Mines-Ponts PSI 2020
Mathématiques 2
—
corrigé
—

I. Question préliminaire

1. Il s'agit de démontrer que la relation ORTS, définie par :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n,\ A \text{ est ORTS à } B \iff \exists Q \in \mathcal{O}_n,\ B = {}^{t}QAQ,$$

est réflexive, symétrique et transitive.

- *Réflexivité :* $\forall A \in \mathcal{M}_n$, A est ORTS à A, car $I_n \in \mathcal{O}_n$ et $A = {}^{t}I_n A I_n$.
- *Symétrie :* $\forall A, B \in \mathcal{M}_n$, A est ORTS à $B \implies B$ est ORTS à A, car si $Q \in \mathcal{O}_n$ est tel que $B = {}^{t}QAQ$, alors ${}^{t}Q = Q^{-1} \in \mathcal{O}_n$ et $A = QB\,{}^{t}Q = {}^{t}({}^{t}Q)B\,{}^{t}Q$.
- *Transitivité :* $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_n$, A est ORTS à B et B est ORTS à $C \implies A$ est ORTS à C, car si $Q, Q' \in \mathcal{O}_n$ sont tels que $B = {}^{t}QAQ$ et $C = {}^{t}Q'BQ'$, alors $QQ' \in \mathcal{O}_n$ et $C = {}^{t}Q'\,{}^{t}QAQQ' = {}^{t}(QQ')A(QQ')$.

Donc la relation ORTS est bien une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n$.

II. Exemples

2. (a) Soit $S \in \mathcal{S}_n$. On a ${}^{t}S = S$, donc :

(C$_1$) ${}^{t}S = S = P(S)$ où P est le monôme $P(X) = X$.

(C$_2$) S est normale puisqu'elle commute avec ${}^{t}S = S$.

(C$_3$) Pour tout $X \in E_n$, $\|{}^{t}SX\| = \|SX\|$ de façon évidente.

(C$_4$) D'après le théorème spectral, S est ORTS à une matrice diagonale, donc diagonale par blocs avec des blocs diagonaux tous de taille $(1, 1)$, donc S vérifie **(C$_4$)**.

(b) Soit $A \in \mathcal{A}_n$. On a ${}^{t}A = -A$, donc :

(C$_1$) ${}^{t}A = -A = P(A)$ où P est le monôme $P(X) = -X$.

(C$_2$) A est normale puisqu'elle commute avec ${}^{t}A = -A$.

(C$_3$) Pour tout $X \in E_n$, $\|{}^{t}AX\| = \|-AX\| = \|AX\|$ par homogénéité de la norme.

3. Soit $Q \in \mathcal{O}_n$. On a ${}^{t}Q = Q^{-1} \in \mathcal{O}_n$, donc :

(C$_2$) Q est normale puisqu'elle commute avec ${}^{t}Q = Q^{-1}$.

(C$_3$) Pour tout $X \in E_n$, $\|{}^{t}QX\| = \|X\| = \|QX\|$ puisque les endomorphismes de E_n canoniquement associés à Q et ${}^{t}Q = Q^{-1}$ sont des isométries.
Rq. *Cela se retrouve par le calcul* $\|QX\|^2 = {}^{t}(QX)QX = {}^{t}X\,{}^{t}QQX = {}^{t}XX = \|X\|^2$.

4. La matrice $T \in \mathcal{O}_2$ est de type $R(\theta)$ ou $S(\theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}$ (voir les rappels de cours en préambule).

(a) Cas $T = S(\theta)$.
Dans ce cas, la matrice $M = rT$ est symétrique réelle, donc d'après la question 2, elle vérifie les conditions **(C$_1$)** à **(C$_4$)**.

(b) Cas $T = R(\theta)$.
Dans ce cas, la matrice $M = rT = rR(\theta)$ vérifie la condition **(C$_4$)** de façon évidente (M est ORTS à elle-même), et elle vérifie la condition **(C$_1$)** puisque

$$
{}^{\mathrm{t}}M = r\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = 2r\cos(\theta)I_2 - r\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},
$$

donc ${}^{\mathrm{t}}M = P(M)$ où $P(X) = 2r\cos(\theta) - X \in \mathbb{R}[X]$.
Rq. *On peut « deviner » ce polynôme en en cherchant un de degré 1, ou en se souvenant que pour toute matrice inversible A de taille $(2,2)$, on a $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{tr}(A)I_2 - A)$, ce qui donne ici ${}^{\mathrm{t}}T = T^{-1} = 2\cos(\theta)I_2 - T$, ou en regardant la question 14 de la partie V.*

III. Deux premières implications

5. Si A vérifie $\mathbf{(C_1)}$, alors A vérifie $\mathbf{(C_2)}$ puisque la matrice A commute avec tout polynôme en A.

6. Supposons que A vérifie $\mathbf{(C_2)}$, i.e. que $A\,{}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}AA$. Alors pour tout $X \in E_n$:

$$
\|{}^{\mathrm{t}}AX\|^2 = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}AX)\,{}^{\mathrm{t}}AX = {}^{\mathrm{t}}XA\,{}^{\mathrm{t}}AX \overset{\mathbf{(C_2)}}{=} {}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}AAX = {}^{\mathrm{t}}(AX)AX = \|AX\|^2.
$$

Donc $\forall X \in E_n$, $\|{}^{\mathrm{t}}AX\| = \|AX\|$ (puisque les normes sont positives), i.e. A vérifie $\mathbf{(C_3)}$.

IV. La condition (C_3) implique la condition (C_4)

7. On suppose que $A = \begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ vérifie la condition $\mathbf{(C_3)}$, i.e. que $\forall X \in E_2$, $\|{}^{\mathrm{t}}AX\| = \|AX\|$.

(a) Montrons qu'on a nécessairement $b = c$ ou ($b = -c \neq 0$ et $a = d$).

