Mathématiques, DS 07-B : type CCINP. Durée : 3h

Ce devoir comporte deux exercices complètement indépendants.

A. Quelques propriétés des matrices antisymétriques

Correction

CCINP PSI 2017

Présentation générale. On se propose ici d'étudier certaines propriétés des matrices antisymétriques réelles. Après avoir étudié un exemple en dimension 2 , on utilise les matrices antisymétriques pour paramétrer un sous-ensemble des matrices orthogonales.

Notations.

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels et, pour tout entier $n > 0, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour tout entier $n > 0$, on désigne par $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ antisymétriques à coefficients réels et par $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices $n \times n$ orthogonales à coefficients réels. Le groupe spécial orthogonal est constitué des matrices orthogonales de déterminant 1.

A-I. Un exemple en dimension 2

1. Soit t un réel et soit $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres complexes de A.

Correction

On calcule
$$\chi_A(X) = X^2 + t^2 = (X - it)(X + it),$$
donc $\boxed{\text{les valeurs propres complexes de } A \text{ sont } -it \text{ et } it.}$

2. Calculer $R = (\mathrm{I}_2 + A)(\mathrm{I}_2 - A)^{-1}$ et montrer que R est une matrice du groupe spécial orthogonal.

Correction

On remarque que
$$\mathrm{I}_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix},$$
qui est une matrice 2×2, de déterminant égal à $1+t^2 \neq 0$, donc $\mathrm{I}_2 - A$ est bien inversible, d'inverse
$$\boxed{(\mathrm{I}_2 - A)^{-1} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} R &= (\mathrm{I}_2 + A)(\mathrm{I}_2 - A)^{-1} \\ &= \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} RR^\top &= \frac{1}{(1+t^2)^2}\begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-t^2 & -2t \\ 2t & 1-t^2 \end{pmatrix} \\ &\boxed{= \frac{1}{(1+t^2)^2}\begin{pmatrix} (1-t^2)^2+4t^2 & 0 \\ 0 & (1-t^2)^2+4t^2 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2.} \end{aligned}$$

Ainsi $R \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Mais, de plus,

$$\det(R) = \frac{1}{(1+t^2)^2}\left((1-t^2)^2 + 4t^2\right) = 1,$$

donc $\boxed{R \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}).}$

3. Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer $M = (\mathrm{I}_2 + R_\theta)^{-1}(\mathrm{I}_2 - R_\theta)$.

Correction

On note

$$A = (\mathrm{I}_2 + R_\theta) = \begin{pmatrix} 1+\cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 1+\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\det(A) = 1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \boxed{= 2(1+\cos(\theta)) \neq 0}$$

Ainsi, A est bien inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2(1+\cos(\theta)}\begin{pmatrix} 1+\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 1+\cos(\theta) \end{pmatrix}}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} M &= (\mathrm{I}_2 + R_\theta)^{-1}(\mathrm{I}_2 - R_\theta) \\ &= \frac{1}{2(1+\cos(\theta)}\begin{pmatrix} 1+\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 1+\cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 1-\cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &\boxed{= \frac{1}{2(1+\cos(\theta)}\begin{pmatrix} 0 & 2\sin(\theta) \\ -2\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

A-II. Matrices antisymétriques et matrices orthogonales

Dans ce qui suit, n désigne un entier strictement positif.

4. Soient B et C deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si C est inversible et $BC = CB$, alors $BC^{-1} = C^{-1}B$.

Correction

On sait que $BC = CB$, donc $B = CBC^{-1}$, donc $\boxed{C^{-1}B = BC^{-1}}$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Soit λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ un vecteur propre associé. En calculant de deux façons

$$(AX)^\top \overline{X}$$

montrer que λ est un complexe imaginaire pur (éventuellement nul).

