PSI – Révisions

1 Complexes, polynômes, trigonométrie

QC classiques

1. Inégalité triangulaire pour les complexes
2. Expression de $\sin(\theta)/\cos(\theta)/\tan(\theta)$ en fonction de $\tan(\theta/2)$
3. Description de $\mathbb{U}_n$
4. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
5. Caractérisation de la multiplicité avec les dérivées
6. Somme et produit des racines en fonction des coefficients

Exercices typiques

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$
2. Seconde inégalité triangulaire $||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$.
3. Si P est srs sur $\mathbb{R}$, alors P' est srs sur $\mathbb{R}$
4. Si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' est scindé sur $\mathbb{R}$
5. Polynômes P tels que P' divise P
6. Polynômes de Tchebycheff

2 Analyse réelle : suites, fonctions, séries

QC classiques

1. Théorème de la limite monotone (pour les suites ou les fonctions)
2. Théorème des suites adjacentes
3. TVI
4. Théorème de Rolle
5. TAF
6. Si f est convexe, position de la courbe de f par rapport à ses cordes ou à ses tangentes
7. Critère de Riemann
8. Critère des séries alternés

Exercices typiques

1. Une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$ admet un point fixe.
2. Si f s'annule n fois, f' s'annule au moins $n-1$ fois et $f^{(n-1)}$ s'annule au moins une fois.
3. Inégalité de Jensen (HP officiellement, mais à savoir redémontrer)
4. Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.
5. Exemple d'étude d'une série alternée avec la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.
6. Énoncé du produit de Cauchy (la preuve est HP) + application à $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$.

3 Algèbre linéaire sans réduction

QC classiques

1. Une application linéaire réalise un isomorphisme d'un supplémentaire de son noyau sur son image
2. Caractérisation des projecteurs (par $p \circ p = p$) et des symétries (par $s \circ s = \mathrm{Id}_E$)
3. Un sev d'un evdf est de dimension finie
4. Théorème du rang
5. Formule de Grassmann
6. Équivalences des définitions d'un hyperplan (noyau d'une forme linéaire non nulle, supplémentaire d'une droite et, en dimension finie, sev de dimension $n-1$)
7. Une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre.
8. Théorème de structure des solutions de $f(x) = y$.
9. Matrices de la base canonique, définition et produit de deux matrices de la base canonique.
10. Lien entre produit de matrices et composition d'endomorphismes/formules de changement de base
11. Équivalence entre l'inversibilité à Gauche/à droite d'une matrice.
12. Écriture de matrices par blocs/lien avec les sous-espaces stables
13. Si φ est application linéaire de rang r, il existe $\mathcal{E}$ base de E et $\mathcal{F}$ base de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi) = J_r$.
14. $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ (lorsque A et B sont **rectangulaires** de formats compatibles)
15. Déterminant de Vandermonde
16. Théorème d'interpolation de Lagrange

Exercices typiques

1. Endomorphismes nilpotents
2. Calcul d'un déterminant tridiagonal
3. Détermination de $\{u \in \mathscr{L}(E),\ \forall v \in \mathscr{L}(E),\ u \circ v = v \circ u\}$.

4 Réduction

QC classiques

1. Une somme finie de sous-espaces propres est directe.
2. Définitions équivalentes de la diagonalisabilité : être représenté par une matrice diagonale, décomposer l'espace comme somme directe de sous-espaces propres, somme des dimensions des sous-espaces propres.
3. Si λ est une valeur propre, si m est sa multiplicité dans χ_u, si $E_\lambda(u)$ est le sous-espace propre correspondant, alors

$$1 \leqslant \dim\left(E_\lambda(u)\right) \leqslant m.$$

4. Si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.
5. Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et que pour tout λ dans le spectre de u, la dimension de $E_\lambda(u)$ égale la multiplicité de λ dans χ_u.
6. Si P est un polynôme annulateur de u, alors le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de P.
7. Si u est diagonalisable, alors $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ annule u.
8. L'induit d'un diagonalisable est diagonalisable.
9. Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Exercices typiques

1. Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
2. Si u possède n valeurs propres distinctes et v vérifie $u \circ v$ et $v \circ u$, alors u et v sont diagonalisables dans la même base.
3. Si u et v sont diagonalisables et $u \circ v = v \circ u$, alors u et v sont diagonalisables dans la même base.
4. Si u^2 est diagonalisable et u est inversible, alors u est diagonalisable.

5 Algèbre bilinéaire et endomorphismes des espaces euclidiens

QC classiques

1. Une famille de vecteurs orthogonaux non nuls est libre ; une somme de sous-espaces deux à deux orthogonaux est directe.
2. Si u est un vecteur non nul, $\mathrm{Vect}(u) \oplus^\perp \mathrm{Vect}(u)^\perp = E$
3. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. Inégalité triangulaire.
5. Caractérisation des isométries par le produit scalaire
6. Expression d'un vecteur dans une BON (écriture et démonstration), expression du coefficient de la matrice d'un endomorphisme dans une BON.
7. Pour un sevdf F et $F^\perp$ sont supplémentaires.
8. La distance à un sevdf est atteinte en le projeté orthogonal.
9. Théorème de représentation des formes linéaires.
10. Procédé d'ortho**gonalisation** de Gram-Schmidt.
11. Si E est euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$, $u \in \mathcal{O}(E)$ ssi u préserve le produit scalaire ssi u transforme toute BON en BON.
12. $\mathcal{O}(E)$ est inclus dans $GL(E)$, stable par composition et passage à l'inverse.
13. Une matrice A est dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si ses colonnes forment une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

14. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ est une BON, alors $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

15. Si u est une isométrie, pour tout sous-espace stable F, $F^{\perp}$ est stable par u.

16. Description des matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

17. Si u est une isométrie en dimension 2 : ou bien elle est directe et dans toute BOND, sa matrice a la même forme et c'est une rotation ; ou bien elle est indirecte et pour toute BOND, il existe un θ tel que sa matrice soit $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

18. Réduction des isométries en dimension 3 : si u est une isométrie, il existe une BOND dans laquelle sa matrice est $\begin{pmatrix} \det(u) & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & R_\theta \end{pmatrix}$.