- Pour $X = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, on a $\|AX\| = \sqrt{a^2+b^2} = \|{}^{\mathrm{t}}AX\| = \sqrt{a^2+c^2}$, donc $b^2 = c^2$, i.e. $b = \pm c$.
  Si $b = c$, alors on a le résultat voulu.
- Sinon, alors $b = -c \neq 0$ et pour $X = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, on a alors :

$$
\|{}^{\mathrm{t}}AX\|^2 = (a+b)^2 + (d-b)^2 = \|AX\|^2 = (a-b)^2 + (b+d)^2
$$

  i.e. après simplification $(a-d)b = (d-a)b$, et donc $a = d$ puisque $b \neq 0$.

On a donc bien nécessairement $b = c$ ou ($b = -c \neq 0$ et $a = d$).

(b)
- Si $b = c$, alors A est symétrique réelle donc A vérifie $\mathbf{(C_4)}$ d'après la question 2.
- Si $b = -c \neq 0$ et $a = d$, alors

$$
A = \begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix} = rR(\theta) = \begin{bmatrix}r\cos\theta & -r\sin\theta\\ r\sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}
$$

  où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ sont tels que $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$, i.e. où r et θ sont respectivement le module et un argument du complexe $a + ib$ (on a bien $r > 0$ car $b \neq 0$).
  Donc dans ce cas, A vérifie $\mathbf{(C_4)}$ de façon évidente (A est ORTS à elle-même).

Dans tous les cas, la matrice A vérifie donc bien la condition $\mathbf{(C_4)}$.

8. ***Rq.*** *Les deux méthodes ci-dessous présentent les mêmes calculs sous deux formes différentes.*
Méthode 1.
Les identités remarquables $\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \pm 2(u|v)$ donnent, pour tout $X \in E_n$:

- $\|(A - \lambda I_n)X\|^2 = \|AX - \lambda X\|^2 = \|AX\|^2 + \lambda^2\|X\|^2 - 2\lambda(AX|X)$, et
- $\|{}^{\mathrm{t}}(A - \lambda I_n)X\|^2 = \|({}^{\mathrm{t}}A - \lambda I_n)X\|^2 = \|{}^{\mathrm{t}}AX - \lambda X\|^2 = \|{}^{\mathrm{t}}AX\|^2 + \lambda^2\|X\|^2 - 2\lambda({}^{\mathrm{t}}AX|X)$.

Or $(AX|X) = {}^t(AX)X = {}^tX\,{}^tAX = (X|\,{}^tAX) = ({}^tAX|X)$, et on suppose que A vérifie $\mathbf{(C_3)}$, donc $\|AX\|^2 = \|\,{}^tAX\|^2$. Ainsi $\forall X \in E_n$, $\|(A-\lambda I_n)X\| = \|\,{}^t(A-\lambda I_n)X\|$ (car les normes sont positives), i.e. $A - \lambda I_n$ vérifie $\mathbf{(C_3)}$.

Méthode 2.

En revenant à la définition de la norme associée au produit scalaire, on a, pour tout $X \in E_n$:

- $\begin{aligned}\|(A-\lambda I_n)X\|^2 &= {}^tX({}^tA-\lambda I_n)(A-\lambda I_n)X = {}^tX({}^tAA - \lambda A - \lambda\,{}^tA + \lambda^2 I_n)X\ . \\ &= {}^tX\,{}^tAAX - \lambda\,{}^tXAX - \lambda\,{}^tX\,{}^tAX + \lambda^2\,{}^tXX\end{aligned}$
- $\begin{aligned}\|\,{}^t(A-\lambda I_n)X\|^2 &= {}^tX(A-\lambda I_n)({}^tA-\lambda I_n)X = {}^tX(A\,{}^tA - \lambda A - \lambda\,{}^tA + \lambda^2 I_n)X\ . \\ &= {}^tXA\,{}^tAX - \lambda\,{}^tXAX - \lambda\,{}^tX\,{}^tAX + \lambda^2\,{}^tXX\end{aligned}$

Or A vérifie $\mathbf{(C_3)}$ donc ${}^tX\,{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2 = \|\,{}^tAX\|^2 = {}^t({}^tAX)\,{}^tAX = {}^tXA\,{}^tAX$. Ainsi $\forall X \in E_n$, $\|(A-\lambda I_n)X\| = \|\,{}^t(A-\lambda I_n)X\|$ (car les normes sont positives), i.e. $A-\lambda I_n$ vérifie $\mathbf{(C_3)}$.

9. (a) Vu la question précédente (et la séparation de la norme), pour tout $X \in E_n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(A-\lambda I_n)X = 0_{E_n} &\iff \|(A-\lambda I_n)X\| = 0 \\ &\iff \|\,{}^t(A-\lambda I_n)X\| = 0 \\ &\iff {}^t(A-\lambda I_n)X = ({}^tA-\lambda I_n)X = 0_{E_n}.\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n) = \mathrm{Ker}({}^tA-\lambda I_n)$, et donc les matrices A et ${}^tA$ ont les mêmes sous-espaces propres.

(b) Soient $\lambda \neq \mu$ dans $\mathbb{R}$ et soient $X \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)$ et $Y \in \mathrm{Ker}(A-\mu I_n) = \mathrm{Ker}({}^tA-\mu I_n)$. Alors $AX = \lambda X$ et ${}^tAY = \mu Y$, donc :

$$\lambda(X|Y) = (AX|Y) = {}^t(AX)Y = {}^tX\,{}^tAY = (X|\,{}^tAY) = \mu(X|Y)$$

et donc $(X|Y) = 0$ puisque $\lambda \neq \mu$.

Les sous-espaces propres de A sont donc bien deux à deux orthogonaux.

10. Montrons que A, qui vérifie $\mathbf{(C_3)}$, est diagonalisable si et seulement si elle est symétrique.

- Si A est symétrique, alors A est diagonalisable d'après le théorème spectral.
- Supposons A diagonalisable. Alors ses sous-espaces propres sont supplémentaires dans E_n (caractérisation de la diagonalisabilité), et d'après la question 9, ils sont deux à deux orthogonaux.

