②

1) On a $P = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$ $(k \in [\![1,n]\!])$

Exprimons P'

$$P' = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (X - \lambda_k)^{\alpha_k - 1} \prod_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^{n} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

D'où avec $P' \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ car P est de degré au ⊖ 2.

$$\frac{P'}{P} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (X - \lambda_k)^{\alpha_k - 1} \prod_{\substack{j=1 \\ \cancel{k \neq j}}}^{n} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}}{\prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)^{\alpha_j} \; (X - \lambda_k)^{\alpha_k}}$$

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \cancel{(X - \lambda_k)^{\alpha_k}}}{\cancel{(X - \lambda_k)^{\alpha_k}} (X - \lambda_k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{(X - \lambda_k)}$$

2) $$\left(\frac{P'}{P}\right)' = \frac{P''P - (P')^2}{P^2}$$

or pour x_0, $P(x_0) \neq 0$
$P'(x_0) = 0$

D'où $\left(\frac{P'}{P}\right)'(x_0) = \frac{P''(x_0)P(x_0)}{P^2(x_0)}$

$$\left(\frac{P'}{P}\right)(x_0) = \sum_{k=1}^{n} - \frac{\alpha_k}{(x_0-\lambda_k)^2} < 0$$

D'où $\underline{P''(x_0)P(x_0) < 0}$

3) Supposons par l'absurde que $P'(x_1)P'(x_2) > 0$

Prenons $P'(x_1) > 0$ et $P'(x_2) > 0$

$$P(x) \underset{x \to x_1}{\sim} P'(x_1)(x - x_1) > 0$$
(Taylor)

Pour $x > x_1$:

Donc au voisinage de x_1^+, P est strictement positif.
De même, au voisinage de x_1^-, P est strictement négatif.

Par le TVI, P s'annule sur $]x_1, x_2[$, or x_1 et x_2 sont des racines consécutives. $\Rightarrow$ ABSURDE

Donc $\underline{P'(x_1)P'(x_2) \geq 0}$

4) Ultra-classique

P scindé sur $\mathbb{R} \Rightarrow P'$ scindé sur $\mathbb{R}$

Idée $\quad P(X) = C \prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i)^{m_i}$

avec $\quad \alpha_0 < \dots < \alpha_r$

$m_1 + \dots + m_r = \deg(P) = n$

- Racines P' ?

$\to$ $\forall i$, α_i est racine de P' de multiplicité $m_i - 1$ (éventuellement $m_i - 1 = 0$)

$\hookrightarrow$ $\boxed{n-r}$ racines comptées avec multiplicités.

$\to$ Par THM de Rolle, $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$,

$r-1$ fois

comme $P(\alpha_i) = P(\alpha_{i+1})$ et P dérivable sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$

on dispose de $\beta_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tq $P'(\beta_i) = 0$

D'où $\boxed{r-1}$ autres racines.

D'où $\underline{n-r} + \underline{r-1} = \boxed{n-1}$ racines comptées avec multiplicité.

Csq si P est scindé sur $\mathbb{R}$

et α est 1 racine multiple de P' alors α racine de P

Ici, si α est racine multiple de $P' = (P-a)' = (P-b)'$

Alors $P(\alpha) - a = 0$ et $P(\alpha) - b = 0$ donc $a = b$, absurde !

Donc P' est scindé à racines sp.

③

$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$

- f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ par les théorèmes généraux. (pas besoin de redémontrer que $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$)

- Soit $n \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &\xrightarrow[x \to n^{+}]{} n + (n-n)^2 = n \\ f(x) &\xrightarrow[x \to n^{-}]{} n-1 + (n-n-1)^2 = n \end{aligned}\right\}$$ m̂ limites à gauche et à droite

et $f(n) = n + (n-n)^2 = n$

Donc f est continue en n, $\forall n \in \mathbb{Z}$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

④

1) $P(X) = X^3 + \omega X^2 - \bar{\omega} X - 1$

Si $\omega \in \mathbb{R}$: 1 est racine

$P(X) = (X-1)(aX^2 + bX + c)$

Par unicité des coeff. : $a = 1$
$b = \omega + 1$
$c = 1$

ie $P(X) = (X+1)(X^2 + (\omega+1)X + 1)$

$\Delta = (\omega+1)^2 - 4$
$= (\omega+3)(\omega-1)$

- si $\omega = 1$ ou -3 ie $\Delta = 0$

donc 1 solution réelle double en +.