19. Si $\mathcal{B}$ est une BON, $u \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

20. Si p est un projecteur, alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est autoadjoint.

21. Si $u \in \mathcal{S}(E)$ et F est stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u.

22. Si $u \in \mathcal{S}(E)$, les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

23. Pour $u \in \mathcal{S}(E)$, équivalence entre « $\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geqslant 0$ » et « le spectre de u est dans $\mathbb{R}_+$. »

Exercices typiques

1. Un projecteur p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout x, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
2. Vérification que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ est bien défini sur $\mathbb{R}[X]$ et est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Inégalité d'Hadamard : si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre, si $\mathscr{B}$ est une BON, $|\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leqslant \|x_1\| \dots \|x_n\|$.
4. Si $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$ sont ses valeurs propres, encadrement de $\langle u(x), x\rangle$ à l'aide de λ_1 et λ_n.

6 Intégration (intégration sur un segment, intégration sur un intervalle quelconque, limites d'intégrales)

QC classiques

1. Théorème de convergence des sommes de Riemann
2. Théorème de comparaison (pour l'intégrabilité)

Exercices typiques

1. Intégrales de Wallis
2. Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$
3. Existence (et calcul) de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt$
4. Existence et un exercice qui calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$

5. Montrer que $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ quand n tend vers $+\infty$
6. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.
7. On note $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Montrer que Γ est définie sur $]0,+\infty[$ et que pour $x>0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
8. On note $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Montrer que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
9. Soit $a>0$. On note $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}-e^{-at}}{t}dt$. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$, calculer F' et en déduire F.

7 Suites et séries de fonctions

QC classiques

1. Définition de la convergence simple/de la convergence uniforme d'une suite de fonctions + la convergence uniforme implique la convergence simple.
2. Définition de la convergence simple/uniforme/normale d'une série de fonctions + la convergence normale de $\sum u_n$ implique la convergence absolue de $\sum u_n(x)$ pour tout x ainsi que la convergence uniforme de $\sum u_n$.
3. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues.
4. Intégration d'une limite uniforme.
5. Théorème de dérivation d'une limite uniforme.

Exercices typiques

1. Mode de convergence de (f_n) où $f_n(x) = x^n$
2. Fonction ζ de Riemann : domaine d'existence, dérivabilité.

8 Séries entières

QC classiques

1. Lemme d'Abel + si R est le rayon de convergence, alors pour tout $|z|<R$, $\sum a_n z^n$ CVA et pour tout $|z|>R$, on a divergence grossière.
2. La proposition précédente caractérise le rayon de convergence.
3. Convergence normale de la somme d'une série entière sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence.
4. Si $a_n = O(b_n)$ alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal au rayon de convergence de $\sum b_n z^n$
5. Continuité de la somme d'une série entière sur $]-R,R[$.
6. Caractère $\mathscr{C}^1$ de la somme d'une série entière sur $]-R,R[$.

 nlaillet.math@gmail.com

7. Expression des coefficients a_n en fonction des dérivées en 0 de $S(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ et unicité du DSE.
8. $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
9. DSE usuels

Exercices typiques

1. DSE de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, à exprimer à l'aide des $\binom{2n}{n}$

9 Probabilités

QC classiques

1. Formules des probabilités totales/composées/formule de Bayes
2. Continuité croissante/décroissante.
3. Une somme de n vaiid de Bernoulli suit une loi binomiale.
4. Formule $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(X \geqslant n)$.
5. Espérance/variance des lois usuelles
6. Inégalités de Markov/Bienaymé-Tchebycheff/loi faible des grands nombres
7. Inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance.
8. Expression de l'espérance avec $\mathbb{P}(X \geqslant n)$
9. G_X converge normalement sur $[-1, 1]$ et est continue sur $[-1, 1]$. Valeur de $G_X(1)$.
10. Si X admet une espérance, alors G_X est dérivable en 1 et $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$. (la preuve de la réciproque est hors-programme)
11. Fonctions génératrices usuelles.

Exercices typiques

1. Loi de la somme de deux variables indépendantes de Poisson.
2. Loi du minimum de deux variables suivant une loi géométrique.
3. La loi géométrique est la seule loi sans mémoire.
4. Marche aléatoire : lien avec la loi binomiale.
5. Espérance, fonction génératrice de $\sum_{i=1}^{N} X_i$ où $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont des vaiid et N est une va indépendante de $(X_1, \dots, X_n)$.

10 Espaces vectoriels normés, calcul différentiel

QC classiques

1. Montrer qu'une des normes $1/2/\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ ou sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$ est une norme.
2. Unicité de la limite (le cours sur les suites réelles de MPCSI est supposé connu)

3. Limite d'une somme (le cours sur les suites réelles de MPCSI est supposé connu)
4. Une suite convergente est bornée (le cours sur les suites réelles de MPCSI est supposé connu)
5. Si deux normes sont équivalentes, toute suite bornée pour l'une est bornée pour l'autre ; toute suite convergente pour l'une est convergente pour l'autre.

Exercices typiques

1. Vérifier que deux normes ne sont pas équivalentes, par exemple $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.