  En concaténant des bases orthonormales des sous-espaces propres de A, on obtient donc une base orthonormale de diagonalisation de A, donc la matrice de passage P de la base canonique à cette base de diagonalisation est orthogonale et telle que $D = P^{-1}AP = {}^tPAP$ est diagonale.

  Ainsi $A = PD\,{}^tP$ est symétrique puisque ${}^tA = {}^t(PD\,{}^tP) = P\,{}^tD\,{}^tP = PD\,{}^tP = A$.

11. (a) Montrons comme indiqué que toute matrice orthogonalement semblable à A vérifie $\mathbf{(C_3)}$.

Soient $Q \in \mathcal{O}_n$ et $B = {}^tQAQ$. Alors pour tout $X \in E_n$, sachant que $Q\,{}^tQ = {}^tQQ = I_n$:

- $\|BX\|^2 = {}^t(BX)BX = {}^tX\,{}^tBBX = {}^tX\,{}^tQ\,{}^tAQ\,{}^tQAQX = {}^tX\,{}^tQ\,{}^tAAQX = \|AQX\|^2$
- $\|\,{}^tBX\|^2 = {}^t({}^tBX)\,{}^tBX = {}^tXB\,{}^tBX = {}^tX\,{}^tQAQ\,{}^tQ\,{}^tAQX = {}^tX\,{}^tQA\,{}^tAQX = \|\,{}^tAQX\|^2$

Or A vérifie $\mathbf{(C_3)}$ et $QX \in E_n$, donc $\|AQX\| = \|\,{}^tAQX\|$. Ainsi $\forall X \in E_n$, $\|BX\| = \|\,{}^tBX\|$ (car les normes sont positives), i.e. B vérifie $\mathbf{(C_3)}$.

(b) Montrons que A est ORTS à une matrice de type $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient $\mathbf{(C_3)}$, avec $p \in \{1, 2\}$.

- D'après le théorème 1 du préambule, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A admet une droite ou un plan stable. Notons F ce sous-espace stable, $p \in \{1,2\}$ sa dimension, et Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ adaptée à F (i.e. commençant par une base orthonormale de F).
  Alors Q est orthogonale (comme matrice de passage entre deux bases orthonormales) et la matrice $B = Q^{-1}AQ = {}^tQAQ$ est la matrice de f dans une base adaptée au sous-espace stable F, donc est triangulaire supérieure par blocs, de type
  $$B = {}^tQAQ = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$
  où $A_1 \in \mathcal{M}_p$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ et où A_3 est une matrice réelle de taille $(p, n-p)$.
- Montrons que $A_3 = 0$.
  D'après l'indication montrée en (a), la matrice B vérifie la condition $\mathbf{(C_3)}$, donc $\forall X \in E_n$, $\|BX\|^2 = \|{}^tBX\|^2$, i.e. en explicitant ces calculs de normes comme en (a) :
  $$(\star) : \quad \forall X \in E_n, \quad {}^tX\,{}^tBBX = {}^tXB\,{}^tBX.$$
  Or pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n$ et tout $i \in [\![1;n]\!]$, en notant e_i le i-ème élément de la base canonique de E_n (i.e. la colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf le i-ème qui vaut 1), le calcul ${}^te_iMe_i$ donne le i-ème coefficient diagonal $(M)_{i,i}$ de M.
  Vu $(\star)$, les matrices ${}^tBB$ et $B\,{}^tB$ ont donc les mêmes coefficients diagonaux. Or un calcul par blocs donne
  $${}^tBB = \begin{bmatrix} {}^tA_1A_1 & {}^tA_1A_3 \\ {}^tA_3A_1 & {}^tA_3A_3 + {}^tA_2A_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B\,{}^tB = \begin{bmatrix} A_1\,{}^tA_1 + A_3\,{}^tA_3 & A_3\,{}^tA_2 \\ A_2\,{}^tA_3 & A_2\,{}^tA_2 \end{bmatrix}$$
  donc les égalités des coefficients diagonaux de ${}^tBB$ et $B\,{}^tB$ donnent en particulier, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $({}^tA_1A_1)_{i,i} = (A_1\,{}^tA_1)_{i,i} + (A_3\,{}^tA_3)_{i,i}$ et donc en sommant ces égalités :
  $$\operatorname{tr}({}^tA_1A_1) = \operatorname{tr} A_1\,{}^tA_1) + \operatorname{tr}(A_3\,{}^tA_3).$$
  Or par propriété usuelle de la trace, on a $\operatorname{tr}({}^tA_1A_1) = \operatorname{tr}(A_1\,{}^tA_1)$, et donc :
  $$\operatorname{tr}(A_3\,{}^tA_3) = \operatorname{tr}({}^tA_3A_3) = \|A_3\|^2 = 0$$
  où l'on a encore noté $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire usuel $(M,N) \mapsto \operatorname{tr}({}^tMN)$ sur $\mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$. Ainsi $\|A_3\| = 0$, et donc $A_3 = 0$ (par séparation de la norme).
  Ainsi A est orthogonalement semblable à la matrice $B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$.
- Montre que A_1 et A_2 vérifient $\mathbf{(C_3)}$.
  En calculant par blocs les produits de l'égalité $(\star)$ ci-dessus, avec $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ où $X_1 \in E_p$ et $X_2 \in E_{n-p}$, on obtient :
  $$\forall (X_1, X_2) \in E_p \times E_{n-p}, \quad {}^tX_1\,{}^tA_1A_1X_1 + {}^tX_2\,{}^tA_2A_2X_2 = {}^tX_1A_1\,{}^tA_1X_1 + {}^tX_2A_2\,{}^tA_2X_2.$$
  En considérant successivement les cas où $X_2 = 0$ puis $X_1 = 0$, on obtient :
  $$\begin{cases} \forall X_1 \in E_p, \quad {}^tX_1\,{}^tA_1A_1X_1 = {}^tX_1A_1\,{}^tA_1X_1, & \text{i.e.} \quad \|A_1X_1\|^2 = \|{}^tA_1X_1\|^2 \\ \forall X_2 \in E_{n-p}, \quad {}^tX_2\,{}^tA_2A_2X_2 = {}^tX_2A_2\,{}^tA_2X_2 & \text{i.e.} \quad \|A_2X_2\|^2 = \|{}^tA_2X_2\|^2 \end{cases}$$
  où l'on a encore noté $\|\cdot\|$ les normes associées aux produits scalaires usuels sur E_p et E_{n-p}. Ainsi $\forall X_1 \in E_p$, $\|A_1X_1\| = \|{}^tA_1X_1\|$ et $\forall X_2 \in E_{n-p}$, $\|A_2X_2\| = \|{}^tA_2X_2\|$ (car les normes sont positives), i.e. A_1 et A_2 vérifient $\mathbf{(C_3)}$.

12. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\forall A \in \mathcal{M}_n$, A vérifie $\mathbf{(C_3)} \Longrightarrow A$ vérifie $\mathbf{(C_4)}$.

- *Initialisation.*
  Le cas $n = 1$ est trivial puisque toute matrice de $\mathcal{M}_1$ vérifie $\mathbf{(C_3)}$ et $\mathbf{(C_4)}$.
  Le cas $n = 2$ a été démontré en question 7.
- *Hérédité.*
  Soit $n \geqslant 3$ tel que toute matrice carrée de taille $\leqslant n-1$ vérifiant $\mathbf{(C_3)}$ vérifie aussi $\mathbf{(C_4)}$.
  Soit alors $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant $\mathbf{(C_3)}$.
  D'après la question 11, A est orthogonalement semblable à une matrice $B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient $\mathbf{(C_3)}$, avec $p \in \{1, 2\}$. Par hypothèse de récurrence, les matrices A_1 et A_2 vérifient donc aussi $\mathbf{(C_4)}$, i.e. sont ORTS à des matrices B_1 et B_2 diagonales par blocs avec des blocs diagonaux de type (λ) ou $rR(\theta)$, où $r > 0$ et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$.
  Notons $Q_1 \in \mathcal{O}_p$ et $Q_2 \in \mathcal{O}_{n-p}$ des matrices telles que $B_1 = {}^{t}Q_1 A_1 Q_1$ et $B_2 = {}^{t}Q_2 A_2 Q_2$. Alors un calcul par blocs donne :
  $$\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t}Q_1 & 0 \\ 0 & {}^{t}Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$
  et la matrice $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$ est orthogonale puisque
  $${}^{t}QQ = \begin{bmatrix} {}^{t}Q_1 & 0 \\ 0 & {}^{t}Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t}Q_1 Q_1 & 0 \\ 0 & {}^{t}Q_2 Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} = I_n.$$
  Ainsi par transitivité de la relation ORTS, A est ORTS à la matrice $\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$, qui est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (λ) ou $rR(\theta)$, où $r > 0$ et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$, puisque c'est le cas de B_1 et B_2. Ainsi A vérifie $\mathbf{(C_4)}$.
- *Conclusion.*
  On en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie $\mathbf{(C_3)}$, alors A vérifie $\mathbf{(C_4)}$.

V. La condition (C_4) implique la condition (C_1)

13. (a) *Méthode 1.*
L'application $\varphi : \mathbb{C}_{n-1}[X] \to \mathbb{C}^n$, $P \mapsto (P(z_1), \ldots, P(z_n))$, est clairement linéaire et injective (car le seul polynôme de degré $\leqslant n-1$ admettant n racines distinctes est le polynôme nul). Et comme les espaces $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{C}^n$ sont de même dimension finie (à savoir n), l'application φ est un isomorphisme.
Ainsi le n-uplet $(\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n}) \in \mathbb{C}^n$ a un unique antécédent par φ. Autrement dit, il existe un unique $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $P(z_k) = \overline{z_k}$.
Méthode 2 (constructive, avec les polynômes de Lagrange).
Considérons, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, le polynôme L_k défini par $L_k(X) = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{X - z_j}{z_k - z_j}$.
Par construction, L_k est de degré $n-1$, admet les z_j pour $j \neq k$ comme racines, et vaut 1 en z_k.
De plus si des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sont tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k L_k = 0$, alors en évaluant en z_j, où $j \in [\![1; n]\!]$, on trouve $\lambda_j = 0$, donc la famille $(L_1, \ldots, L_n)$ est libre, et est donc une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ au vu de son cardinal.

Ainsi tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ se décompose de façon unique comme combinaison linéaire

$$P = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k,$$

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, et l'on a alors, à nouveau en évaluant en z_j, $P(z_j) = \lambda_j$, donc :

$$\forall j \in [\![1; n]\!], P(z_j) = \overline{z_j} \iff \forall j \in [\![1; n]\!], \lambda_j = \overline{z_j}.$$

D'où l'existence et l'unicité de $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $\forall j \in [\![1; n]\!], P(z_j) = \overline{z_j}$: c'est l'unique polynôme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ dont les coordonnées dans la base $(L_1, \ldots, L_n)$ sont les scalaires $\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n}$.

(b) On suppose de plus que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\overline{z_k} \in Z$, donc on a aussi $P(\overline{z_k}) = \overline{\overline{z_k}} = z_k$.
Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ revient à montrer que $\overline{P} = P$, où $\overline{P}$ est le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P. Et vu l'unicité montrée en (a), il suffit pour cela de montrer que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\overline{P}(z_k) = \overline{z_k}$.
Or il est clair que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})$, donc pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\overline{P}(z_k) = \overline{P(\overline{z_k})} = \overline{z_k}$.
On a donc bien $\overline{P} = P$, i.e. $P \in \mathbb{R}[X]$.

