TD 14

Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 1. Mines-Telecom 22. Étudier la continuité en $(0, 0)$ de chacune des fonctions suivantes, toutes supposées nulles en $(0, 0)$. Elles sont définies pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ respectivement par :

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, h(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2 + xy}$$

Correction

Étude de f . On écrit que

$$\left| \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \right| = x^2 \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq x^2 \frac{\frac{x^2 + y^2}{2}}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2}{2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0.$$

Donc f est continue en $(0, 0)$.

Étude de g . On remarque que $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$ mais que

$$g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \neq 0,$$

donc g n'est pas continue en $(0, 0)$.

Étude de h . On majore

$$\begin{aligned} |h(x, y)| &= x^2 \left| \frac{xy}{x^2 + y^2 + xy} \right| \\ &\leq x^2 \frac{|xy|}{x^2 + y^2 - |xy|} \end{aligned}$$

Ensuite, soyons soigneux sur les majorations :

$$|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2},$$

donc

$$x^2 + y^2 - |xy| \geq \frac{x^2 + y^2}{2} > 0,$$

donc

$$\frac{1}{x^2 + y^2 - |xy|} \leq \frac{2}{x^2 + y^2}$$

Donc

$$|h(x, y)| \leq x^2 \frac{x^2 + y^2}{2} \times \frac{2}{x^2 + y^2} \leq x^2 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0,$$

donc h est continue en $(0, 0)$.

Exercice 2. Mines 24. Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. On note, pour $f \in E$, $N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$.

1. Montrer que N_φ est une norme si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide.

Correction

Déjà, on remarque que quelle que soit la fonction φ , la positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire viennent directement de la positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On va donc montrer que N_φ vérifie la propriété de séparation si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide.

- supposons que $\varphi^{-1}(\{0\})$ soit d'intérieur vide. Soit $f \in E$ vérifiant $N_\varphi(f) = 0$. Alors pour tout x dans $[0, 1]$, $f(x)\varphi(x) = 0$, donc, si on note $B = [0, 1] \setminus \varphi^{-1}(\{0\})$, pour tout x dans B , $f(x) = 0$.

Mais $\varphi^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide donc B est dense (dans $[0, 1]$).

Comme f est continue sur $[0, 1]$ et est nulle sur une partie dense, elle est nulle sur tout $[0, 1]$.

Ainsi, N_φ vérifie aussi l'axiome de séparation et est donc une norme sur E .

- supposons que $A = \varphi^{-1}(\{0\})$ ne soit pas d'intérieur vide : cela signifie que l'on dispose de $x_0 \in A$, de $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset A$. Si on prend alors f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur $[0, 1] \setminus [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ mais non nulle sur $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ (par exemple, en étant affine par morceaux et valant 1 en x_0), on a $N_\varphi(f) = 0$ mais f n'est pas la fonction nulle. Ainsi, N_φ n'est pas une norme.

2. Montrer que N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est vide.

Correction

C'est une question délicate !

- si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est vide, alors φ est une fonction **continue** sur le **segment** $[0, 1]$, donc elle y est bornée et atteint ses bornes. Comme, de plus, φ ne s'annule pas, on sait que l'on dispose de $m > 0$ et de $M > 0$ tels que pour tout x dans $[0, 1]$, $m \leq |\varphi(x)| \leq M$. Alors, pour tout f dans E ,

$$m \|f\|_\infty \leq N_\varphi(f) \leq M \|f\|_\infty,$$

ce qui signifie exactement que N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

- si φ s'annule en un point $a \in [0, 1]$, on va trouver un contre-exemple à l'équivalence des normes. Déjà, on sait que φ est bornée sur $[0, 1]$ donc on dispose de $M > 0$ tel que pour tout x dans $[0, 1]$, $|\varphi(x)| \leq M$. Ainsi, on a immédiatement : $N_\varphi(f) \leq M \|f\|_\infty$ pour tout f dans E .

