Exercice 12 - DM12

prolongement de f en 1 :

$\forall x \in]1,+\infty[\quad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{t\,dt}{t\ln(t)}$

mais comme $\forall t \in [x;x^2] \quad x \leq t \leq x^2$, on a alors

$$\int_x^{x^2} \frac{x\,dt}{t\ln(t)} \leq f(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2\,dt}{t\ln(t)}$$

ie $\quad x\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)} \leq f(x) \leq x^2 \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$

or $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)} = \Big[\ln(\ln(t))\Big]_x^{x^2}$

$$= \ln(\ln(x^2)) - \ln(\ln(x))$$
$$= \ln\left(\frac{2\ln(x)}{\ln(x)}\right) = \ln(2)$$

D'où $\quad x\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)} \xrightarrow[x\to 1^+]{} \ln(2)$

de m $\quad x^2\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)} \xrightarrow[x\to 1^+]{} \ln(2)$

Donc par encadrem^t $f(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} \ln(2)$, finie

Donc f est prolongeable en 1.