14. Notons $\chi(X) = X^2 - \operatorname{tr}(rR(\theta))X + \det(rR(\theta)) = X^2 - 2r\cos(\theta)X + r^2 = (X - r\mathrm{e}^{i\theta})(X - r\mathrm{e}^{-i\theta})$ le polynôme caractéristique de la matrice $rR(\theta)$, et

$$P(X) = \chi(X)B(X) + aX + b$$

la division euclidienne de P par χ, où $B \in \mathbb{R}[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

Puisque $\chi(r\mathrm{e}^{i\theta}) = 0$, on a $P(r\mathrm{e}^{i\theta}) = ar\mathrm{e}^{i\theta} + b = r\mathrm{e}^{-i\theta}$, i.e. en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$ar\cos(\theta) + b = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad ar\sin(\theta) = -r\sin(\theta).$$

Et comme χ est annulateur de $rR(\theta)$ (par le théorème de Cayley-Hamilton ou par calcul direct), on obtient :

$$P(rR(\theta)) = arR(\theta) + bI_2 = \begin{bmatrix} ar\cos(\theta) + b & -ar\sin(\theta) \\ ar\sin(\theta) & ar\cos(\theta) + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta) & r\sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix} = {}^{\mathrm{t}}(rR(\theta)).$$

Rq. *Si $\sin(\theta) = 0$, alors $P(r\cos(\theta)) = r\cos(\theta)$, et $rR(\theta) = r\cos(\theta)I_2$, donc de façon évidente, $P(rR(\theta)) = rR(\theta) = {}^{\mathrm{t}}(rR(\theta))$. Mais il n'est pas nécessaire de distinguer ce cas dans les calculs précédents.*

15. Soit $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant $\mathbf{(C_4)}$, i.e. A est orthogonalement semblable à une matrice $B \in \mathcal{M}_n$ diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (λ) ou $rR(\theta)$, où $r > 0$ et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$.

Soit alors $Q \in \mathcal{O}_n$ telle que $B = {}^{\mathrm{t}}QAQ$, i.e. telle que $A = QB\,{}^{\mathrm{t}}Q$.

Notons $(\lambda_1), \ldots, (\lambda_p)$ les (éventuels) blocs diagonaux de B de taille $(1, 1)$, et $r_1R(\theta_1), \ldots, r_qR(\theta_q)$ les (éventuels) blocs diagonaux de B de taille $(2, 2)$, et posons :

$$Z = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p, r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}, r_1\mathrm{e}^{-i\theta_1}, \ldots, r_q\mathrm{e}^{i\theta_q}, r_q\mathrm{e}^{-i\theta_q}\}.$$

Par construction, pour tout $z \in Z$, on a $\overline{z} \in Z$, et donc d'après la question 13, appliquée en notant $z_1, \ldots, z_n$ les éléments deux à deux distincts de la liste $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}, r_1\mathrm{e}^{-i\theta_1}, \ldots, r_q\mathrm{e}^{i\theta_q}, r_q\mathrm{e}^{-i\theta_q}$, il existe un polynôme réel P tel que pour tout $z \in Z$, $P(z) = \overline{z}$, i.e. tel que :

$$\forall k \in [\![1; p]\!], P(\lambda_k) = \lambda_k \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1; q]\!], P(r_k\mathrm{e}^{i\theta_k}) = r_k\mathrm{e}^{-i\theta_k}.$$

D'après la question 14, on a alors $\forall k \in [\![1; q]\!]$, $P(r_kR(\theta_k)) = {}^{\mathrm{t}}(r_kR(\theta_k))$, et donc par un calcul par blocs, $P(B) = {}^{\mathrm{t}}B$. On conclut alors avec le théorème 2 du préambule que :

$$P(A) = QP(B)\,{}^{\mathrm{t}}Q = Q\,{}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}Q = {}^{\mathrm{t}}(QB\,{}^{\mathrm{t}}Q) = {}^{\mathrm{t}}A.$$

Donc A vérifie $\mathbf{(C_1)}$.

Rq. *On a ainsi montré par les questions 5, 6, 12 et 15 que les conditions $\boldsymbol{(C_1)}$, $\boldsymbol{(C_2)}$, $\boldsymbol{(C_3)}$ et $\boldsymbol{(C_4)}$ sont équivalentes, donc le premier objectif du problème est atteint.*

VI. Exponentielle d'une matrice normale

16. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{r^k \cos(k\theta)}{k!}\right| \leqslant \frac{|r|^k}{k!}$ et $\left|\frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}\right| \leqslant \frac{|r|^k}{k!}$, et la série exponentielle $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{|r|^k}{k!}$ converge, donc par comparaison, les séries $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!}$ et $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}$ convergent absolument, donc convergent.

    (b) Par linéarité de la somme des séries convergentes, puisque $\cos(k\theta) + i\sin(k\theta) = \mathrm{e}^{ik\theta}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} + i\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(r\mathrm{e}^{i\theta})^k}{k!} = \mathrm{e}^{r\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{r\cos(\theta)}\mathrm{e}^{ir\sin(\theta)}$$

donc en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} = \mathrm{e}^{r\cos(\theta)}\cos(r\sin\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} = \mathrm{e}^{r\cos(\theta)}\sin(r\sin\theta).$$

17. Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, de sorte que $AB = (c_{i,j})$ où $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$.

    Alors $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $|c_{i,j}| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i,k}||b_{k,j}| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \|A\|_\infty\|B\|_\infty = n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

    Donc $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

18. Comme suggéré par l'énoncé, on note $(M)_{i,j}$ le coefficient d'indices (i,j) d'une matrice M.

    Rappels. *On rappelle qu'une suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_n$ converge vers une matrice M dans $\mathcal{M}_n$ si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, la suite de terme général $(M_p)_{i,j}$ converge vers $M_{i,j}$.*

    (a) Montrer que la suite $(S_p(A))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n$ revient à montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, la suite de terme général $(S_p(A))_{i,j} = \sum\limits_{k=0}^{p} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ converge, i.e. que la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ converge.

    Or par récurrence immédiate à partir de la question 17, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|A^k\|_\infty \leqslant (n\|A\|_\infty)^k$, donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left|\frac{(A^k)_{i,j}}{k!}\right| \leqslant \frac{\|A^k\|_\infty}{k!} \leqslant \frac{(n\|A\|_\infty)^k}{k!},$$

et la série exponentielle $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(n\|A\|_\infty)^k}{k!}$ converge, donc par comparaison, la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ converge absolument, donc converge.

