23*. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)|$.

1. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Montrer qu'on a les équivalences :
- φ est continue sur E,
- φ est continue en 0_E,
- $\exists M > 0,\ \forall f \in E,\ |\varphi(f)| \leqslant M \|f\|_\infty$.

Correction

- Regardons la première implication : si φ est continue sur E, elle est bien sûr continue en 0...
- Ensuite, si φ est continue en 0_E, on dispose de $\delta > 0$ tel que pour tout f vérifiant $\|f\|_\infty \leqslant \delta$, alors $|\varphi(f)| \leqslant 1$. Ainsi, pour tout f de $B_f(0,\delta)$, $|\varphi(f)| \leqslant 1$. Mais donc, si $f \in E \setminus \{0\}$, alors
$$g = \frac{\delta}{\|f\|} f \in B_f(0,\delta),$$
donc $|\varphi(g)| \leqslant 1$, donc
$$|\varphi(f)| \leqslant \frac{\|f\|}{\delta},$$
d'où le résultat avec $M = \dfrac{1}{\delta}$.
- S'il existe $M > 0$ tel que $\forall f \in E,\ |\varphi(f)| \leqslant M \|f\|_\infty$, soient f et g dans E. Alors
$$\begin{aligned} |\varphi(f) - \varphi(g)| &= |\varphi(f-g)| \\ &\leqslant M \|f-g\|, \end{aligned}$$
donc φ est lipschitzienne donc continue.

On considère l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = \int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

2. Démontrer que φ est continue sur E.

Correction

On remarque déjà que φ est linéaire. Soit f dans E. Alors

$$\begin{aligned}|\varphi(f)| &= \left|\int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t - \int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \left|\int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_{-1}^{0} |f(t)|dt + \int_{0}^{1} |f(t)|dt \\ &\leqslant \int_{-1}^{0} \|f\|_\infty \, dt + \int_{0}^{1} \|f\|_\infty \, dt \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty .\end{aligned}$$

Donc, par la question précédente, φ est continue sur E.

3. Déterminer $M = \sup\{|\varphi(f)| \in \mathbb{R} \mid f \in E, \|f\|_\infty = 1\}$.

Correction

C'est beaucoup plus subtil. On peut se demander si c'est 2 : pour que cela soit le cas, il faudrait une fonction f qui soit égale à 1 sur $[-1, 0[$ et à -1 sur $]0, 1]$, ce qui est impossible. On va donc construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions, toutes de norme 1, telle que $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout n et $\varphi(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit

$$f_n : \left| \begin{array}{l} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \left[-1, -\dfrac{1}{n}\right] \\ -nx \text{ si } x \in \left[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right] \\ -1 \text{ si } x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right] \end{cases} \end{array}\right.$$

Alors $\|f_n\|_\infty = 1$ et

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \int_{-1}^{0} f_n(t)dt - \int_{0}^{1} f_n(t)dt \\ &= \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} f_n(t)dt + \int_{-\frac{1}{n}}^{0} f_n(t)dt - \int_{0}^{\frac{1}{n}} f_n(t)dt - \int_{\frac{1}{n}}^{1} f_n(t)dt \\ &= 1 - \frac{1}{n} - n\int_{-\frac{1}{n}}^{0} tdt + n\int_{0}^{\frac{1}{n}} tdt + 1 - \frac{1}{n} \\ &= 2 - \frac{2}{n} + n\frac{1}{2n^2} + n\frac{1}{2n^2} \\ &= 2 - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2,\end{aligned}$$

donc $M = 2$.

Exercice 10. *Mines 22*. Soient E un evn et F un sev de E.

1. Montrez que l'adhérence de F est un sev de E.

Correction

Déjà, $F \subset \overline{F}$ donc $0_E \in \overline{F}$.
Ensuite, soient x et y dans $\overline{F}$, λ et μ dans $\mathbb{K}$. Alors on dispose de deux suites, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telles que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Comme F est un sous-espace vectoriel de E, alors pour tout n dans $\mathbb{N}$ $\lambda x_n + \mu y_n \in F$. Or,

$$\lambda x_n + \mu y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda x + \mu y,$$

donc $\lambda x + \mu y \in \overline{F}$, donc $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Lorsque F est un hyperplan, démontrer que ou bien F est fermé, ou bien F est dense dans E. Que se passe-t-il en dimension finie ?

Correction

Si F est un hyperplan, alors $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant F, donc il y a deux possibilités :

- ou bien $\overline{F} = F$ et F est fermé.
- ou bien il existe $a \notin F$ tel que $a \in \overline{F}$. Mais comme $F \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$ (c'est une des propriétés importantes d'un hyperplan), et que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit que $\overline{F}$ contient $F \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$, donc $\overline{F} = E$, ce qui signifie exactement que $\overline{F}$ est dense dans E.

En dimension finie, on l'a vu dans le cours, un sous-espace vectoriel est toujours fermé.

3. Dans $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on considère l'hyperplan H des fonctions $f \in E$ vérifiant $f(0) = 0$. On note, pour $f \in E$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

Démontrer que H est fermé pour la première norme et dense pour la seconde.

Correction

Montrons déjà que H est fermé pour $\|\cdot\|_\infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ et $f \in E$ telles que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors, en particulier,

$$|f_n(0) - f(0)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $f(0) = 0$. Donc $f \in H$. Donc H est fermé.
Montrons ensuite que H est dense pour $\|\cdot\|_1$. Pour ce faire, étant donnée la question 2, nous allons montrer que H n'est pas fermé. On considère $f_n(x) = 1 - (1-x)^n$. Alors $f_n(0) = 0$ et, si l'on note $u : x \mapsto 1$, alors

$$\|f_n - u\|_1 = \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de H qui converge pour la norme $\|\cdot\|_1$ vers une fonction qui n'est pas dans H. Donc H n'est pas fermé, donc il est dense pour $\|\cdot\|_1$.