

## PROBLÈME 2

### Factorisation $QR$

#### Partie I – Matrices de rang 1

##### I.1 – Une expression des matrices de rang 1

**Q 18.** Puisque  $A$  est de rang 1, toutes ses colonnes sont proportionnelles à un même vecteur colonne,

qu'on note  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ . Notons  $y_1, \dots, y_n$  les coefficients de proportionnalité, et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ . Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} y_1 x_1 & y_2 x_1 & \cdots & y_n x_1 \\ y_1 x_2 & y_2 x_2 & \cdots & y_n x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1 x_n & y_2 x_n & \cdots & y_n x_n \end{pmatrix}. \quad (*)$$

On reconnaît, suivant les règles de calcul matriciel :  $A = XY^T$ , et de plus  $X$  et  $Y$  ne sont pas nuls (sinon l'égalité précédente impliquerait :  $A = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ , ce qui est impossible pour une matrice rang non nul). D'où le résultat.

**Q 19.** On reprend les notations  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ . Le même calcul que dans la question

précédente montre que toutes les colonnes de  $XY^T$  sont proportionnelles à  $X$  ; l'espace vectoriel engendré par les colonnes de  $XY^T$  est donc inclus dans  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$ , et comme le rang de  $XY^T$  est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes, on en déduit :  $\text{rang}(XY^T) \leq \dim(\text{Vect}_{\mathbb{R}}(X)) = 1$ . Mais il n'est pas égal à 0, car  $XY^T$  admet au moins une colonne non nulle : en effet,  $Y$  est non nul, donc ce vecteur colonne admet au moins une coordonnée non nulle : soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $y_i \neq 0$ . Alors la  $i^{\text{e}}$  colonne de  $XY^T$ , qui est égale à  $y_i X$ , est non nulle car  $y_i \neq 0$  et  $X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ .

Ainsi  $\text{rang}(XY^T) \leq 1$  et  $\text{rang}(XY^T) \neq 0$ , donc nécessairement :  $\text{rang}(XY^T) = 1$ .

##### I.2 – Quelques propriétés

**Q 20.** Comme  $A$  est de rang 1, d'après la question **Q 18** il existe  $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  non nuls tels que :  $A = XY^T$ . On reprend les mêmes notations que dans les questions précédentes, pour les coordonnées de  $X$  et  $Y$  (la matrice  $A$  a donc l'expression en  $(*)$ ). Alors, par associativité de la multiplication matricielle :

$$A^2 = (XY^T)(XY^T) = X(Y^T X)Y^T,$$

et on reconnaît le produit scalaire usuel de  $X$  et  $Y$ , qui est égal à :

$$Y^T X = \langle Y, X \rangle = \sum_{i=1}^n y_i x_i \stackrel{(*)}{=} \text{tr}(A),$$

puisqu'on reconnaît là la somme des coefficients diagonaux de  $A$ . On a donc montré :

$$A^2 = X \cdot \underbrace{\text{tr}(A)}_{\in \mathbb{R}} \cdot Y^T = \text{tr}(A)XY^T = \text{tr}(A)A,$$

ce qu'il fallait démontrer.

**Q 21.** Après multiplication par  $A^{k-1}$ , l'égalité de la question précédente donne :  $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $A^{k+1} = \text{tr}(A)A^k$ . Si l'on raisonne comme dans le cas des suites numériques, cela semble indiquer que  $(A^k)_{k \geq 1}$  est une suite géométrique dont la raison serait  $\text{tr}(A)$ , et on en déduirait :  $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $A^k = (\text{tr}(A))^{k-1}A$ . Nous allons démontrer cette conjecture par récurrence sur  $k$ .

L'initialisation est évidente, puisque pour  $k = 1$  cette égalité équivaut à  $A = A$ . Montrons donc l'hérédité : soit  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tel qu'on ait :  $A^k = (\text{tr}(A))^{k-1}A$ . En multipliant par  $A$  cette égalité, on a :

$$A^{k+1} = (\text{tr}(A))^{k-1}A^2 \stackrel{[\text{Q 20}]}{=} (\text{tr}(A))^{k-1} \cdot \text{tr}(A)A = (\text{tr}(A))^{(k+1)-1}A,$$

d'où la propriété au rang  $k + 1$ , ce qui démontre qu'elle est héréditaire.

