 nlaillet.math@gmail.com

Semaine 18 – Colle du lundi 03/03 à 8h

<table>
<tr><th>Nom</th><th>Énoncé et commentaires</th><th>Note</th></tr>
<tr><td></td><td>

Colle Python. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note également $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement définies positives).

1. **[Py]** Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $M^T M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. En déduire une fonction Python d'argument n générant aléatoirement une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$.
2. **[Py]** À l'aide de la fonction précédente, vérifier l'inégalité de la question 6 pour des matrices A et B de $S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

On admet l'inégalité de Jensen : si φ est une fonction convexe sur I, pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{I}^n$, pour tous $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ réels positifs tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$, alors

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(x_i).$$

4. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$. Montrer que
$$\left(\prod_{i=1}^n (1+\lambda_i)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}}$$
5. Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\sqrt[n]{\det(\mathrm{I}_n + B)} \geqslant 1 + \sqrt[n]{\det(B)}$$
6. En déduire que pour $(A, B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,
$$\sqrt[n]{\det(A+B)} \geqslant \sqrt[n]{\det(A)} + \sqrt[n]{\det(B)}$$
7. Montrer que le résultat est encore valable lorsque $(A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
8. Étudier le cas d'égalité lorsque $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

1. **Cours.** Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme étant les seuls projecteurs autoadjoints.
2. Soit E un espace vectoriel euclidien, soit u un endomorphisme autoadjoint de E et soient (e_i), (f_j) deux bases orthonormales de E.
   (a) Démontrer que
   $$\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u(f_i)\|^2$$
   (b) Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Démontrer que
   $$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

1. **Cours.** Définition et caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint positif.
2. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.
   (a) Montrer que tout vecteur est orthogonal à son image.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.
   (c) Montrer que 0 est la seule valeur propre de f.
   (d) Montrer que $f \circ f$ est symétrique.
   (e) Montrer que le rang de f est pair.
   (f) Caractériser f lorsque $\dim(E) = 3$.

</td><td></td></tr>
</table>