On va donc trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $N_\varphi(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ mais pas $\|f_n\|_\infty$. On considère, pour n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n affine par morceaux, faisant un petit triangle autour de a . Plus précisément, on pose f_n affine par morceaux telle que

$$f_n(0) = 0, \quad f_n\left(a - \frac{1}{n}\right) = 0, \quad f_n(a) = 1, \quad f_n\left(a + \frac{1}{n}\right) = 0, \quad f_n(1) = 0.$$

Alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = 1$. Mais pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, et x dans $[0, 1]$,

$$|f_n(x)\varphi(x)| \leq \max_{t \in B_n} |\varphi(t)|,$$

en notant $B_n = \left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right]$. Mais, par continuité de φ en a , on sait que

$$\max_{t \in B_n} |\varphi(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \text{ Ainsi,}$$

$$N_\varphi(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \|f_n\|_\infty = 1 \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Les normes N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 3. Mines 24. Soit E l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note $K(f) = \inf \{k \in \mathbb{R}^+, f \text{ est } k\text{-lipschitziennes}\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.

Correction

On montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[0,1]}$. Déjà, la fonction nulle est clairement lipschitzienne.

Soient f et g deux applications lipschitziennes. On dispose donc de k et ℓ dans $\mathbb{R}$ tels que pour tous x et y dans $[0, 1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \text{ et } |g(x) - g(y)| \leq \ell|x - y|.$$

Soient λ et μ deux réels. Alors, pour tous x et y dans $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} |(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(y)| &\leq |\lambda| \cdot |f(x) - f(y)| + |\mu| \cdot |g(x) - g(y)| \\ &\leq (|\lambda|k + |\mu|\ell)|x - y|, \end{aligned}$$

donc $\lambda f + \mu g$ est lipschitzienne.

2. Montrer que, pour tout $f \in E$, f est $K(f)$ -lipschitzienne.

Correction

Il faut déjà comprendre la question, c'est-à-dire se rendre compte que l'on veut passer d'un inf à un min.

Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on dispose d'une suite de réels positifs $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $k_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} K(f)$ et telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, f est k_n -lipschitzienne. Soient x et y dans $[0, 1]$. Alors pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k_n|x - y|.$$

Soit en faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit, par passage à la limite dans les inégalités larges, que

$$|f(x) - f(y)| \leq K(f)|x - y|,$$

donc f est $K(f)$ -lipschitzienne.

3. Montrer que toute fonction polynomiale P appartient à E et déterminer $K(P)$.

Correction

On peut tout à fait faire les choses à la main en montrant que les monômes sont bien dans E mais on va faire mieux en révisant nos théorèmes de sup.

La fonction P est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, donc P' est continue sur le segment $[0, 1]$ donc, d'après le théorème des bornes atteintes, $|P'|$ atteint son maximum $\|P'\|_\infty$ sur $[0, 1]$.

Mais, d'après le théorème des accroissements finis, on en déduit que pour tous x et y dans $[0, 1]$,

$$|P(x) - P(y)| \leq \|P'\|_\infty |x - y|.$$

On montre alors que $K(P) = \|P'\|_\infty$. Soit k dans $\mathbb{R}_+$ tel que pour tous x et y dans $[0, 1]$,

$$|P(x) - P(y)| \leq k|x - y|.$$

Alors, en supposant $x \neq y$, $\left| \frac{P(x) - P(y)}{x - y} \right| \leq k$, donc, en faisant tendre y vers x , on démontre que $|P'(x)| \leq k$. Ainsi, pour tout x dans $[0, 1]$, $|P'(x)| \leq k$. On en déduit que $\|P'\|_\infty \leq k$, donc $K(P) = \|P'\|_\infty$.

4. L'application $f \mapsto K(f)$ est-elle une norme sur E ? Si ce n'est pas le cas, quels axiomes d'une norme vérifie-t-elle/ne vérifie-t-elle pas?

