TD 15
Calcul différentiel

1 Dérivation de fonctions à valeurs vectorielles

Exercice 1. *Mines 23*. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et X_0 une solution du système différentiel $X'(t) = A(t)X(t)$. Montrer que $\Omega = \{X_0(t), t \in \mathbb{R}\}$ est inclus dans une sphère de centre 0 de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. *Centrale 22*. Considérons une fonction $F : t \mapsto (x(t), y(t))$ de classe $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique, telle que sa restriction à $[0, 2\pi[$ soit injective et telle que F' ne s'annule pas. Notons $\mathcal{C}$ le support de F.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est inclus dans un disque centré sur l'origine et de rayon $R > 0$.
2. Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathcal{C}$ tels que $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sup\{\|\overrightarrow{AB}\|; (A, B) \in \mathcal{C}^2\}$. Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ en P et Q sont orthogonales à la droite (PQ).

Exercice 3. *Mines 19*. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que l'application $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(x) = M(x)^\top M(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.
2. Soient $A : \mathbb{R} \to \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ continue et $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation différentielle $M'(x) = A(x)M(x)$. On suppose que $M(0) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M(x) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

2 Fonctions de plusieurs variables : EDP et règle de la chaîne

Exercice 4. *Mines 22*. On note $E = \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ et $F = \mathscr{C}^0\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$. Soit a et b deux réels. On note :

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} E \to F \\ f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x} - af \end{array} \right. \quad \text{et } \psi : \left| \begin{array}{l} E \to F \\ f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y} - bf \end{array} \right.$$

1. On pose : $f(x, y) = \mathrm{e}^{ax} \displaystyle\int_0^x A(t, y)\mathrm{e}^{-at}\, \mathrm{d}t$ avec $A \in E$. Justifier l'existence des dérivées partielles de f et les calculer.
2. Soit
$$U = \left\{f \in E,\ \exists \alpha \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \alpha(y)\mathrm{e}^{ax}\right\}$$
$$V = \left\{f \in E,\ \exists \beta \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \beta(x)\mathrm{e}^{by}\right\}$$
Montrer que $\ker(\varphi) = U$ et $\ker(\psi) = V$.
3. Si $A \in E$, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(f) = A$ d'inconnue $f \in E$.

Exercice 5. *CCINP 23*. Soient $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\right\}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x + y}$ si$(x, y) \notin F$, et $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \in F$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash F$ et que $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3f$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et les calculer.
3. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?

Exercice 6. *Mines PC 23*.

1. Trouver les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(]1,+\infty[\times]0,+\infty[,\mathbb{R})$ telles que

$$x(x-1)\frac{\partial f}{\partial x} + y(x-1)\frac{\partial f}{\partial y} - x^2 f = 0$$

Indication. Effectuer le changement de variables $x = u$ et $y = uv$.

2. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts, $\varphi_i : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(a_i x) \end{array} \right.$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Montrer que $(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

3. Le sous-espace vectoriel des solutions obtenu dans la première question est-il de dimension finie ?

Exercice 7. *Mines PC 23*. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est homogène de degré n si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, f(tx,ty) = t^n f(x,y)$. Montrer que f est homogène de degré n si et seulement si $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$.

Exercice 8. *Mines 24*.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. À l'aide d'un changement de variables classique, résoudre l'équation $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$ d'inconnue $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}\right)$.

2. Résoudre $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} f(x,y)$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}\right)$

Exercice 9. *Mines 24*. Soit $J : x \mapsto \displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$.

1. Montrer que J est bien définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que J est développable en série entière et déterminer le rayon de convergence.
3. Montrer que $xJ''(x) + J'(x) + xJ(x) = 0$.
4. Soit $(x,y) \mapsto \varphi(x,y) = J\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et que $\Delta\varphi + \varphi = 0$.

Exercice 10. *Mines 24*. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $\rho : x \mapsto \|x\|^2$.

1. Montrer que $\rho \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
2. Soient $g \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}\right)$ et $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x) = g\left(\|x\|^2\right)$. Déterminer les fonctions g vérifiant $\Delta f = 0$.

