Chapitre 15
Calcul différentiel – résumé de cours

1 Dérivation de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On dit que f est dérivable en t_0 lorsque $\dfrac{1}{t-t_0}\cdot(f(t)-f(t_0))$ admet une limite quand t tend vers t_0. Cette limite est alors appelée dérivée de f en t_0, et notée $f'(t_0)$.

Remarque 2

1. Cela équivaut à la dérivabilité en t_0 des coordonnées de f dans la base canonique.
2. Cela revient à dire que f admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0.
3. Une combinaison linéaire d'applications dérivables en t_0 est dérivable en t_0.

Remarque 3

Ce n'est plus vraiment dans l'idée du programme de PSI, mais quand même... Si $F : \mathrm{I}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, alors on dit que F est un **arc paramétré** : en pensant à t le paramètre de temps, $F(t)$ est en fait un la position d'un point M, ou, plus précisément, un vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$.
La **trajectoire** du point M, ou la **courbe paramétrée** décrite par F est l'ensemble $\{F(t), t\in\mathrm{I}\}$.
On interprète alors $F'(t)$ comme $\dfrac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$, c'est-à-dire le vecteur vitesse.
On a alors l'interprétation suivante : le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.

Proposition 4

Si L est une application linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et f dérivable en t_0 alors $L\circ f$ est dérivable en t_0, avec $(L\circ f)'(t_0)=L(f'(t_0))$.

Proposition 5

Si M est multilinéaire et $f_1,\dots,f_p$ sont dérivables en t_0 alors $g : t\mapsto M(f_1(t),\dots,f_p(t))$ est dérivable en t_0, avec $g'(t_0)=\displaystyle\sum_{k=1}^{p} g_k(t_0)$ où $g_k(t_0)$ est $g(t_0)$ où l'on a remplacé $f_k(t_0)$ par $f_k'(t_0)$.

Exemple 6

1. Démontrer que dans un mouvement circulaire, le vecteur vitesse est orthogonal au vecteur position.

2. Soit $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$. Calculer $\Delta_n'(x)$; en déduire la valeur de $\Delta_n(x)$.

Proposition 7

Si $\varphi : J \to \mathrm{I}$ est dérivable en t_0 et f dérivable en $\varphi(t_0)$ alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0, avec $(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0) \cdot f'(\varphi(t_0))$.

Définition 8

Pour $k \geqslant 1$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I lorsque f est dérivable sur I et f' de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur I. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \geqslant 1$.

2 Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Dans toute cette partie, U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

2.1 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

2.1.1 Dérivées partielles, différentielle, gradient

Définition 9

Soit f une application d'un ouvert U d'un espace de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en un point a de U suivant le vecteur v lorsque l'application $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0. Cette dérivée est alors notée $D_v f(a)$.

Définition 10

Soit U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $a = (x_1, \dots, x_p) \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$.

1. On dit que f admet en a une dérivée partielle selon la i-ème coordonnée lorsque f est dérivable en a selon le i-ème vecteur de la base canonique. On note alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (ou $\partial_i f(a)$) la valeur de cette dérivée.
2. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U lorsqu'elle admet en tout point de U des dérivées partielles selon toutes les coordonnées, et que : $\forall i, a \mapsto \partial_i f(a)$ est continue sur U.

Proposition 11

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors, pour tout a de U, on a

$$f(a+h) \underset{h\to 0_E}{=} f(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(a) + o(\|h\|).$$

Remarque 12

1. L'égalité précédente est à comprendre sous la forme : il existe $\varepsilon : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(h) \underset{h\to 0_E}{\longrightarrow} 0$ et telle que pour tout h tel que $a+h \in U$,

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(a) + \|h\|\, \varepsilon(h).$$

2. Peu importe la norme choisie : en dimension finie, elles sont toutes équivalentes.
3. Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est continue !

Proposition 13

Une somme/un produit/une composée de fonctions $\mathscr{C}^1$ est $\mathscr{C}^1$.