Correction

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\alpha = (AX)^\top \overline{X}$. Alors

$$\alpha = X^\top A^\top \overline{X} = -X^\top A\overline{X} = -X^\top \overline{\lambda X} \boxed{= -\overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.}$$

Ensuite, comme α est un complexe,

$$\alpha = \alpha^\top = \overline{X}^\top AX = \overline{X}^\top \lambda X \boxed{= \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.}$$

Ainsi, $\lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = -\overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$. Mais comme X est non nul, $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \neq 0$ donc

$$\boxed{\overline{\lambda} = -\lambda, \text{ i.e. } \lambda \in i\mathbb{R}.}$$

6. Déduire de la question précédente que si A est antisymétrique réelle, alors $\mathrm{I}_n + A$ est inversible et :

$$(\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + A)^{-1} = (\mathrm{I}_n + A)^{-1}(\mathrm{I}_n - A)$$

Montrer que $R = (\mathrm{I}_n + A)^{-1}(\mathrm{I}_n - A)$ est une matrice orthogonale.

Correction

Soit A antisymétrique. Démontrons les trois points demandés :

- on sait que le spectre de A est inclus dans $i\mathbb{R}$, donc -1 n'est pas valeur propre de A. Ainsi, $\boxed{\mathrm{I}_n + A \text{ est inversible.}}$
- Ensuite, $(\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + A) = (\mathrm{I}_n + A)(\mathrm{I}_n - A) = \mathrm{I}_n - A^2$, donc, par la question 4., $\boxed{(\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + A)^{-1} = (\mathrm{I}_n + A)^{-1}(\mathrm{I}_n - A)}$.

- Enfin,

$$\begin{aligned}
R^\top R &= \left((\mathrm{I}_n + A)^{-1}(\mathrm{I}_n - A)\right)^\top (\mathrm{I}_n + A)^{-1}(\mathrm{I}_n - A)\\
&= (\mathrm{I}_n - A)^\top \left((\mathrm{I}_n + A)^{-1}\right)^\top (\mathrm{I}_n + A)^{-1}(\mathrm{I}_n - A)\\
&= (\mathrm{I}_n + A)(\mathrm{I}_n - A)^{-1}(\mathrm{I}_n + A)^{-1}(\mathrm{I}_n - A)\\
&= (\mathrm{I}_n - A)^{-1}(\mathrm{I}_n + A)(\mathrm{I}_n + A)^{-1}(\mathrm{I}_n - A) \text{ par commutation}\\
&= (\mathrm{I}_n - A)^{-1}(\mathrm{I}_n - A)\\
&= \mathrm{I}_n.
\end{aligned}$$

Donc R est orthogonale.

7. Calculer le déterminant de R.

Correction

Question difficile !
Comme R est orthogonale, son déterminant vaut 1 ou -1.
Ensuite, on examine les valeurs propres de A : il y a 0, possédant une certaine multiplicité, puis des $(i\alpha_1, \dots, i\alpha_r)$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont réels. Mais comme A est réelle, si $i\alpha_k$ est valeur propre de A, $-i\alpha_k$ est aussi valeur propre de A. Ainsi, on peut dire que r est nécessairement pair et que les valeurs propres non nulles de A sont en fait

$$(i\alpha_1, \dots, i\alpha_s, -i\alpha_1, \dots, -i\alpha_s)$$

Ainsi, en trigonalisant A dans $\mathbb{C}$, on a

$$\det(A + \mathrm{I}_n) = \prod_{k=1}^{s}(1 + i\alpha_k)(1 - i\alpha_k) \boxed{= \prod_{k=1}^{s}(1 + \alpha_k^2)}$$

et, **de même**,

$$\det(\mathrm{I}_n - A) = \prod_{k=1}^{s}(1 + i\alpha_k)(1 - i\alpha_k) \boxed{= \prod_{k=1}^{s}(1 + \alpha_k^2).}$$

On conclut que

$$\boxed{\det(R) = \frac{\det(\mathrm{I}_n - A)}{\det(\mathrm{I}_n + A)} = 1.}$$

8. Soit R une matrice orthogonale telle que $\mathrm{I}_n + R$ soit inversible. Démontrer que la matrice $A = (\mathrm{I}_n + R)^{-1}(\mathrm{I}_n - R)$ est antisymétrique.