Ainsi, par principe de récurrence, on a montré :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad A^k = (\text{tr}(A))^{k-1}A.$$

**Q 22.** Soit  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Rappelons que  $A$  est non nulle, puisque de rang  $1 \neq 0$ . Par la question précédente, on a donc clairement :

$$A^k = 0_{M_n(\mathbb{R})} \iff (\text{tr}(A))^{k-1} = 0 \iff k \geq 2 \text{ et } : \text{tr}(A) = 0.$$

Ainsi  $A$  est nilpotente si et seulement si  $\text{tr}(A) = 0$ , et dans ce cas l'indice de nilpotence (c'est-à-dire : le plus petit exposant à donner une puissance nulle) est  $k = 2$ .

**Q 23.** La question **Q 20** montre que  $X^2 - \text{tr}(A)X = X(X - \text{tr}(A))$  est un polynôme annulateur de  $A$ . C'est un polynôme scindé, et si  $\text{tr}(A) \neq 0$  alors il est à racines simples d'après la factorisation qui précède, donc d'après le critère polynomial de diagonalisation  $A$  est diagonalisable dans ce cas-là.

Ainsi une condition suffisante pour que  $A$  soit diagonalisable, est que  $\text{tr}(A) \neq 0$ . Nous allons démontrer que cette condition est nécessaire : supposons  $A$  diagonalisable. Alors, d'après le critère de diagonalisation,  $\chi_A$  est scindé, et pour toute valeur propre de  $A$ , son ordre de multiplicité est égal à la dimension du sous-espace propre associé. Or  $A$  est de rang 1, donc d'après le théorème du rang on a :  $\dim(\ker(A)) = n - 1$ . Comme  $n \geq 2$  par hypothèse, on a  $\dim(\ker(A)) > 0$ , donc 0 est valeur propre de  $A$ , d'ordre de multiplicité exactement  $n - 1$ . Comme  $A$  admet exactement  $n$  valeurs propres en comptant les multiplicités, il existe une autre valeur propre  $\lambda \neq 0$ , qui doit être d'ordre de multiplicité 1 vu que 0 est déjà d'ordre de multiplicité  $n - 1$ . Alors, comme la trace d'une matrice réelle est la somme de ses valeurs propres (complexes) comptées avec multiplicités, on a :

$$\text{tr}(A) = (n - 1) \times 0 + 1 \times \lambda = \lambda \neq 0,$$

d'où le résultat : si  $A$  est diagonalisable, alors  $\text{tr}(A) \neq 0$ .

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  soit diagonalisable est donc :  $\text{tr}(A) \neq 0$ .

## Partie II – Matrices de Householder

### II.1 – Un exemple

**Q 24.** Dans cette question, et la suivante, je vais illustrer comment la géométrie permet d'abrégier la partie calculatoire de l'étude, par anticipation sur la partie II.2.

On note que les colonnes de  $A$  forment une base orthonormée de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  pour le produit scalaire usuel (ne pas oublier le  $\frac{1}{3}$  en facteur, qui assure que les colonnes sont de norme 1). On en déduit que  $A$  est une matrice orthogonale, et donc :  $A^T A = I_3$ . Or  $A$  est clairement symétrique, donc l'égalité précédente devient :  $A^2 = I_3$ . On a montré :

$$A^2 = I_3,$$

et donc  $X^2 - 1$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

**Q 25.** La question précédente veut peut-être nous inciter à utiliser le fait que  $X^2 - 1$  soit un polynôme annulateur de  $A$ , pour en déduire que les valeurs propres sont éventuellement 1 et  $-1$ . Mais nul besoin de ce surcroît de théorie : contentons-nous de remarquer qu'on a montré, dans la question précédente, que  $A^2 = I_3$ . Ainsi  $A$  est une matrice de symétrie, or on sait qu'une telle matrice est diagonalisable et a pour valeurs propres éventuelles 1 et  $-1$ . Donc :