Définition 14

L'application $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(a)$ est appelée différentielle de f en a.

Exemple 15

1. Si f est une forme linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, calculons la différentielle de f.
2. Calculons la différentielle du déterminant $\det : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Définition 16

Lorsque f admet des dérivées partielles dans toutes les directions en a, on définit le gradient de f en a, noté $\nabla f(a)$ et défini par

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_p f(a) \end{pmatrix}.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Remarque 17

On remarque que, comme $\mathrm{d}f(a)$ est une forme linéaire, par le théorème de représentation des formes linéaires, il existe un unique vecteur u tel que $\langle u, x\rangle = \mathrm{d}f(a).x$. Ce u, c'est exactement $\nabla f(a)$. On a donc
$$\mathrm{d}f(a).x = \langle \nabla f(a), x\rangle$$

2.1.2 Composition

Proposition 18

Si $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E$ est dérivable en t, et si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert contenant $g(\mathrm{I})$, alors $f \circ g$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))\,(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i'(t)\partial_i f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$$

Proposition 19

Si f est de classe C^1 sur un ouvert convexe U, f est constante sur U si, et seulement si, sa différentielle est identiquement nulle.

Proposition 20

On considère $(x_1, \dots, x_p)$, n fonctions $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, f une fonction $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. On note
$$g(u_1, \dots, u_p) = f\left(x_1(u_1, \dots, u_p), \dots, x_p(u_1, \dots, u_p)\right).$$
Alors g est $\mathscr{C}^1$ pour tout i dans $[\![1, p]\!]$,

$$\partial_i g(u_1, \dots, u_p) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f\left(x_1(u_1, \dots, u_p), \dots, x_p(u_1, \dots, u_p)\right) \partial_i x_j(u_1, \dots, u_p).$$

On peut l'écrire avec les autres notations (mais qui peuvent être dangereuses !)

$$\frac{\partial g}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u_i}.$$

Exemple 21 (Des exemples importants)

1. **Changement de coordonnées en polaire.**
   Vérifier que si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $F(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, alors
   $$r\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ et } \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$
   Utiliser ce changement de variables pour résoudre l'équation aux dérivées partielles
   $$y\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

2. Soit f de classe $\mathscr{C}^1$, $p = \partial_1 f$ et $q = \partial_2 f$. Exprimer, à l'aide de p et q, les dérivées par rapport à x, puis à y, de
   - $(x, y) \mapsto f(x - y, x + y)$
   - $(x, y) \mapsto f(y, x)$
   - $(x, y) \mapsto x^2 f(2xy, xe^y)$
3. Résoudre
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y),$$
en réalisant le changement de variables $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$.

2.2 Problèmes d'extremum, dérivées d'ordre 2

Définition 22

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U. Un point a est dit régulier lorsque le gradient de f en a n'est pas nul. Dans le cas contraire, le point a est dit critique.

Proposition 23

Si f est $\mathscr{C}^1$ sur un **ouvert** de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ présente un extremum local en un point, alors ce point est un point critique de f.

Point de méthode 24

Une méthode pour déterminer le maximum et/ou le minimum d'une fonction f sur un fermé borné F.

1. Utiliser le théorème des bornes atteintes pour dire que la fonction admet un maximum et un minimum.
2. Dire que f atteint donc ses extremums ou bien à l'intérieur de F, ou bien sur le bord de F.
3. Rechercher les points critiques de f à l'intérieur de F : ce sont des candidats potentiels.
4. Rechercher le maximum et le minimum de f sur le bord de F : souvent, ce bord permet de se ramener à l'étude d'une fonction d'une seule variable.

Exemple 25

Soit $f(x, y) = y^2 - x^2 y + x^2$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$. Rechercher le maximum et le minimum de f sur D.

On a un autre moyen de comprendre les extremums, en utilisant la généralisation de la notion de dérivée seconde.