Correction

On sait que

$$(\mathrm{I}_n + R)A = \mathrm{I}_n - R$$

En transposant, on obtient

$$A^\top(\mathrm{I}_n + R^\top) = \mathrm{I}_n - R^\top.$$

Mais, comme R est orthogonale, $R^\top = R^{-1}$ donc

$$A^\top(\mathrm{I}_n + R^{-1}) = \mathrm{I}_n - R^{-1}.$$

En multipliant à droite par R, on obtient

$$A^\top(R + \mathrm{I}_n) = R - \mathrm{I}_n,$$

donc

$$A^\top = -(\mathrm{I}_n - R)(R + \mathrm{I}_n)^{-1} = -\left(\mathrm{I}_n + R\right)^{-1}\left(\mathrm{I}_n - R\right) = -A,$$

la commutation étant licite toujours par le même argument de la question 4.. Ainsi, $\boxed{A \text{ est antisymétrique.}}$

9. On suppose ici que $n = 3$ et que $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure usuelle d'espace euclidien orienté par la base canonique. Soit r une rotation d'angle $\theta \in]-\pi, \pi[$ autour d'un axe orienté par un vecteur u de norme 1 et soit $R \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base canonique. Montrer qu'il existe une matrice antisymétrique $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$R = \left(\mathrm{I}_3 + A\right)^{-1}\left(\mathrm{I}_3 - A\right).$$

Correction

- Comme r est une rotation, on sait que, dans une base adaptée à la décomposition $\mathrm{Vect}(u) \oplus^\perp \mathrm{Vect}(u)^\perp$, la matrice de r est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ainsi, le polynôme caractéristique de r est

$$\begin{aligned} \chi_r(X) &= (X-1)\left((X - \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2\right) \\ &= (X-1)\left(X^2 - 2X\cos(\theta) + \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2\right) \\ &= (X-1)(X^2 - 2X\cos(\theta) + 1). \end{aligned}$$

On vérifie alors que -1 n'est pas valeur propre de r :

$$\boxed{\chi_r(-1) = 2(1 + 2\cos(\theta) + 2) = 4(1 + \cos(\theta)) \neq 0,}$$

car $\theta \in]-\pi, \pi[$. Ainsi, -1 n'est pas valeur propre de r, et donc n'est pas valeur propre de R.

- On pose alors

$$A = \left(\mathrm{I}_3 + R\right)^{-1}\left(\mathrm{I}_3 - R\right).$$

La matrice A est une matrice antisymétrique par la question précédente. De plus, on sait que

$$(\mathrm{I}_3 + R)A = \mathrm{I}_3 - R,$$

donc

$$RA + R = \mathrm{I}_3 - A,$$

donc

$$(\mathrm{I}_3 + A)R = (\mathrm{I}_3 - A).$$

Mais, A étant antisymétrique, $\mathrm{I}_3 + A$ est inversible car les valeurs propres de A sont imaginaires pures, donc

$$\boxed{R = (\mathrm{I}_3 + A)^{-1}(\mathrm{I}_3 - A).}$$

Le résultat est ainsi prouvé.

B. Décomposition de Cholesky

Correction

E3A PC 2013

Cet exercice a pour but d'étudier la décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique réelle définie positive.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- $\mathcal{M}_\mathrm{n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre n .
- $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, I_n désigne la matrice identité.
- $O_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques réelles.
- Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(f_1, \ldots, f_k)$ une famille de vecteurs de E , $\mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_k)$ désigne le sous espace vectoriel engendré par la famille $(f_1, \ldots, f_k)$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_\mathrm{n}(\mathbb{R}), \mathrm{Sp(A)}$ désigne l'ensemble des valeurs propres réelles de A et $A^\top$ la transposée de A.
- $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.
  Par définition, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(A) \subset]0, +\infty[$.
- $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs.
- $\mathbb{R}^n$ sera identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ensemble des matrices réelles avec n lignes et 1 colonne.
- Lorsque $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique : $\|X\|^2 = X^\top X$.

