N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Semaine 19 – Colle du lundi 09/03 à 8h

Nom	Énoncé et commentaires	Note
	On note $A^\top$ la transposée d'une matrice A. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note également $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$(resp. $\mathbb{R}_+^*$). **1.** Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $x^\top M x \geqslant 0$ pour tout vecteur $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. **2.** **[Py]** (a) Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $M^\top M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. En déduire une fonction Python d'argument un entier naturel n générant aléatoirement une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$. (b) Écrire une fonction Python prenant en arguments une matrice $M = \left(M_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier naturel p et renvoyant les deux matrices $M' = \left(M_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ et $M'' = \left(M_{i,j}\right)_{p+1\leqslant i,j\leqslant n}$. (c) A l'aide des deux fonctions précédentes, comparer $\det(M)$ et $\det\left(M'\right)\det\left(M''\right)$ pour plusieurs matrices $M \in \mathcal{S}_{\mathrm{n}}^+(\mathbb{R})$ choisies aléatoirement. **3.** Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A) \leqslant \det(B)$. On pourra commencer par traiter le cas $A = \mathrm{I}_n$. **4.** On note M la matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ définie par blocs $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ où $A \in GL_p(\mathbb{R})$. (a) Montrer que $A \in \mathcal{S}_{\mathrm{p}}^{++}(\mathbb{R})$. (b) On pose $S = D - CA^{-1}B$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_{n-p}^+(\mathbb{R})$. (c) Montrer que $\det(M) \leqslant \det(A)\det(D)$. **5.** Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(M) \leqslant \prod_{i=1}^{n} M_{i,i}$.	
	1. **Cours.** Une boule ouverte est ouverte. **2.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = M^\top M$. (a) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. (b) Soit $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille orthonormée de colonnes telle que la famille $(MX_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ soit orthogonale. Montrer que les X_i sont des vecteurs propres de A.	
	1. **Cours.** Le complémentaire d'un ouvert est fermé. **2.** Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de dimension n non nulle. On pose $$H_u = \{x \in E \mid (u(x) \mid x) = 1\}$$ (a) Justifier que u est diagonalisable. On note $\lambda_{\min}$ la plus petite valeur propre de u, $\lambda_{\max}$ la plus grande. (b) Démontrer que si $H_u \neq \emptyset$, alors $\lambda_{\min} \leqslant 1 \leqslant \lambda_{\max}$. (c) Établir la réciproque.	