

Endomorphismes des espaces euclidiens – Une question

Exercice 1

Quelles sont les isométries autoadjointes ?

Réponse. Soit $u \in \mathcal{O}(E) \cap \mathcal{S}(E)$. Alors :

- $u \in \mathcal{S}(E)$ donc, par le théorème spectral u est diagonalisable en base orthonormée,
- $u \in \mathcal{O}(E)$ donc ses seules valeurs propres sont 1 et -1 ,
- donc $E = \ker(u - \text{Id}_E) \oplus^\perp \ker(u + \text{Id}_E)$, l'orthogonalité venant du fait que les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont orthogonaux.

Ainsi, u est une **symétrie orthogonale**.

Réciproquement, on a déjà vu que les symétries orthogonales étaient des isométries et étaient des endomorphismes autoadjoints.