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subseteq \{1, -1\}.$$

On peut montrer que 1 et  $-1$  sont effectivement valeurs propres, et même déterminer leurs ordres de multiplicité, grâce à la trace. En effet, si l'on note  $a$  et  $b$  leurs ordres de multiplicité (qu'on pose comme étant nuls si ce ne sont pas effectivement des valeurs propres), alors le critère de diagonalisation implique :  $a + b = \dim(\ker(A - I_3)) + \dim(\ker(A + I_3)) = 3$ . Mais on a aussi, en examinant la trace, qui est la somme des coefficients diagonaux mais aussi la somme des valeurs propres comptées avec multiplicités :  $\text{tr}(A) = 1 = a - b$ . Ainsi :

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 3 \\ 2a = 4 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$$

et on en déduit :  $a = 2, b = 1$ . Ainsi 1 est valeur propre double (car son ordre de multiplicité est  $a = 2$ ), et  $-1$  est valeur propre simple. Je vais d'abord déterminer le sous-espace propre associé à  $-1$  (c'est en principe plus facile, vu qu'il est de dimension 1 : trouver un seul vecteur propre non nul suffit à l'engendrer) : comme  $A$  est une matrice symétrique réelle, on sait que ses sous-espaces propres sont orthogonaux. On en déduira alors le sous-espace propre associé à 1 en considérant le supplémentaire orthogonal du premier sous-espace propre. Or on a :

$$A + I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

et la relation  $C_1 + C_2 = C_3$  montre que le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  appartient au noyau de  $A + I_3$ . Par l'argument dimensionnel ci-dessus on a donc :

$$\ker(A + I_3) = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Par l'argument d'orthogonalité évoqué, on en déduit :

$$\ker(A - I_3) = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)^{\perp} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

**Q 26.** La matrice  $A$  est symétrique réelle, donc ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

**Q 27.** Il s'agit de diagonaliser  $A$ , en prenant une matrice de passage orthogonale : pour cela, il suffit de prendre une matrice de passage entre deux bases orthonormées, en l'occurrence la base canonique  $\mathcal{B}_{can}$  et une base orthonormée de vecteurs propres. Pour cette dernière : comme les deux sous-espaces propres de  $A$  sont supplémentaires orthogonaux, concaténer des bases orthonormées des sous-espaces propres donne une base orthonormée de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  (constituée de vecteurs propres de  $A$ ). Or la base de  $\ker(A - I_3)$  trouvée ci-dessus n'est pas orthonormée ni même orthogonale : on applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour y remédier. On obtient alors la base suivante de  $\ker(A - I_3)$ , orthonormée cette fois-ci :

$$\ker(A - I_3) = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Ceci étant dit : soit  $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ . D'après les questions précédentes et la discussion ci-dessus, la famille  $(X_1, X_2, X_3)$  est bien une base orthonormée de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$ , et constituée de vecteurs propres de  $A$  (respectivement associés à  $-1, 1$  et  $1$ ). D'après la formule du changement de base, appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  et aux bases  $\mathcal{B}_{can}$  et  $\mathcal{B}$ , on a donc :

$$A = M_{\mathcal{B}_{can}}(\mathcal{B}) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{can}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{-1},$$

d'où le résultat en posant  $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ , qui est une matrice orthogonale d'après

l'argument plus haut (ce qui permet notamment d'écrire :  $P^{-1} = P^T$ ), et  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Q 28.** Les questions précédentes montrent que  $A$  est une matrice symétrique (réelle), et une matrice de symétrie : c'est donc une matrice de symétrie orthogonale, par rapport à  $\ker(A - I_3)$  que nous avons déterminé tantôt, et qui est égal au plan  $\text{Vect}_{\mathbb{R}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

## II.2 – Matrices de Householder

**Q 29.** En appliquant les résultats de la partie I.1 avec  $X = Y = \frac{1}{\|V\|}V$  (qui est non nul par hypothèse), on voit immédiatement que  $P_V = \frac{1}{\|V\|^2}VV^T$  est une matrice de rang 1 : son image est donc de dimension 1, et un seul vecteur non nul suffit à l'engendrer. Or :

$$P_V V = \frac{1}{\|V\|^2}VV^T \cdot V = \frac{1}{\|V\|^2}V \cdot \|V\|^2 = V,$$

donc :  $V = P_V V \in \text{im}(P_V)$ , et  $V$  est non nul, donc par l'argument dimensionnel ci-dessus on a :  $\text{im}(P_V) = \text{Vect}(V)$ .