Correction

L'application K n'est pas une norme car elle ne satisfait pas l'axiome de séparation : pour toute fonction f constante, $K(f) = 0$. Cependant :

- K est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,
- Si $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, non nul, alors pour tous x et y ,

$$|\lambda f(x) - \lambda f(y)| \leq |\lambda| \cdot K(f) |x - y|,$$

donc $K(\lambda f) \leq |\lambda| \cdot K(f)$. Ensuite, en remarquant que $f = \frac{1}{\lambda} \lambda f$, on montre que $K(f) \leq \frac{1}{|\lambda|} K(\lambda f)$. On en déduit donc l'homogénéité.

- Si f et g sont dans E ,

$$|(f + g)(x) - (f + g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq (K(f) + K(g)) \cdot |x - y|,$$

donc $K(f + g) \leq K(f) + K(g)$.

5. Prouver que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq \inf_{x \in [0,1]} |f(x)| + K(f)$.

Correction

Soit $f \in E$. Alors f est lipschitzienne donc continue sur le segment $[0, 1]$ donc, d'après le théorème des bornes atteintes, elle est bornée sur $[0, 1]$ et atteint ses bornes. Notons a un point de $[0, 1]$ tel que $|f(a)| = \inf_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

Soit $x \in [0, 1]$. Alors

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(a) + f(a)| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \\ &\leq K(f)|x - a| + |f(a)| \\ &\leq K(f) + \inf_{t \in [0,1]} |f(t)| \end{aligned}$$

6. L'application $f \mapsto \frac{K(f)}{\|f\|_\infty}$ est-elle bornée sur $E \setminus \{0\}$?

Correction

La réponse à cette question est non et la question sur les polynômes peut nous aider. Notons $f_n : x \mapsto x^n$. Alors on sait que $K(f) = \|f'\|_\infty = n$. Donc

$$\frac{K(f)}{\|f\|_\infty} = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc cette application n'est pas bornée sur $E \setminus \{0\}$.

Exercice 4. Mines PC 24. Les parties $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2(x-1)(x-3) + y^2(y^2-4) = 0\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 - y(y-1) = 0\}$ sont elles fermées ? bornées ?

Correction

Caractère fermé. On note

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2(x-1)(x-3) + y^2(y^2-4) \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 2x^2 - y(y-1) \end{cases}.$$

Alors f et g sont **polynomiales donc continues**. Ainsi, $E = f^{-1}(\{0\})$ et $F = g^{-1}(\{0\})$ sont fermées (un singleton est bien sûr un fermé!).

Caractère borné. L'ensemble E a l'air borné : l'idée est que, quand x et y sont grands, $f(x, y)$ ressemble à $x^4 + y^4$, qui a peu de chances de s'annuler. Plus précisément, pour (x, y) vérifiant $|x| \geq 4$ et $|y| \geq 5$, alors

$$f(x, y) \geq 3 \times 16 + 25 \geq 1,$$

donc f ne s'annule pas en-dehors du rectangle $[-4, 4] \times [-5, 5]$. Ainsi, $E \subset [-4, 4] \times [-5, 5]$ et est donc bornée.

En revanche, F n'a pas l'air bornée à cause du signe $-$. Plus précisément, on remarque que si l'on prend $y_n = n \in \mathbb{N}^*$ et $x_n = \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$, alors $u_n = (x_n, y_n) \in F$ mais la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Exercice 5. Centrale PC 24. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice T est-elle diagonalisable ?

Correction

La matrice T ne possède que 1 comme valeur propre et n'est pas égale à I_3 donc n'est pas semblable à I_3 , donc n'est pas diagonalisable.

2. La matrice T est-elle la limite d'une suite de matrices diagonalisables ?

Correction

La matrice T est, en revanche, la limite de la suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, T_k = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{k} & 2 & 3 \\ 0 & 1 + \frac{2}{k} & 2 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{3}{k} \end{pmatrix}$$

Or, T_k possède trois valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable. Ainsi, T est bien la limite d'une suite de matrices diagonalisables.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $c > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\Im(z)|^n$.

