 nlaillet.math@gmail.com

Semaine 18 – Colle du mardi 04/03 à 15h

<table>
<tr><th>Nom</th><th>Énoncé et commentaires</th><th>Note</th></tr>
<tr><td></td><td>
1. Cours. Si $\mathcal{B}$ est une BON, $u \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Soient E un espace euclidien et $u \in E$. Déterminer les réels α tels que $x \mapsto \alpha\langle u, x\rangle u - x$ soit une isométrie de E.
3. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive, dont aucun coefficient n'est nul.
(a) Démontrer qu'il existe $M \in \mathcal{S}_isn^+(\mathbb{R})$ telle que $A = M^2$.
(b) En déduire que pour tous i et j, $a_{ij}^2 \leqslant a_{ii}a_{jj}$.
Soit la matrice $B = (b_{ij})$, avec $b_{ij} = \dfrac{1}{a_{ij}}$. On suppose que la matrice B (qui est bien sûr symétrique), est aussi positive.
(c) Démontrer que pour tous i, j, $a_{ij}^2 = a_{ii}a_{jj}$.
(d) En déduire que M est de rang 1.
(e) Montrer enfin qu'il existe une matrice-colonne V (à coefficients tous non nuls) telle que $A = VV^T$.
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>
1. Cours. Si $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ sont ses valeurs propres, encadrement de $\langle u(x), x\rangle$ à l'aide de λ_1 et λ_n.
2. Soient E un espace euclidien de dimension n et $v \in \mathscr{L}(E)$.
(a) Montrer que $S = \sum_{i=1}^{n} \langle v(e_i), e_i\rangle$ ne dépend pas de la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E choisie.
(b) Montrer que $T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle v(e_i), f_j\rangle^2$ ne dépend pas des bases orthonormées $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ choisies.
(c) Calculer la valeur de T lorsque v est un projecteur orthogonal de rang r.
3. Soient $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\Omega S = M\Omega$ si et seulement si $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\chi_S = \chi_M$.
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>
1. Cours. Si $u \in \mathcal{S}(E)$ et F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.
2. Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n+1,$(e_0, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, a un vecteur unitaire tel que $\langle a, e_0\rangle = 0$. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $a_k = \langle a, e_k\rangle$ et
$$S = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
On note s l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(e_0, \ldots, e_n)$ est S.
(a) Montrer que S est diagonalisable. Montrer que l'un des a_k au moins est non nul ; déterminer le rang de S.
(b) Déterminer $\ker(s)$ et $(\ker(s))^\perp$.
(c) Calculer $\mathrm{tr}\, s$ et $\mathrm{tr}\, s^2$. En déduire les valeurs propres non nulles de s. Déterminer les espaces propres associés à ces valeurs propres non nulles.
3. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Déterminer les $u \in \mathscr{L}(E)$ tels que, pour tout sous-espace V de E, on ait $u\left(V^\perp\right) = u(V)^\perp$.
</td><td></td></tr>
</table>