N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

DM 12 – Révisions de sup

Principe Chacun de ces exercices, sujets de concours d'écrit ou d'oral des années précédentes, ou exercices importants, utilisent des **notions de sup**, notamment en **analyse**, ou bien sur les **complexes et les polynômes** (ce sont les points de sup que nous revoyons moins en spé).

1 Complexes et polynômes

1.1 Écrit

Exercice 1. *Écrit Mines 22*. **Définition.** Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit polynôme de Hurwitz si ses racines dans $\mathbb{C}$ appartiennent à $\mathfrak{Re}^- = \{z \in \mathbb{C}/\mathfrak{Re}(z) < 0\}$.
Définition. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit à coefficients strictement positifs s'il est non nul et si, d désignant son degré, $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où, pour tout $k \in [0, d]$, $a_k > 0$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que si α est une racine d'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, à coefficients strictement positifs, alors $\alpha < 0$.
2. Démontrer que tout diviseur d'un polynôme de Hurwitz est un polynôme de Hurwitz.
3. Soit P un polynôme de Hurwitz de $\mathbb{R}[X]$ irréductible et à coefficient dominant positif. Démontrer que tous les coefficients de P sont strictement positifs.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. On définit les deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ par :

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k) \qquad \text{et} \qquad Q(X) = \prod_{(k,l)\in[\![1;n]\!]^2} (X - z_k - z_l)$$

4. On suppose $n = 2$ et $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Si les coefficients de Q sont strictement positifs, P est-il alors un polynôme de Hurwitz ?
5. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ dont tous les coefficents sont strictement positifs. Démontrer que les coefficients du produit AB sont également strictement positifs.
6. Démontrer que si P et Q sont dans $\mathbb{R}[X]$, alors on a l'équivalence : P est un polynôme de Hurwitz si et seulement si les coefficients de P et Q sont strictement positifs.

1.2 Oral

Exercice 2. *Mines-Ponts 22*. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins 2 .

1. On suppose que P est de la forme $P = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$, où les λ_k sont dans $\mathbb{R}$ et les α_k dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X - \lambda_k}$.
2. On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $P'(x) = 0$ et $P(x) \neq 0$. Montrer que $P''(x)P(x) < 0$.
3. Soient x_1 et x_2 deux racines consécutives de P. Montrer que $P'(x_1) P'(x_2) \leqslant 0$.
4. Soient a et b des réels distincts tels que $P - a$ et $P - b$ sont scindés sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

Exercice 3. *Mines-Telecom 22*. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

Exercice 4. *Centrale 22*. Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $P = X^3 + \omega X^2 - \overline{\omega} X - 1$.

1. Préciser le nombre de racines réelles de P en fonction de ω.
2. Montrer que P admet au moins une racine de module 1.
3. Vérifier que, pour toute racine z de P, $|z| \leqslant 1 + |\omega|$.

Exercice 5. *Centrale 21*.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est simplement scindé.
2. Le polynôme $8X^8 + 7X^7 + 4X^4 + 3X^3 + 2019X^2 + 2018X + 666$ est-il simplement scindé sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6. *Mines PC 22*. Soit n un entier impair plus grand que 3. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-\omega^k}{1+\omega^k}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

2 Analyse réelle

2.1 Écrit

Exercice 7. *Écrit Centrale 2020*. Dans cette partie, on définit les fonctions de Lambert et on étudie certaines de leurs propriétés. On considère, dans toute cette partie, l'application

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\mathrm{e}^x \end{array}\right.$$

1. Justifier que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur l'intervalle $\left[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty\right[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geqslant -\mathrm{e}^{-1}, W(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$ (équation d'inconnue $t \in [-1, +\infty[$).