Pour déterminer le noyau, on note que  $P_V$  est une matrice symétrique, puisque :

$$P_V^T = \frac{1}{\|V\|^2} (VV^T)^T = \frac{1}{\|V\|^2} (V^T)^T V^T = \frac{1}{\|V\|^2} VV^T = P_V.$$

On en déduit que son image et son noyau sont supplémentaires orthogonaux, et on a :  $\ker(P_V) = \text{im}(P_V)^\perp = \text{Vect}(V)^\perp$ .

**Q 30.** On a déjà observé que  $P_V$  est une matrice symétrique. Il suffit donc de montrer que c'est un projecteur, pour en déduire que c'est un projecteur orthogonal. Or c'est une matrice de rang 1, donc d'après la question **Q 20**, on a :  $(P_V)^2 = \text{tr}(P_V)P_V$ . En fait, en regardant de plus près la résolution de la question **Q 20** (avec  $X = Y = \frac{1}{\|V\|}V$ ), on a :  $\text{tr}(P_V) = \frac{1}{\|V\|^2}V^T V = \frac{1}{\|V\|^2}\|V\|^2 = 1$ , donc finalement :  $(P_V)^2 = P_V$ . Ainsi  $P_V$  est une matrice de projecteur, et est symétrique, donc est une matrice de projecteur orthogonal, sur  $\text{im}(P_V)$ . D'après la question précédente,  $P_V$  est donc la projection orthogonale sur  $\text{Vect}(V)$ . Ce qui précède montre en passant :

$$\text{rang}(P_V) = 1, \quad \text{tr}(P_V) = 1.$$

**Q 31.** On a montré que  $P_V$  est symétrique. De plus  $I_n$  est aussi une matrice symétrique, donc  $Q_V$  également en tant que combinaison linéaire de matrices symétriques. Montrons qu'elle est orthogonale. On a :

$$Q_V^T Q_V = Q_V^2 = (I_n - 2P_V)^2,$$

et comme  $I_n$  et  $P_V$  commutent, on en déduit :

$$Q_V^T Q_V = I_n - 2 \cdot 2P_V + (2P_V)^2 = I_n - 4P_V + 4P_V^2.$$

Or  $P_V^2 = P_V$  d'après la question précédente, donc finalement :

$$Q_V^T Q_V = I_n - 4P_V + 4P_V = I_n,$$

ce qui montre que  $Q_V$  est orthogonale : d'où le résultat.

**Q 32.** La question précédente montre que  $Q_V^2 = I_n$  et  $Q_V^T = Q_V$  : c'est donc une matrice de symétrie, et une matrice symétrique : c'est une matrice de symétrie orthogonale. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, il suffit de déterminer  $\ker(Q_V - I_n)$ . Or, si  $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a :

$$X \in \ker(Q_V - I_n) \iff Q_V X = X \iff (I_n - 2P_V) X = X \iff 2P_V X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} \iff X \in \ker(P_V),$$

donc :  $\ker(Q_V - I_n) = \ker(P_V)$ , et ce noyau est égal à  $\text{Vect}(V)^\perp$  d'après la question **Q 29**. Ainsi  $Q_V$  est la symétrie orthogonale par rapport à  $\text{Vect}(V)^\perp$ .

**Remarque.** C'est un fait classique que si  $P$  est une matrice carrée, alors  $P$  est une matrice de projecteur si et seulement si  $S = 2P - I_n$  est une matrice de symétrie, avec les mêmes caractéristiques géométriques. Cela donne directement ce qu'on veut dans les deux questions précédentes, si l'on prend  $P = P_V$  et  $S = -Q_V$  (noter que  $S$  et  $-S$  ont des caractéristiques géométriques « opposées »).