Correction

Raisonnons par double implication.

- déjà, si P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, alors il admet une racine $\omega \notin \mathbb{R}$, pour laquelle $P(\omega) = 0$ et pourtant $|\Im(\omega)| \neq 0$.
- ensuite, si P est scindé sur $\mathbb{R}$, on écrit $P(z) = \prod_{k=1}^r (z - \alpha_k)^{m_k}$. Alors pour $z \in \mathbb{C}$,

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^r |z - \alpha_k|^{m_k}.$$

Mais $|z - \alpha_k| = \sqrt{(\Re(z) - \alpha_k)^2 + \Im(z)^2} \geq |\Im(z)|$, car $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$|P(z)| \geq \prod_{k=1}^r |\Im(z)|^{m_k} = |\Im(z)|^n,$$

$$\text{car } \sum_{k=1}^r m_k = n.$$

L'équivalence est ainsi établie.

4. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A$. Montrer que A est trigonalisable.

Correction

Pour tout k , A_k est diagonalisable donc trigonalisable. Notons χ_{A_k} le polynôme caractéristique de A_k . Comme le déterminant est une application polynomiale, on en déduit que pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$\chi_{A_k}(z) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \chi_A(z).$$

Or, pour tout k dans $\mathbb{N}$, χ_{A_k} est scindé et unitaire de degré n , donc pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$|\chi_{A_k}(z)| \geq |\Im(z)|^n$$

Par passage à la limite dans les inégalités larges et continuité du module,

$$|\chi_A(z)| \geq |\Im(z)|^n,$$

ce qui signifie que χ_A est scindé, donc que A est bien trigonalisable.

Exercice 6. Mines-Télécom 23. 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire, de degré n . Montrer que P est scindé si et seulement si pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$|P(z)| \geq |\Im(z)|^n.$$

Correction

Raisonnons par double implication.

- déjà, si P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, alors il admet une racine $\omega \notin \mathbb{R}$, pour laquelle $P(\omega) = 0$ et pourtant $|\Im(\omega)| \neq 0$.

- ensuite, si P est scindé sur $\mathbb{R}$, on écrit $P(z) = \prod_{k=1}^r (z - \alpha_k)^{m_k}$. Alors pour $z \in \mathbb{C}$,

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^r |z - \alpha_k|^{m_k}.$$

Mais $|z - \alpha_k| = \sqrt{(\Re(z) - \alpha_k)^2 + \Im(z)^2} \geq |\Im(z)|$, car $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$|P(z)| \geq \prod_{k=1}^r |\Im(z)|^{m_k} = |\Im(z)|^n,$$

$$\text{car } \sum_{k=1}^r m_k = n.$$

L'équivalence est ainsi établie.

2. Montrer que l'ensemble des matrices trigonalisables est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de matrices trigonalisables convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons χ_{A_k} le polynôme caractéristique de A_k . Comme le déterminant est une application polynomiale, on en déduit que pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$\chi_{A_k}(z) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \chi_A(z).$$

Or, pour tout k dans $\mathbb{N}$, χ_{A_k} est scindé et unitaire de degré n , donc pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$|\chi_{A_k}(z)| \geq |\Im(z)|^n$$

Par passage à la limite dans les inégalités larges et continuité du module,

$$|\chi_A(z)| \geq |\Im(z)|^n,$$

ce qui signifie que χ_A est scindé, donc que A est bien trigonalisable.

Exercice 7. Mines PC 24. Soit E un espace euclidien. Soit $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ et un ouvert Ω dense dans E tels que $\forall x \in \Omega, \frac{\|u^{k+1}(x)\|}{\|u^k(x)\|} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} m$.

Correction

C'est un exercice délicat.