Ainsi la suite $(S_p(A))_{p\in\mathbb{N}}$ converge bien dans $\mathcal{M}_n$.

    (b) Soit $Q \in \mathcal{O}_n$. Par le théorème 2 du préambule, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S_p({}^{\mathrm{t}}QAQ) = {}^{\mathrm{t}}QS_p(A)Q.$$

Or par définition de l'exponentielle d'une matrice donnée en (a), on a $S_p({}^{\mathrm{t}}QAQ) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Exp}({}^{\mathrm{t}}QAQ)$.

Et vu la définition du produit matriciel (ou puisque l'application $M \mapsto {}^{\mathrm{t}}QMQ$ est continue car linéaire en dimension finie, ou via la question 17), on a ${}^{\mathrm{t}}QS_p(A)Q \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} {}^{\mathrm{t}}Q\,\mathrm{Exp}(A)Q$.

Donc par unicité de la limite :

$$\mathrm{Exp}({}^{\mathrm{t}}QAQ) = {}^{\mathrm{t}}Q\,\mathrm{Exp}(A)Q.$$

19. (a) Par caractérisation séquentielle des fermés, montrer que $\mathcal{E}_n$ est fermé revient à montrer que pour toute suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}_n$ convergeant vers une matrice $B \in \mathcal{M}_n$, on a $B \in \mathcal{E}_n$.

Mais si $A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} B$, alors de façon évidente, ${}^{\mathrm{t}}A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} {}^{\mathrm{t}}B$ (on peut aussi invoquer la continuité de la transposition, qui est continue car linéaire en dimension finie), et donc vu la définition du produit matriciel (ou via la question 17) :

$$A_p\,{}^{\mathrm{t}}A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} B\,{}^{\mathrm{t}}B \quad \text{et} \quad {}^{\mathrm{t}}A_pA_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} {}^{\mathrm{t}}BB.$$

Ainsi si pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p \in \mathcal{E}_n$, i.e. si $A_p\,{}^{\mathrm{t}}A_p = {}^{\mathrm{t}}A_pA_p$, alors en passant à la limite, $B\,{}^{\mathrm{t}}B = {}^{\mathrm{t}}BB$, i.e. $B \in \mathcal{E}_n$.

On a donc montré par caractérisation séquentielle que $\mathcal{E}_n$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n$.

(b) Si $A \in \mathcal{E}_n$, i.e. si A et ${}^{\mathrm{t}}A$ commutent, alors tout polynôme en A commute avec tout polynôme en ${}^{\mathrm{t}}A$, donc en particulier, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A)$ et $P({}^{\mathrm{t}}A) = {}^{\mathrm{t}}(P(A))$ commutent, i.e. $P(A) \in \mathcal{E}_n$.
Ainsi si $A \in \mathcal{E}_n$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p(A) \in \mathcal{E}_n$, et donc par (a), $\mathrm{Exp}(A) \in \mathcal{E}_n$.

20. (a) On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $R(\theta)^k = R(k\theta)$. Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$S_p(rR(\theta)) = \sum_{k=0}^{p} \frac{r^k}{k!} R(k\theta) = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{p} \frac{r^k\cos(k\theta)}{k!} & -\sum_{k=0}^{p} \frac{r^k\sin(k\theta)}{k!} \\ \sum_{k=0}^{p} \frac{r^k\sin(k\theta)}{k!} & \sum_{k=0}^{p} \frac{r^k\cos(k\theta)}{k!} \end{bmatrix}.$$

Ainsi vu la question 16 :

$$\mathrm{Exp}(rR(\theta)) = \lim_{p\to+\infty} S_p(rR(\theta)) = \mathrm{e}^{r\cos(\theta)} \begin{bmatrix} \cos(r\sin\theta) & -\sin(r\sin\theta) \\ \sin(r\sin\theta) & \cos(r\sin\theta) \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{r\cos(\theta)} R(r\sin\theta).$$

(b) Notons $\mathcal{G}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ qui sont ORTS à une matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (μ) ou $\alpha R(\beta)$, où $\mu, \alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.
On montre que $\mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{G}_n$ par double inclusion.

- Soit $A \in \mathcal{E}_n$. Montrons que $\mathrm{Exp}(A) \in \mathcal{G}_n$.
Les conditions $\mathbf{(C_2)}$ et $\mathbf{(C_4)}$ étant équivalentes, A est ORTS à une matrice B diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (λ) ou $rR(\theta)$, où $r > 0$ et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$.
D'après la question 18, $\mathrm{Exp}(A)$ est alors ORTS à $\mathrm{Exp}(B)$.
Mais pour tout $p \in \mathbb{N}$, un calcul par blocs montre que la matrice $S_p(B)$ est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type $S_p((\lambda)) = (\sum_{k=0}^{p} \frac{\lambda^k}{k!})$ ou $S_p(rR(\theta))$, donc en passant à la limite quand $p \to +\infty$, on voit avec (a) que $\mathrm{Exp}(B)$ est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (e^{λ}) ou $\mathrm{Exp}(rR(\theta)) = \mathrm{e}^{r\cos(\theta)}R(r\sin\theta)$.
Comme $\mu = \mathrm{e}^{\lambda} > 0$, $\alpha = \mathrm{e}^{r\cos(\theta)} > 0$, et $\beta = r\sin\theta \in \mathbb{R}$, cela montre que $\mathrm{Exp}(A) \in \mathcal{G}_n$.
D'où l'inclusion $\mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{G}_n$.
- Soit $M \in \mathcal{G}_n$. Montrons l'existence d'une matrice $A \in \mathcal{E}_n$ telle que $M = \mathrm{Exp}(A)$.
Puisque $M \in \mathcal{G}_n$, M est ORTS à une matrice N diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (μ) ou $\alpha R(\beta)$, où $\mu, \alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.
Soit alors $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $N = {}^{\mathrm{t}}QMQ$, i.e. $M = QN\,{}^{\mathrm{t}}Q$.
Puisque $R(0) = R(2\pi) = I_2$, on peut supposer que pour chaque bloc diagonal de type $\alpha R(\beta)$ dans N, on a $(\alpha, \beta) \neq (1, 0)$, quitte à changer $\beta = 0$ en $\beta = 2\pi$, ou à voir le bloc $R(0) = I_2$ comme deux blocs (1) de taille $(1, 1)$.
Soit alors $B \in \mathcal{M}_n$ la matrice diagonale par blocs déduite de N en remplaçant :
  * chaque bloc diagonal de type (μ) de N par un bloc (λ) où $\lambda = \ln(\mu)$,
  * chaque bloc diagonal de type $\alpha R(\beta)$ de N par un bloc $rR(\theta)$ où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ sont respectivement le module et un argument du complexe $\ln(\alpha) + i\beta$, qui est non nul puisqu'on a supposé $(\alpha, \beta) \neq (1, 0)$ (ce qui garantit que $r = |\ln(\alpha) + i\beta| > 0$ et que θ est bien défini modulo 2π), de sorte que $r\cos(\theta) = \ln(\alpha)$, i.e. $\mathrm{e}^{r\cos(\theta)} = \alpha$, et $r\sin(\theta) = \beta$.