### Partie III – Factorisation $QR$

#### III.1 – Un résultat préliminaire

**Q 33.** Soit  $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ . On a :

$$\begin{aligned} \|X - U\| = \|X - V\| &\iff \|X - U\|^2 = \|X - V\|^2 \\ &\iff \|X\|^2 - 2\langle X, U \rangle + \|U\|^2 = \|X\|^2 - 2\langle X, V \rangle + \|V\|^2 \\ &\iff \langle X, U \rangle = \langle X, V \rangle && \text{(car } \|U\| = \|V\|) \\ &\iff \langle X, U - V \rangle = 0 \\ &\iff X \perp U - V \\ &\iff X \in D^\perp, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

**Remarque.** Noter la similitude entre le résultat démontré, et ce fait bien connu des jeunes géomètres : la médiatrice d'un segment (i.e. la droite perpendiculaire à ce segment qui passe par son milieu) est l'ensemble des points à équidistance de ses extrémités.

**Q 34.** On remarque que  $X = U + V$  vérifie bien :  $\|X - U\| = \|X - V\|$ , puisque en effet :

$$\|(U + V) - U\| = \|V\| = \|U\| = \|(U + V) - V\|.$$

Donc, d'après la question précédente :  $U + V \in D^\perp$ . Il suffit donc d'écrire :

$$U = \underbrace{\frac{1}{2}(U - V)}_{\in D} + \underbrace{\frac{1}{2}(U + V)}_{\in D^\perp}$$

pour avoir la décomposition demandée dans la somme directe  $M_{n,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^\perp$ .

**Q 35.** Comme  $U$  et  $V$  ne sont pas colinéaires,  $U - V$  est non nul en particulier, et on peut donc bien appliquer les résultats de la partie II.2 avec  $U - V$  au lieu de  $V$ .

On rappelle que  $Q_{U-V}$  est la symétrie orthogonale par rapport à  $\text{Vect}(U - V)^\perp = D^\perp$  (et donc, implicitement : parallèlement à  $\text{Vect}(U - V) = D$ ). On a donc :

$$\forall X \in D, Q_{U-V}X = -X, \quad \text{et : } \forall X \in D^\perp, Q_{U-V}X = X.$$

Or  $U - V \in D$  et  $U + V \in D^\perp$  d'après la question précédente, donc :

$$Q_{U-V}(U - V) = -(U - V), \quad Q_{U-V}(U + V) = U + V.$$

On en déduit, en écrivant  $U = \frac{1}{2}(U - V) + \frac{1}{2}(U + V)$  :

$$Q_{U-V}U = \frac{1}{2}(Q_{U-V}(U - V) + Q_{U-V}(U + V)) = \frac{1}{2}(-(U - V) + (U + V)) = V.$$

**Q 36.** Il y a une erreur d'énoncé : si  $\tilde{U} \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$  et  $\tilde{V} = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ , alors  $Q\tilde{U}$  ne peut pas être colinéaire à  $\tilde{V}$ . En effet, si  $Q\tilde{U}$  est colinéaire à  $\tilde{V} = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ , alors  $Q\tilde{U} = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ . Or une matrice orthogonale est inversible, et son noyau est en particulier trivial, donc  $Q\tilde{U} \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$  dès que  $\tilde{U} \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$  : on a donc une absurdité. À mon avis, l'énoncé nous demande de considérer  $\tilde{V} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  **non nul**. C'est en tout cas ce que je suppose ci-dessous.

Soient  $\tilde{U}, \tilde{V} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ , avec  $\tilde{V}$  non nul. S'ils sont colinéaires, le résultat demandé est évident : si  $\tilde{U} = \lambda\tilde{V}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  (sous ces hypothèses, on peut toujours se ramener à une relation de dépendance linéaire de cette forme), alors en prenant  $Q = I_n$  (qui est orthogonale), on a bien :  $Q\tilde{U} = \lambda\tilde{V}$ , et donc  $Q\tilde{U}$  et  $\tilde{V}$  sont colinéaires.