On considère $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de vecteurs propres de u (qui existe par le théorème spectral), $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres **ordonnées** associées. Si $x \in E$, on écrit $x =$

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

On note

$$m = \max\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \neq 0\}.$$

On note enfin $r \in \llbracket 1, m \rrbracket$ l'unique entier tel que

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{r-1} < \lambda_r \leq \dots \leq \lambda_m.$$

En d'autres termes, toutes les valeurs propres de la r -ième à la m -ième sont les mêmes, et sont strictement plus grandes que celles d'avant. On peut alors écrire, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|u^k(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^m x_i^2 \lambda_i^k \\ &\underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{i=r}^m x_i^2 \lambda_i^k \\ &\underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_m^k \sum_{i=r}^m x_i^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\|u^{k+1}(x)\|}{\|u^k(x)\|} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda_m^{k+1} \sqrt{\sum_{i=r}^m x_i^2}}{\lambda_m^k \sqrt{\sum_{i=r}^m x_i^2}} = \lambda_m.$$

En particulier, si $x_n \neq 0$, alors $\frac{\|u^{k+1}(x)\|}{\|u^k(x)\|} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \lambda_n$.

On note alors

$$\Omega = \left\{x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, x_n \neq 0\right\}.$$

Or,

$$E \setminus \Omega = \{x \in E, \langle x, e_n \rangle = 0\},$$

donc $E \setminus \Omega$ est un sous-espace vectoriel strict d'un espace de dimension finie donc est fermé, d'intérieur vide, donc Ω est un ouvert dense.

Autre manière de dire que Ω est un ouvert dense.

- $\varphi : x \mapsto \langle x, e_n \rangle$ est une forme linéaire donc est continue (car E est de dimension finie) donc $E \setminus \Omega = \varphi^{-1}(\{0_{\mathbb{R}}\})$ est fermé.
- si $x \in E$, alors ou bien $x \in \Omega$ et c'est gagné, ou bien $x \notin \Omega$ et $y_k = x + \frac{1}{k}e_n \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x$ et $y_k \in \Omega$. Donc Ω est bien dense dans E .

Exercice 8. Mines PC 24.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que $F_A = \{Q(A); Q \in \mathbb{C}[X]\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Correction

On peut remarquer que l'application $Q \mapsto Q(A)$ est linéaire, donc C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Or, un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est fermé, donc F_A est un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On suppose que B a n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = Q(A)$.

Correction

On sait que B possède n valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donc B est diagonalisable : on dispose de P inversible telle que

$$B = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Or, Q est dans $\mathbb{C}[X]$, non constant donc Q est surjectif (cela vient du théorème de D'Alembert-Gauss : si $z \in \mathbb{C}$, $Q(X) - z$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$, i.e. l'équation $Q(x) = z$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$ admet au moins une solution).

On pose, pour $\beta \in \llbracket 1, n \rrbracket$, α_i un antécédent de λ_i par Q . Alors en notant

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} P^{-1},$$

on obtient bien

$$Q(A) = P \begin{pmatrix} Q(\alpha_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & Q(\alpha_n) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = B.$$

3. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que $E_Q = \{Q(A); A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\}$ est une partie dense de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Cet ensemble est-il borné ? Est-il fermé pour $Q(X) = X$? Pour $Q(X) = X^2$?
 On peut chercher à savoir pour quels Q cet ensemble est fermé mais la question est délicate.

Correction

Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Alors :

- si B possède deux valeurs propres distinctes, $B \in E_Q$,

- sinon, B possède deux fois la même valeur propre λ , donc, comme B est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, on dispose de $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que

$$B = P \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On note

$$B_n = P \begin{pmatrix} \lambda + \frac{1}{n} & a \\ 0 & \lambda + \frac{2}{n} \end{pmatrix} P^{-1},$$

alors B_n possède deux valeurs propres distinctes donc $B_n \in E_Q$, et $B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} B$.