Définition 26

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U, on définit, lorsqu'elles existent, les dérivées partielles d'ordre 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$$

On note, si $i = j$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Lorsqu'elles existent toutes et sont toutes continues sur U, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$.

Proposition 27 (Théorème de Schwarz)

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Définition 28

On définit alors la matrice hessienne en a d'une application $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, notée $H_f(a) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, [H_f(a)]_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Remarque 29

Par le théorème de Schwarz, $H_f(a) \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$.

Proposition 30

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ alors

$$\begin{aligned} f(a+h) &\underset{\|h\|\to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(a)h, h\rangle + o\left(\|h\|^2\right) \\ &\underset{\|h\|\to 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o\left(\|h\|^2\right) \end{aligned}$$

Proposition 31

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur U et a un point critique, alors :

1. (condition **nécessaire** de minimum local) Si f présente un minimum local en a, alors $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$
   En particulier, si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$, alors f ne présente pas de minimum local en a.
2. (condition **suffisante** de minimum local) Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, f présente un minimum local strict en a

On adapte la proposition pour le maximum en prenant $-H_f$ au lieu de H_f.

2.3 Applications géométriques

2.3.1 Généralités

Définition 32

Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$, on appelle **ligne de niveau de f à la valeur λ** l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^p,\ f(x) = \lambda\}.$$

Remarque 33

1. Souvent, quitte à changer f, on prendra $\lambda = 0$.
2. Dans le cas où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on définit ainsi une courbe ; dans le cas où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, on définit une surface.

2.3.2 Cas des courbes

Proposition 34

Soit f une application $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $f(x, y) = 0$.
Soit $(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$. Si (x_0, y_0) est un point régulier de f (i.e. tel que $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$), alors $\mathscr{C}$ admet une tangente en (x_0, y_0) dont un vecteur normal est $\nabla f(x_0, y_0)$.

Exemple 35

- Exemple du cas d'une courbe $y = g(x)$.
- Exemple du cercle.

Remarque 36

1. On peut facilement trouver une expression générale de l'équation de la tangente. Si $M(x_0, y_0)$ est un point régulier de la courbe $f(x, y) = 0$, et $\mathscr{T}$ est la tangente en (x_0, y_0), on a les équivalences

$$A(x, y) \in \mathscr{T} \Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{MA} \mid \nabla g(x_0, y_0) \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

2. (remarque HP) On peut « prouver » ce résultat en admettant qu'au voisinage d'un point régulier (x_0, y_0) la courbe $\mathscr{C}$ admet un **paramétrage** régulier.
3. On interprète aussi le fait, connu en physique, disant que le gradient est orthogonal aux courbes de niveau.

2.3.3 Cas des surfaces

Proposition 37

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $f(x,y,z)=0$. Si $(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{S}$ est un point régulier de la surface $\mathscr{S}$, alors la surface $\mathscr{S}$ admet un plan tangent en (x_0,y_0,z_0) dont un vecteur normal est $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$.

Exemple 38

1. Cas d'une surface $z=\varphi(x,y)$.
2. Cas de la sphère.

Définition 39

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $f(x,y,z)=0$.
Une courbe tracée sur $\mathscr{S}$ est une application $\gamma : \mathrm{I}\to\mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall t\in\mathrm{I},\quad g(\gamma(t))=0$$

Si $\gamma'(t_0)\neq 0$ avec $t_0\in\mathrm{I}$, alors on peut vérifier que la droite passant par $\gamma(t_0)$ et dirigée par $\gamma'(t_0)$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$. Dans ce cas, on dit que $\gamma(t_0)$ est un point régulier de la courbe.

Proposition 40

Si $\mathscr{C}$ est une courbe tracée sur une surface $\mathscr{S}$ et si M est un point régulier à la fois de $\mathscr{S}$ et de $\mathscr{C}$, alors la tangente en M à $\mathscr{C}$ est incluse dans le plan tangent en M à $\mathscr{S}$.