PSI – Programme de colles
Semaine 19 – du 10 au 14 mars 2025

Programme en bref.

- Cours sur les espaces euclidiens et la topologie (en topologie, j'ai parlé de continuité d'applications et juste défini les ouverts/fermés).
- Exercices sur les endomorphismes des espaces euclidiens.

Exemples de questions de cours

1. Pour $u \in \mathscr{S}(E)$, équivalence entre « $\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0$ » et « le spectre de u est dans $\mathbb{R}_+$. »
2. Si $u \in \mathscr{S}(E)$ et $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ sont ses valeurs propres, encadrement de $\langle u(x), x\rangle$ à l'aide de λ_1 et λ_n.

3. Pour une application linéaire, équivalence entre
   - continue
   - continue en 0
   - bornée sur la boule unité fermée
   - il existe $K > 0$, $\|u(x)\| \leq K\|x\|$ pour tout x
   - lipschitzienne
4. Si E est de dimension finie et $u : E \to F$ est linéaire, alors u est continue (on admet l'équivalence des normes en dimension finie !)
5. Une boule ouverte est ouverte.
6. Une boule fermée est fermée. (en définissant fermé comme « stable par passage à la limite »)
7. Le complémentaire d'un ouvert est un fermé.
8. Le complémentaire d'un fermé est un ouvert.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Endomorphismes d'un espace euclidien

Cette section vise les objectifs suivants :

- *étudier les isométries vectorielles et matrices orthogonales, et les décrire en dimension deux et trois en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *approfondir la thématique de réduction des endomorphismes dans le cadre euclidien en énonçant les formes géométrique et matricielle du théorème spectral ;*
- *introduire la notion d'endomorphisme autoadjoint positif, qui trouvera notamment son application au calcul différentiel d'ordre 2.*

La notion d'adjoint est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.	Exemple : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions.
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Matrices orthogonales	
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^\top A = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ».
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation. Bases orthonormées directes.	
c) Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base orthonormée directe : produit mixte.	Notations $[u, v]$, $[u, v, w]$. Interprétation géométrique comme aire ou volume.
Produit vectoriel. Calcul dans une base orthonormée directe.	
Orientation d'un plan ou d'une droite dans un espace euclidien orienté de dimension 3.	
d) Isométries vectorielles d'un plan euclidien	
Description des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.	Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	
e) Isométries d'un espace euclidien de dimension 3	
Description des matrices de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.	
Rotation vectorielle d'un espace euclidien orienté de dimension 3.	Axe et mesure de l'angle d'une rotation.
f) Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles	
Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien.	Notation $\mathcal{S}(E)$. Caractérisation des projecteurs orthogonaux.
Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant celle d'« endomorphisme autoadjoint ».
Théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.	La démonstration n'est pas exigible. Forme matricielle du théorème spectral.
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$.
Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.