On a donc montré que E_Q était dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Ensuite, E_Q n'est pas borné car si A est diagonale, disons $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, alors $Q(A) = \begin{pmatrix} Q(\lambda) & 0 \\ 0 & Q(\mu) \end{pmatrix}$, et Q n'est pas borné sur $\mathbb{C}$.

Enfin, on cherche à savoir si E_Q est fermé. On remarque que par exemple, pour $Q(X) = X$, $E_Q = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc E_Q est bien fermé. En revanche, pour $Q(X) = X^2$, on peut montrer facilement qu'il n'existe pas de matrice A telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc E_Q n'est pas fermé, car E_Q est dense et un ensemble dense est fermé si et seulement si c'est tout l'espace.

Exercice 9. Mines PC 22. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. On note B la boule unité fermée de E .

1. Montrer que B est fermée, bornée, convexe, symétrique par rapport à 0 et que 0 est intérieur à B .

Correction

Démontrons chaque point dans l'ordre :

- on a déjà démontré qu'une boule fermée était fermée.
- par définition, B est bornée car pour tout x dans B , $\|x\| \leq 1$.
- ensuite, B est convexe : soient x et y dans B , $t \in [0, 1]$. Alors

$$\|(1-t)x + ty\| \leq (1-t)\|x\| + t\|y\| \leq (1-t) \cdot 1 + t \leq 1,$$

donc $(1-t)x + ty \in B$.

- B est bien symétrique par rapport à 0 car si $\|x\| \leq 1$, $\|-x\| \leq 1$.
- 0 est bien intérieur à B car $B(0, 1/2) \subset B$.

2. Soit K une partie fermée, bornée, convexe, symétrique par rapport à 0 et contenant 0 dans son intérieur. On note $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \inf \left\{ r > 0, \frac{x}{r} \in K \right\}$. Montrer que J est bien définie, que c'est une norme sur E et que K est la boule unité pour J .
On aura intérêt à montrer que cet inf est en fait un min.

Correction

Dans tout le corrigé, on note

$$A_x = \left\{ r > 0, \frac{x}{r} \in K \right\}$$

- on montre déjà que J est bien définie : si $x \in E$, alors A_x est une partie de $\mathbb{R}$, minorée, et non vide. Elle est non vide car, 0 étant intérieur à K , on dispose de ε tel que $B(0, \varepsilon) \subset K$. Mais alors $\frac{x}{\frac{\|x\|}{\varepsilon}} \in K$, donc $\frac{\varepsilon \|x\|}{\|x\|} \in A_x$.

Donc A_x admet une borne inférieure, donc $J(x)$ est bien définie.

- on montre un petit peu mieux, que $J(x)$ est en fait un **minimum** et pas un inf. En effet, si $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A_x telle que $r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} J(x)$, alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\frac{x}{r_n} \in K$, et $\frac{x}{r_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{J(x)}$. Donc $J(x) \in A_x$.

- ensuite, J est bien positive,

- puis on montre l'homogénéité. Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On suppose d'abord $\lambda > 0$. Alors par définition, $\frac{x}{J(x)} \in K$, donc $\frac{\lambda x}{\lambda J(x)} \in K$, donc

$$\frac{1}{\lambda J(x)} \in A_{\lambda x}, \text{ donc } \lambda J(x) \geq J(\lambda x).$$

Ensuite, de même, $\frac{\lambda x}{J(\lambda x)} \in K$ donc $\frac{x}{\frac{J(\lambda x)}{\lambda}} \in K$, donc $\frac{J(\lambda x)}{\lambda} \geq J(x)$.

Finalement, avec ces deux inégalités,

$$J(\lambda x) = \lambda J(x)$$

Ensuite, si $\lambda < 0$, vu que K est symétrique, on remarque juste que $J(-x) = J(x)$ et on se ramène au cas précédent.

Enfin, le cas $\lambda = 0$ est évident car pour tout $r > 0$, $\frac{0_E}{r} \in K$, donc $J(0_E) = 0$.