Et soit enfin $A = QB\,{}^{\mathrm{t}}Q$, de sorte que $B = {}^{\mathrm{t}}QAQ$.
Alors par définition, A est ORTS à B qui est du type décrit en **($\mathbf{C_4}$)**, donc A vérifie **($\mathbf{C_4}$)**, i.e. $A \in \mathcal{E}_n$ puisque les conditions **($\mathbf{C_4}$)** et **($\mathbf{C_2}$)** sont équivalentes.
Et vu la question 18, $\mathrm{Exp}(B) = {}^{\mathrm{t}}Q\,\mathrm{Exp}(A)Q$. Mais vu les calculs faits dans le point précédent, on a $\mathrm{Exp}(B) = N$, donc

$$\mathrm{Exp}(A) = Q\,\mathrm{Exp}(B)\,{}^{\mathrm{t}}Q = QN\,{}^{\mathrm{t}}Q = M.$$

Ainsi $M \in \mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n)$. D'où l'inclusion $\mathcal{G}_n \subset \mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n)$.

- On a donc bien, par double inclusion, $\mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{G}_n$.

21. Vu la question 20, il s'agit de démontrer que $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_n$, avec la notation $\mathcal{G}_n$ qui y est introduite. On procède par double inclusion.

- Soit $M \in \mathcal{G}_n$, i.e. $M \in \mathcal{M}_n$ et M est ORTS à une matrice N diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (μ) ou $\alpha R(\beta)$, où $\mu, \alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Et soit $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $N = {}^{\mathrm{t}}QMQ$.
  Montrons que $M \in \mathcal{F}_n$.
  - Montrons que les valeurs propres négatives de M sont de multiplicité paire.
    Puisque les matrices M et N sont semblables, elles ont les mêmes valeurs propres, et un calcul par blocs montre que le polynôme caractéristique de N est un produit de termes de type :
    * $X - \mu$ pour chaque bloc diagonal de N de type (μ), et
    * $\chi_{\alpha R(\beta)} = X^2 - \mathrm{tr}(\alpha R(\beta))X + \det(\alpha R(\beta)) = X^2 - 2\alpha\cos(\beta)X + \alpha^2 = (X - \alpha \mathrm{e}^{i\beta})(X - \alpha \mathrm{e}^{-i\beta})$ pour chaque bloc diagonal de N de type $\alpha R(\beta)$ (calcul déjà fait en question 14).

    Les valeurs propres de M sont donc les réels $\mu > 0$ pour chaque bloc diagonal de N de type (μ), et les complexes $\alpha \mathrm{e}^{\pm i\beta}$ pour chaque bloc diagonal de N de type $\alpha R(\beta)$.
    Les valeurs propres négatives de M sont donc les éventuels $\alpha \mathrm{e}^{\pm i\beta}$ où $\beta \equiv \pi\,[2\pi]$, auquel cas $\alpha \mathrm{e}^{i\beta} = \alpha \mathrm{e}^{-i\beta} = -\alpha$. Ces valeurs propres sont donc de multiplicité paire, chaque bloc $\alpha R(\pi)$ apportant deux copies de la valeur propre $-\alpha$.
  - Montrons que $M = ST = TS$ où $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$.
    Un calcul par blocs montre que $N = S_1T_1 = T_1S_1$, où les matrices diagonales par blocs S_1 et T_1 se déduisent de N en remplaçant :
    * chaque bloc diagonal de type (μ) de N par un bloc (μ) dans S_1 et un bloc (1) dans T_1,
    * chaque bloc diagonal de type $\alpha R(\beta)$ de N par un bloc αI_2 dans S_1 et un bloc $R(\beta)$ dans T_1.

    On a alors $S_1 \in \mathcal{S}_n^{++}$ de façon évidente (car S_1 est diagonale et à coefficients diagonaux strictement positifs), et $T_1 \in \mathcal{SO}_n$ puisque des calculs par blocs montrent que ${}^{\mathrm{t}}T_1T_1 = I_n$ et $\det(T_1) = 1$. Et on a alors $M = QN\,{}^{\mathrm{t}}Q = (QS_1\,{}^{\mathrm{t}}Q)(QT_1\,{}^{\mathrm{t}}Q) = (QT_1\,{}^{\mathrm{t}}Q)(QS_1\,{}^{\mathrm{t}}Q)$, i.e.

    $$M = ST = TS$$

    où $S = QS_1\,{}^{\mathrm{t}}Q \in \mathcal{S}_n^{++}$ puisque ${}^{\mathrm{t}}S = {}^{\mathrm{t}}(QS_1\,{}^{\mathrm{t}}Q) = Q\,{}^{\mathrm{t}}S_1\,{}^{\mathrm{t}}Q = QS_1\,{}^{\mathrm{t}}Q = S$ et que S et S_1 sont semblables donc ont les mêmes valeurs propres, et où $T = QT_1\,{}^{\mathrm{t}}Q \in \mathcal{SO}_n$ puisqu'un produit de matrices orthogonales est une matrice orthogonale et que T et T_1 sont semblables donc ont le même déterminant.