2. Justifier que W est continue sur $\left[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty\right[$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.
3. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.
4. Déterminer un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to 0$ ainsi qu'un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
5. Tracer, sur le même dessin, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_W$ représentatives des fonctions f et W. Préciser les tangentes aux deux courbes au point d'abscisse 0 ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_W$ au point d'abscise $-\mathrm{e}^{-1}$.
6. Démontrer que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty, -1]$ sur l'intervalle $\left[-\mathrm{e}^{-1}, 0\right[$. Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée V.
7. Pour un paramètre réel m, on considère l'équation (1) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $x\mathrm{e}^x = m$. Déterminer, en fonction de m, le nombre de solutions de (1) . Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.
8. Pour un paramètre réel m, on considère l'inéquation (2) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $x\mathrm{e}^x \leqslant m$. En utilisant les fonctions V et W, déterminer, suivant les valeurs de m, les solutions de (2). Illustrer graphiquement les différents cas.
9. Pour des paramètres réels non nuls a et b, on considère l'équation (3) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{ax} + bx = 0$. Déterminer, suivant les valeurs de a et b, le nombre de solutions de (3). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

Exercice 8. *Écrit CCINP 24*. Soient $a > 0$ et $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(a(x-1)) \end{array} \right.$. On s'intéresse au comportement de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$z_1 \in]\,0,1\,[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = f\,(z_n)\,.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, z_n \in]\,0,1\,[$ et $z_{n+1} - z_n$ est du même signe que $z_2 - z_1$.
2. En déduire que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.
3. Soit la fonction $\psi : \left\{ \begin{array}{l}]0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) - a(x-1) \end{array} \right.$.
   Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leqslant \psi(x) \Leftrightarrow f(x) \leqslant x$ et $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.
4. On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$. Étudier le signe de ψ et montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x = 1$. En déduire que $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
5. On suppose dans cette question que $a > 1$. Étudier le signe de ψ et montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha \in]0,1\,[$ qu'on ne cherchera pas à expliciter. En distinguant les cas $z_1 \in]\,0,\alpha]$ et $z_1 \in]\,\alpha,1\,[$, montrer que $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

2.2 Oral

Exercice 9. *CCINP 23*. Soit $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. *CCINP 22*. Soient $x \in]0,4\,[$ et $w = \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $\cos(w) = 1 - \frac{x}{2}$.
2. Montrer que $\cos\left(\frac{w}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{w}{2}\right)$ sont positifs.
3. Montrer que $\cos\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{\sqrt{4-x}}{2}$ et $\sin\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{\sqrt{x}}{2}$.
4. Montrer que $\text{Arcsin}\left(\frac{x}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2} = 2\,\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right)$.

Exercice 11. *Mines-Telecom 22*. Soit $f : x \mapsto x + \ln(1+x)$.

1. Montrer que f est un bijection de son ensemble de définition sur un intervalle à préciser. On note g la bijection réciproque.
2. Donner $g(0)$ et $g'(0)$.
3. Montrer que g admet un développement limité à tout ordre en 0 .
4. Calculer le développement limité de g à l'ordre 3 en 0 .

Exercice 12. *Navale 23*. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$. Préciser le domaine de définition et de continuité de f. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et 1.

Exercice 13. *Mines-Telecom 23*. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Déterminer un équivalent de S_n par comparaison avec des intégrales, puis en utilisant des sommes de Riemann.

Exercice 14. *Mines-Telecom 21*. **1.** Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution $x_n \in]\,0,1]$.

2. Montrer que $x_n \to 0$ puis que $x_n \sim e^{-n}$.
3. Obtenir un développement asymptotique de x_n.

Exercice 15. *Mines-Telecom 21*. **1.** Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution dans $[0, 1]$. On la note a_n.

2. Montrer que la suite (a_n) est décroissante et minorée par $1/2$.

3. Montrer que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 16. *Centrale 21*. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que $P\left(X^2\right) = P(X)P(X-1)$.

1. Soit ω une racine de P. Montrer que ω^2 est aussi racine de P.

2. Montrer que les racines de P sont soit nulles, soit de module 1 .

3. Montrer que 0 n'est pas racine de P.

4. Déterminer les polynômes solutions.

Exercice 17. *Mines-Ponts 23*. Soient $\varphi \in \mathscr{C}^1([0,1],[0,1])$ et $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout x $[0, 1]$, $|\varphi'(x)| < 1$. Calculez $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f\left(\varphi^n(x)\right) \mathrm{d}x$, où $\varphi^n = \varphi \circ \cdots \circ \varphi$.