- on montre ensuite la séparation. On suppose que $J(x) = 0$. Alors sait que pour tout $r > 0$, $\frac{x}{r} \in K$. Or, K est borné, disons par M (pour tout y dans K , $\|y\| \leq M$).

Mais alors si $x \neq 0$, pour $r < \frac{\|x\|}{M}$, alors $\left\| \frac{x}{r} \right\| > M$, donc $\frac{x}{r} \notin K$. Donc $J(x) \geq \frac{x}{M}$, ce qui est absurde. Donc $x = 0$.

- enfin, on montre l'inégalité triangulaire. Soient x et y dans E . On sait que

$$\frac{x}{J(x)} \in K \text{ et } \frac{y}{J(y)} \in K.$$

Or, K est convexe et on n'a toujours pas utilisé cette hypothèse ! Comme K est convexe, en posant $t = \frac{J(x)}{J(x) + J(y)}$ et $1 - t = \frac{J(y)}{J(x) + J(y)}$, alors on sait que

$$t \frac{x}{J(x)} + (1 - t) \frac{y}{J(y)} \in K, \text{ donc}$$

$$\frac{J(x)}{J(x) + J(y)} \frac{x}{J(x)} + \frac{J(y)}{J(x) + J(y)} \frac{y}{J(y)} \in K,$$

c'est-à-dire que $\frac{x + y}{J(x) + J(y)} \in K$, donc $J(x) + J(y) \in A_{x+y}$, donc

$$J(x) + J(y) \geq J(x + y),$$

ce qui est exactement l'inégalité triangulaire.

Enfin, on remarque que, pour $x \in E$,

$$x \in K \Leftrightarrow \frac{x}{1} \in K \Leftrightarrow 1 \in A_x \Leftrightarrow 1 \geq J(x),$$

donc K est bien la boule unité fermée de la norme J .

Pour information, on dit que J est une « jauge », d'où la lettre J .

Exercice 10. Centrale 23. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t \in [-1, 1]} |f(t)|$.

1. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire. Montrer qu'on a les équivalences :

- φ est continue sur E ,
- φ est continue en 0_E ,
- $\exists M > 0, \forall f \in E, |\varphi(f)| \leq M \|f\|_\infty$.

Correction

- Regardons la première implication : si φ est continue sur E , elle est bien sûr continue en 0 ...
- Ensuite, si φ est continue en 0_E , on dispose de $\delta > 0$ tel que pour tout f vérifiant $\|f\|_\infty \leq \delta$, alors $|\varphi(f)| \leq 1$. Ainsi, pour tout f de $B_f(0, \delta)$, $|\varphi(f)| \leq 1$. Mais donc, si $f \in E \setminus \{0\}$, alors

$$g = \frac{\delta}{\|f\|} f \in B_f(0, \delta),$$

donc $|\varphi(g)| \leq 1$, donc

$$|\varphi(f)| \leq \frac{\|f\|}{\delta},$$

d'où le résultat avec $M = \frac{1}{\delta}$.

- S'il existe $M > 0$ tel que $\forall f \in E, |\varphi(f)| \leq M \|f\|_\infty$, soient f et g dans E . Alors

$$\begin{aligned} |\varphi(f) - \varphi(g)| &= |\varphi(f - g)| \\ &\leq M \|f - g\|, \end{aligned}$$

donc φ est lipschitzienne donc continue.

On considère l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = \int_{-1}^0 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt$$

2. Démontrer que φ est continue sur E .

Correction

On remarque déjà que φ est linéaire. Soit f dans E . Alors

$$\begin{aligned} |\varphi(f)| &= \left| \int_{-1}^0 f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt \right| \\ &\leq \left| \int_{-1}^0 f(t)dt \right| + \left| \int_0^1 f(t)dt \right| \\ &\leq \int_{-1}^0 |f(t)|dt + \int_0^1 |f(t)|dt \\ &\leq \int_{-1}^0 \|f\|_\infty dt + \int_0^1 \|f\|_\infty dt \\ &\leq 2\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc, par la question précédente, φ est continue sur E .