  Donc par définition, $M \in \mathcal{F}_n$. D'où l'inclusion $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$.
- Soit $B \in \mathcal{F}_n$, i.e. B a toutes ses (éventuelles) valeurs propres négatives de multiplicité paire, et $B = ST = TS$ où $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$.
  Montrons que $B \in \mathcal{G}_n$, i.e. en notant b l'endomorphisme de E_n canoniquement associé à B, qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E_n dans laquelle la matrice B' de b est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (μ) ou $\alpha R(\beta)$, où $\mu, \alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

– Notons respectivement s et t les endomorphismes de E_n canoniquement associés à S et T. Par hypothèse, s est un endomorphisme symétrique à valeurs propres strictement positives, et t est une rotation (i.e. une isométrie de déterminant 1) de E_n.
Comme s est symétrique, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, et d'après le théorème spectral, ils sont supplémentaires dans E_n.

– Soit $\lambda > 0$ une valeur propre de s.
Comme t commute avec s (car $ST = TS$), t stabilise le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(S - \lambda I_n)$ de s, et comme t est une isométrie, l'endomorphisme t_λ induit par t sur $\operatorname{Ker}(S - \lambda I_n)$ est encore une isométrie, de sorte que sa matrice T_λ dans une base orthonormale de $\operatorname{Ker}(S - \lambda I_n)$ est une matrice orthogonale.
Mais alors T_λ vérifie **($\mathbf{C_2}$)** (cf. question 3), donc aussi **($\mathbf{C_4}$)** (ces conditions étant équivalentes). Autrement dit, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_\lambda$ de $\operatorname{Ker}(S - \lambda I_n)$ dans laquelle la matrice T'_λ de t_λ est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (ν) ou $rR(\theta)$, où $r > 0$ et $\nu, \theta \in \mathbb{R}$. De plus comme T'_λ est inversible (car t_λ l'est puisque c'est une isométrie), les blocs diagonaux de type (ν) de T'_λ sont nécessairement tous non nuls.

> ***Rq.*** *Plus précisément, les blocs diagonaux de T'_λ de taille $(1, 1)$ sont égaux à (± 1), et ceux de taille $(2, 2)$ sont de type $R(\theta)$ (i.e. avec $r = 1$) puisque T'_λ est orthogonale (comme matrice d'une isométrie dans une base orthonormale), donc ses colonnes sont normées.*
> *Cela généralise la réduction des isométries en dimension $\leqslant 3$, au programme de la classe PSI, au cas des isométries en dimension finie arbitraire.*

Comme l'endomorphisme s_λ induit par s sur $\operatorname{Ker}(S - \lambda I_n)$ est l'homothétie de rapport λ, sa matrice dans la base $\mathcal{B}_\lambda$ (comme dans toute base) est λI_p où $p = \dim \operatorname{Ker}(S - \lambda I_n)$.
Ainsi $b = s \circ t = t \circ s$ stabilise $\operatorname{Ker}(S - \lambda I_n)$ et y induit un endomorphisme b_λ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_\lambda$ est $\lambda T'_\lambda$, donc est diagonale par blocs de type (μ) ou $\alpha R(\theta)$, où $\mu = \lambda\nu \neq 0$ et $\alpha = \lambda r > 0$ (car $\lambda, r > 0$ et $\nu \neq 0$).

– En concaténant les bases orthonormales $\mathcal{B}_\lambda$ de chaque sous-espace propre $\operatorname{Ker}(S - \lambda I_n)$ de s, on obtient ainsi une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E_n (car les sous-espaces propres de s sont deux à deux orthogonaux) dans laquelle la matrice B' de b est $\operatorname{Diag}((\lambda T'_\lambda)_{\lambda \in \operatorname{Sp}(s)})$, donc est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (μ) ou $\alpha R(\beta)$, où $\mu \neq 0$, $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, puisque c'est le cas des matrices $\lambda T'_\lambda$.
Enfin, les éventuels blocs diagonaux de type (μ) avec $\mu < 0$ dans B' correspondent aux valeurs propres négatives de b, et apparaissent donc un nombre pair de fois par hypothèse sur B. Quitte à réordonner la base $\mathcal{B}$, on peut supposer que ces blocs sont consécutifs dans B', ce qui permet de les regrouper deux par deux en des blocs de type $\mu I_2 = -\mu R(\pi)$, où $-\mu > 0$.
Donc B est bien ORTS à une matrice B' diagonale par blocs avec des blocs de type (μ) ou $\alpha R(\beta)$, où $\mu, \alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On a ainsi montré que $B \in \mathcal{G}_n$. D'où l'inclusion $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n$.

- On a donc bien, par double inclusion, $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}_n$.

22. Vu la question 21, il s'agit de voir si $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{F}_n$.

Or par définition, B est une matrice orthogonale (car ses colonnes forment une base orthonormale de E_n), de déterminant $(-1)^{n+1}$ et de polynôme caractéristique $\chi_B(X) = \det(XI_n - B) = X^n - 1$ (en développant ces deux déterminants par rapport à la première colonne, le second redonnant le premier en l'évaluant en 0), d'où la discussion suivante :

- Si n est pair, alors B admet -1 comme valeur propre de multiplicité 1, impaire, donc $B \notin \mathcal{F}_n$.
- Si n est impair, alors B n'admet pas de valeur propre négative et appartient à $\mathcal{SO}_n$, donc $B \in \mathcal{F}_n$ (avec la décomposition évidente $B = ST = TS$ où $S = I_n$ et $T = B$).