B-I. Étude d'un exemple numérique

On considère, dans cette partie B-I. uniquement, la matrice $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Énoncer le théorème qui permet de justifier qu'il existe une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $P^\top SP = D$ où D est une matrice diagonale.

Correction

La matrice S étant symétrique réelle, le théorème spectral (sans « e ») assure qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telle que $S = PDP^{-1}$.

2. Déterminer P et D telles que $\det(P) = 1$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ où $\alpha < \beta < \gamma$ puis justifier que $S \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$.

Correction

- On commence par calculer le polynôme caractéristique de S : si $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\chi_S(x) &= \begin{vmatrix} x-3 & 0 & -2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ -2 & 0 & x-3 \end{vmatrix} \\ &= (x-3)(x-2)(x-3) - 4(x-2) \\ &= (x-2)\left(x^2 - 6x + 9 - 4\right) \\ &= (x-2)(x^2 - 6x + 5) \\ &= (x-2)(x-1)(x-5).\end{aligned}$$

On a donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

- On recherche ensuite les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre :
  — déjà,
  $$S - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
  On voit que $C_1 = C_3$, donc $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(S - \mathrm{I}_3) = E_1(S)$ donc, comme chaque sous-espace propre est de dimension 1, $E_1(S) = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $\|e_1\| = 1$.
  — ensuite,
  $$S - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  Ainsi, on voit que $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(S - 2\mathrm{I}_3) = E_2(S)$ donc, comme chaque sous-espace propre est de dimension 1, $E_2(S) = \mathrm{Vect}(e_2)$,
  — enfin, on calcule
  $$e_3 = e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
  On peut vérifier que $e_3 \in E_5(S)$ mais l'orthogonalité des sous-espaces propres nous l'assurait.

  De plus, par définition, (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée **directe** de $\mathbb{R}^3$ donc, en posant
  $$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
  on a le résultat désiré.

3. Démontrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{T}_3^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = B^\top B$. On explicitera la matrice B.

Correction

Là, ce n'est pas du tout évident, on fait une analyse-synthèse.
Analyse. Soit

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_3^{++}(\mathbb{R}).$$

Alors

$$\begin{aligned} B^\top B &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2+d^2 & bc+ce \\ ca & cb+de & c^2+e^2+f^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mais $B^\top B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On en déduit donc les choses suivantes :

- en étudiant le coefficient $(1,1)$, $a^2 = 3$ donc $a = \sqrt{3}$ (car $a > 0$)
- en étudiant le coefficient $(1,2)$, $ab = 0$ donc $b = 0$
- en étudiant le coefficient $(1,3)$, $ac = 2$ donc $c = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$
- en étudiant le coefficient $(2,2)$, $d^2 = 2$ donc $d = \sqrt{2}$
- en étudiant le coefficient $(2,3)$, $bc + ce = 0$ donc $ce = 0$ donc $e = 0$
- en étudiant le coefficient $(3,3)$, $\dfrac{4}{3} + f^2 = 3$ donc $f = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

Ainsi, nécessairement,

$$\boxed{B = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}}$$

La **synthèse** est immédiate.