3. Déterminer $M = \sup \{|\varphi(f)| \in \mathbb{R} \mid f \in E, \|f\|_\infty = 1\}$.

Correction

C'est beaucoup plus subtil. On peut se demander si c'est 2 : pour que cela soit le cas, il faudrait une fonction f qui soit égale à 1 sur $[-1, 0[$ et à -1 sur $]0, 1]$, ce qui est impossible. On va donc construire une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions, toutes de norme 1, telle que $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout n et $\varphi(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit

$$f_n : \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right] \\ -nx & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ -1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases} \end{cases}$$

Alors $\|f_n\|_\infty = 1$ et

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \int_{-1}^0 f_n(t)dt - \int_0^1 f_n(t)dt \\ &= \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} f_n(t)dt + \int_{-\frac{1}{n}}^0 f_n(t)dt - \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(t)dt - \int_{\frac{1}{n}}^1 f_n(t)dt \\ &= 1 - \frac{1}{n} - n \int_{-\frac{1}{n}}^0 tdt + n \int_0^{\frac{1}{n}} tdt + 1 - \frac{1}{n} \\ &= 2 - \frac{2}{n} + n \frac{1}{2n^2} + n \frac{1}{2n^2} \\ &= 2 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2, \end{aligned}$$

donc $M = 2$.

Exercice 11. Mines 22. Soient E un evn et F un sev de E .

1. Montrez que l'adhérence de F est un sev de E .

Correction

Déjà, $F \subset \bar{F}$ donc $0_E \in \bar{F}$.

Ensuite, soient x et y dans $\bar{F}$, λ et μ dans $\mathbb{K}$. Alors on dispose de deux suites, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F telles que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ et $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$. Comme F est un sous-espace vectoriel de E , alors pour tout n dans $\mathbb{N}$ $\lambda x_n + \mu y_n \in F$. Or,

$$\lambda x_n + \mu y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda x + \mu y,$$

donc $\lambda x + \mu y \in \bar{F}$, donc $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de E .

2. Lorsque F est un hyperplan, démontrer que ou bien F est fermé, ou bien F est dense dans E . Que se passe-t-il en dimension finie ?

Correction

Si F est un hyperplan, alors $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant F , donc il y a deux possibilités :

- ou bien $\bar{F} = F$ et F est fermé.
- ou bien il existe $a \notin F$ tel que $a \in \bar{F}$. Mais comme $F \oplus \text{Vect}(a) = E$ (c'est une des propriétés importantes d'un hyperplan), et que $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de E , on en déduit que $\bar{F}$ contient $F \oplus \text{Vect}(a) = E$, donc $\bar{F} = E$, ce qui signifie exactement que $\bar{F}$ est dense dans E .

En dimension finie, on l'a vu dans le cours, un sous-espace vectoriel est toujours fermé.

3. Dans $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on considère l'hyperplan H des fonctions $f \in E$ vérifiant $f(0) = 0$. On note, pour $f \in E$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Démontrer que H est fermé pour la première norme et dense pour la seconde.

Correction

Montrons déjà que H est fermé pour $\|\cdot\|_\infty$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ et $f \in E$ telles que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors, en particulier,

$$|f_n(0) - f(0)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $f(0) = 0$. Donc $f \in H$. Donc H est fermé.

Montrons ensuite que H est dense pour $\|\cdot\|_1$. Pour ce faire, étant donnée la question 2, nous allons montrer que H n'est pas fermé. On considère $f_n(x) = 1 - (1 - x)^n$. Alors $f_n(0) = 0$ et, si l'on note $u : x \mapsto 1$, alors

$$\|f_n - u\|_1 = \int_0^1 (1 - t)^n dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de H qui converge pour la norme $\|\cdot\|_1$ vers une fonction qui n'est pas dans H . Donc H n'est pas fermé, donc il est dense pour $\|\cdot\|_1$.