Traisons à présent le cas où ils ne sont pas colinéaires (en particulier,  $\tilde{U}$  est non nul également), et posons :  $U = \frac{1}{\|\tilde{U}\|}\tilde{U}$ , et :  $V = \frac{1}{\|\tilde{V}\|}\tilde{V}$ . Alors :  $\|U\| = 1, \|V\| = 1$ , donc  $U$  et  $V$  sont de même norme, et ils ne sont pas colinéaires car  $\tilde{U}$  et  $\tilde{V}$  ne le sont pas. Alors, d'après la question précédente, on a :  $Q_{U-V}U = V$ , donc :

$$Q_{U-V}\tilde{U} = \|\tilde{U}\|Q_{U-V}U = \|\tilde{U}\|V = \|\tilde{U}\| \cdot \frac{1}{\|\tilde{V}\|}\tilde{V}.$$

En posant :  $\lambda = \frac{\|\tilde{U}\|}{\|\tilde{V}\|}$ , on a alors :  $Q_{U-V}\tilde{U} = \lambda\tilde{V}$ . D'où le résultat avec  $Q = Q_{U-V}$ .

Dans tous les cas, on a montré l'existence d'une matrice orthogonale  $Q$  telle que  $Q\tilde{U}$  soit colinéaire à  $\tilde{V}$ .

### III.2 – Factorisation $QR$

**Q 37.** Soit  $(E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ . On applique la question précédente avec  $\tilde{U} = AE_1$  et  $\tilde{V} = E_1$  (qui est bien non nul). Il existe alors une matrice orthogonale  $Q_1$  telle que  $Q_1(AE_1)$  soit colinéaire à  $E_1$  ; soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que :  $Q_1AE_1 = \alpha E_1$ . Comme  $Q_1AE_1$  est la première colonne de  $Q_1A$ , le fait que  $Q_1AE_1$  soit égal à  $\alpha E_1$  nous donne bien :

$$Q_1A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

avec  $C_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$  (les  $n - 1$  dernières colonnes sont les images par  $Q_1A$  des vecteurs  $E_2, \dots, E_n$ , dont l'expression est inutile pour répondre à cette question), ce qu'il fallait démontrer.

**Q 38.** Conformément à l'indication de l'énoncé, nous allons montrer que la proposition suivante est vraie pour tout entier  $n \geq 2$  :

$P_n$  : « pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , il existe  $Q \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $QA$  soit triangulaire supérieure. »

par récurrence sur  $n$ .

L'initialisation découle directement de la question précédente : si  $n = 2$  et si  $A \in M_2(\mathbb{R})$ , alors d'après la question précédente il existe  $Q_1 \in O_2(\mathbb{R})$  telle que :  $Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $c_1 \in \mathbb{R}$ . C'est effectivement une matrice triangulaire supérieure, d'où  $P_2$ .

À présent, soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  tel qu'on ait  $P_n$ . Soit  $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ . On applique la question précédente. Il existe  $Q_1 \in O_{n+1}(\mathbb{R})$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $C_1 \in M_n(\mathbb{R})$  tels que :

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $C_1$ , qui est d'ordre  $n$ . Il existe donc  $Q_2 \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $T = Q_2 C_1$  soit triangulaire supérieure. Alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0_{M_{1,n}(\mathbb{R})} \\ 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} & Q_2 \end{pmatrix} \times Q_1 A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_2 C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

C'est une matrice triangulaire supérieure, car  $T$  l'est. On en déduit que si l'on pose :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0_{M_{1,n}(\mathbb{R})} \\ 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} & Q_2 \end{pmatrix} \times Q_1,$$

qui est bien orthogonale en tant que produit de matrices orthogonales (car  $Q_1$  et  $Q_2$  le sont ; nous laissons le lecteur se convaincre que  $\begin{pmatrix} 1 & 0_{M_{1,n}(\mathbb{R})} \\ 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} & Q_2 \end{pmatrix}$  l'est également), alors  $QA$  est triangulaire supérieure, ce qui démontre la proposition au rang  $n + 1$ . D'où l'hérédité.

Par principe de récurrence, on a montré que pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , il existe une matrice  $Q$  orthogonale telle que  $QA$  soit triangulaire supérieure.