B-II. Résultats préliminaires

4. On considère $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que :

$$\varphi_s : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (X, Y) \mapsto X^\top S Y \end{array} \right. \quad \text{est un produit scalaire sur } \mathbb{R}^n$$

Correction

Vérifions les propriétés d'un produit scalaire :

- **symétrie**. Soient X et Y dans $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\varphi_S(Y, X) = Y^\top S X \in \mathbb{R}$$

Comme $\varphi_S(Y,X)$ est un réel, il est égal à son transposé, donc

$$\begin{aligned}\varphi_S(Y,X) &= \varphi_S(Y,X)^\top\\ &= \left(Y^\top SX\right)^\top\\ &= (SX)^\top Y\\ &= X^\top S^\top Y\\ &= X^\top SY \text{ car } S \text{ est symétrique.}\\ &\boxed{= \varphi_S(X,Y)}\end{aligned}$$

Donc φ_S est symétrique,

- **bilinéarité.** Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $(Y,Y') \in (\mathbb{R}^n)^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi_S(X_0, \lambda Y + \mu Y') &= X_0^\top S(\lambda Y + \mu Y')\\ &= \lambda X_0^\top SY + \mu X_0^\top SY'\\ &\boxed{= \lambda\varphi_S(X_0,Y) + \mu\varphi_S(X_0,Y')}\end{aligned}$$

Donc φ_S est linéaire par rapport à la première variable et, par bilinéarité, par rapport à la seconde.

- caractère **défini positif**. Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\varphi_S(X) = X^\top SX = \langle X, SX\rangle\,,$$

en notant $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Mais $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc on sait que pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\boxed{\langle SX, X\rangle > 0.}$ On en déduit donc que $\boxed{\varphi_S(X) \geqslant 0}$ et que si $X \neq 0$, $\varphi_S(X) > 0$. Par contraposée, $\boxed{\text{si } \varphi_S(X) = 0, \text{ alors } X = 0}$. Donc φ_S est définie positive.

Ainsi, $\boxed{\varphi_S \text{ définit bien un produit scalaire sur } \mathbb{R}^n.}$

5. On considère la **Proposition :** $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que
- $\forall M \in \mathcal{T}_n^{++}$, $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$,
- $\mathrm{I}_n \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$,
- $\forall (M,N) \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})^2,\ MN \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$,
- $\forall M \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R}),\ M^{-1} \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Démontrer cette proposition pour $n = 2$. Dans la suite, on admettra le résultat pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction

C'est un peu pénible, mais bon...

- soit $M \in \mathcal{T}_2^{++}(\mathbb{R})$. Alors on dispose de (a,b,c) trois réels tels que $M = \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$. Comme $a > 0$ et $c > 0$, M est de déterminant $ac \neq 0$ donc M est bien inversible. On vérifie directement que

$$M^{-1} = \frac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & -b\\ 0 & a\end{pmatrix} \in \mathcal{T}_2^{++}(\mathbb{R}).$$

- $\mathrm{I}_2 \in \mathcal{T}_2^{++}(\mathbb{R})$ de manière évidente,

- si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$ sont dans $\mathcal{T}_2^{++}(\mathbb{R})$, alors

$$MM' = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_2^{++}(\mathbb{R}) \text{ car } aa' > 0 \text{ et } cc' > 0.$$

Donc $\mathcal{T}_2^{++}(\mathbb{R})$ est bien un sous-groupe de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$.

B-III. Une caractérisation des matrices symétriques réelles définies positives

Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$, on pose $B = A^\top A$.

6. Montrer que $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Correction

On calcule

$$B^\top = (A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A = B,$$

donc $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

7. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre associé à λ, alors $\|Ax\|^2 = \lambda\|x\|^2$ en déduire que $\lambda \in [0, +\infty[$.

Correction

On calcule

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= (Ax)^\top Ax \\ &= x^\top A^\top Ax \\ &= x^\top Sx \\ &= x^\top \lambda x \\ &\boxed{= \lambda \|x\|^2,} \end{aligned}$$

donc, $\boxed{\text{comme } \|Ax\|^2 \geqslant 0 \text{ et } x \neq 0}$, on en déduit que $\boxed{\lambda \geqslant 0.}$

8. En déduire que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Correction

Déjà, on vient de démontrer que $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$, donc $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A^\top \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ donc $S = A^\top A$ aussi. Donc 0 n'est pas valeur propre de S, donc $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$,
- si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\det(S) \neq 0$, donc $\det(A^\top A) \neq 0$, i.e. $\det(A)^2 \neq 0$, donc A est inversible.