Exercice 11. *CCINP PC 24*. Soient $h : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 - y^2$ et $C = \{(x,y), h(x,y) = 0\}$.

1. Montrer que h est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, puis montrer que $(0,0)$ est le seul point critique de h. La fonction h admet-elle un extremum local en $(0,0)$?
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(x,y) = 0$ pour tout (x,y) dans C.
   (a) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f\left(t^2, t^3\right) = 0$. En déduire que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
   (b) Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $\varphi_t : u \mapsto f\left(t^2, u\right)$. Justifier que φ_t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'il existe $\gamma(t) \in]-t^3, t^3[$ tel que $\varphi_t'(\gamma(t)) = 0$
   (c) Conclure que $(0,0)$ est un point critique pour f.
3. Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble C.

3 Fonctions de plusieurs variables : recherche d'extremums

Exercice 12. *Mines-Telecom 24*. **1.** Combien existe-t-il de solutions à l'équation $x\mathrm{e}^{-x} = \lambda$ en fonction des valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$?

2. Déterminer les extremums de la fonction $f : (x, y) \mapsto xy\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}$.

Exercice 13. *CCINP PC 23*. Soit $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\right\}$. On pose $f : \left| \begin{array}{l} F \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x-y)^2 - xy \end{array}\right.$.

1. Montrer que F est un fermé, le dessiner.
2. Trouver les extremums de f.

Exercice 14. *CCINP PSI Écrit 2021*.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extremums pour f.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Expliciter des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0, 0)$, tels que $f(x, y) < 0$. Expliciter, de même, des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0, 0)$, tels que $f(x, y) > 0$. La fonction f admet-elle en $(0, 0)$ un maximum local, un minimum local ou aucun des deux ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, g(u, v) = f(1 + u, 1 + v) - f(1, 1)$.

3. Calculer, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u, v)$ puis, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $g(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
4. Prouver que pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, on a : $g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geqslant 3r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}r\right)$. Que peut-on en conclure ?
5. La fonction f possède-t-elle un ou des extremums globaux ?

Exercice 15. *Centrale 23*. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice Hessienne $H_f(x)$ a toutes ses valeurs propres dans $[1, +\infty[$.

1. Pour x fixé dans $\mathbb{R}$ on note $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx)$. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^2$ et exprimer φ'' en fonction de la matrice Hessienne de f.
2. En considérant la fonction $\psi : t \mapsto f(tx) - \langle \nabla f(0), tx\rangle - \frac{t^2}{2}x^\top x$, montrer l'inégalité
$$f(x) \geqslant f(0) + \langle \nabla f(0), x\rangle + \frac{1}{2}x^\top x$$
3. En déduire que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$, puis que f admet un minimum.

Exercice 16. *Mines PC 23*. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^x$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 1$.

1. Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = 1$.
2. Montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.
3. Déterminer l'ensemble des points critiques de f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.
4. Montrer que f admet un unique maximum local et un unique minimum local sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 17. *Centrale 24*. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$.

1. Soit $S = \{(x, y, z), z = f(x, y)\}$. Déterminer l'équation du plan tangent à S en un point $(a, b, c) \in S$.
2. Montrer que f est minorée puis qu'elle admet un minimum atteint en un point critique que l'on déterminera.

Exercice 18. *CCINP PC-PSI 24*. On considère $f : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto x^2y + y(\ln(y))^2$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Déterminer les extrema locaux et globaux de f.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

4 Fonctions de plusieurs variables : autres exercices

Exercice 19. *Mines PC 23*. Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f : E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $\forall (x, y, t) \in E^2 \times [0, 1], f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y) - \dfrac{t(1-t)}{2}\|x-y\|^2$.

1. Montrer que, pour $x, y \in E$, $\langle \nabla f(x), y - x \rangle \leqslant f(y) - f(x) - \dfrac{1}{2}\|x-y\|^2$.

2. Montrer que, pour $x, y \in E$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geqslant \|x-y\|^2$.

Exercice 20. *CCINP 21*. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si$(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que f est continue.

2. Exprimer les dérivées partielles de f.

3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

4. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Qu'en déduire ?