L'équivalence est ainsi démontrée.

B-IV. Décomposition de Cholesky

Le but de cette question est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1

$S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = A^\top A$. Cette décomposition s'appelle décomposition de Cholesky de S.

On considère $S \in \mathcal{S}_\mathrm{n}(\mathbb{R})$.

9. Montrer que s'il existe $A \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = A^\top A$ alors $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Correction

Comme $A \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors A est inversible, donc, par la question précédente, $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

10. On suppose qu'il existe A_1, A_2 deux matrices de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A_1^\top A_1 = A_2^\top A_2$.

(a) Montrer que $\Delta = A_1 (A_2)^{-1}$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

Correction

On remarque que

- comme $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un groupe, $\Delta \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- mais aussi, comme $A_1^\top A_1 = A_2^\top A_2$, on en déduit, en multipliant à droite par A_2^{-1} et à gauche par $(A_1^\top)^{-1}$, que

$$\Delta = (A_1^\top)^{-1} A_2^\top.$$

  Mais $A_1^\top$ et $A_2^\top$ sont triangulaires inférieures, donc $(A_1^\top)^{-1} A_2^\top$ est triangulaire inférieure.

Donc Δ est triangulaire supérieure et inférieure, donc diagonale. De plus, $\Delta \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc ses coefficients diagonaux sont positifs.

(b) En déduire, en utilisant $A_1^\top A_1 = A_2^\top A_2$, que $\Delta^2 = \mathrm{I}_n$.

Correction

Comme Δ est diagonale, $\Delta^\top = \Delta$, donc

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= \Delta^\top \Delta \\ &= \left(A_2^{-1}\right)^\top A_1^\top A_1 (A_2)^{-1} \\ &= \left(A_2^{-1}\right)^\top A_2^\top A_2 (A_2)^{-1} \\ &\boxed{= \mathrm{I}_n.}\end{aligned}$$

(c) En déduire que $A_1 = A_2$.

Correction

On sait que Δ est diagonale, que $\Delta^2 = \mathrm{I}_n$, que les coefficients diagonaux de Δ sont strictement positifs, donc, finalement, $\boxed{\Delta = \mathrm{I}_n.}$

On en déduit donc que $\boxed{A_1 = A_2.}$

11. On suppose $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et on considère φ_S le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ défini en B-II.. Soit $\mathrm{b} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{b}' = (v_1, \ldots, v_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de b pour le produit scalaire φ_S. On note A la matrice de passage de la base b′ à la base b.

(a) Montrer $A \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Correction

Par définition, on sait que pour tout k, $v_k \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ (c'est le principe de l'orthonormalisé de Gram-Schmidt). Ainsi, A est bien triangulaire supérieure.
De plus, dans l'algorithme, on pose

$$w_{k+1} = e_{k+1} - \pi_{\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k)}(e_{k+1})$$

et

$$v_{k+1} = \frac{w_{k+1}}{\|w_{k+1}\|}$$

On en déduit que les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs.

(b) Montrer que $S = A^\top A$.

Correction

On sait que

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathrm{b}}(v_1, \ldots, v_n)$$

Comme pour tous i, j, $\varphi_S(v_i, v_j) = \delta_{ij}$, on en déduit que pour

$$v_j^\top S v_i = \delta_{ij}$$

Mais $v_i = A^{-1} e_i$, donc pour tous (i, j),

$$e_j^\top((A^{-1})^\top S A^{-1}) e_i = \delta_{ij},$$

ce qui signifie que

$$\boxed{(A^{-1})^\top S A^{-1} = \mathrm{I}_n.}$$

$\boxed{\text{On conclut donc que } S = A^\top A.}$