- si $\omega \in \mathbb{R} \setminus [-3, 1]$ → 2 solut° réelles distinctes. en +
- si $\omega \in]-3, 1[$ → $\emptyset$ solut° réelle en +

Si $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tq $\omega = a + ib$ $(b \neq 0)$

Soit X tq $P(X) = 0$

$$\begin{array}{l|l} \mathrm{Re} & X^3 + aX^2 - aX - 1 = 0 \\ \mathrm{Im} & bX(X+1) = 0 \end{array}$$

Si $X = -1$ alors X solut° si $a = 1$
Si $X = 0$, $P(0) = -1 \neq 0$
Sinon pas de solut° réelle.

2) Mq $\underline{\alpha \text{ solut}^\circ}$ $\Rightarrow$ $\underline{\dfrac{1}{\bar{\alpha}} \text{ solution.}}$ (on sait que le produit des (3) racines est égal à 1 avec les relat° coeff - racines)

$\downarrow$

on cherche des relat°

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ sol° de $P(X) = 0$

$$P\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right) = (\bar{\alpha})^{-3} + w(\bar{\alpha})^{-2} - \bar{w}(\bar{\alpha})^{-1} - 1$$

$$P(\alpha) = \alpha^3 + w\alpha^2 - \bar{w}\alpha - 1 = 0$$

Donc $\overline{P(\alpha)} = \bar{\alpha}^3 + \bar{w}\bar{\alpha}^2 - w\bar{\alpha} - 1$

On remarque que $-\bar{\alpha}^3 P\left(\dfrac{1}{\bar{\alpha}}\right) = \overline{P(\alpha)} = 0$

or $\alpha \neq 0$ donc $P\left(\dfrac{1}{\bar{\alpha}}\right) = 0$

- Soit $\underline{\alpha \text{ une racine}}$

    - Ou bien $\alpha = \dfrac{1}{\bar{\alpha}}$ et donc $\underline{|\alpha| = 1}$

    - Ou bien $\alpha \neq \dfrac{1}{\bar{\alpha}}$ et avec la troisième notée β.

      Alors $\alpha \times \dfrac{1}{\bar{\alpha}} \times \beta = 1$ donc $\underline{|\beta| = 1}$

3) Soit z une racine de P.

$$z^3 + wz^2 - \bar{w}z - 1 = 0$$

- Si $|z| \leq 1$, $|z| \leq 1 + |w|$
- Si $|z| > 1$, $P(z) = 0$ donc $z^3 = -wz^2 + \bar{w}z + 1$

Donc $|z|^3 \leq |w||z|^2 + |\bar{w}||z| + 1$

Donc $|z| \leq |w| + |w| \frac{1}{|z|} + \frac{1}{|z|^2}$ mais $|z| > 1$

$\leq 2|w| + 1$

(suite corrigée à venir...)

(12)

$$f : x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$$

- Déjà $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est fcpm sur $\underbrace{]0,1[\cup]1,+\infty[}_{I}$

- Soit $x \in]0,1[$
  alors $x^2 \in]0,1[$
  et $[x^2, x] \subset]0,1[$ (stabilité)

Donc φ est continue sur $[x^2,x]$ et donc f est bien définie.

- Soit $x \in]1,+\infty[$
  alors $[x, x^2] \subset]1,+\infty[$
  Donc φ est continue sur $[x,x^2]$ et donc f est bien définie.

Réflexe quand $\int_x^{x^2}$: exprimer une primitive.

Soit F une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$

Alors $f(x) = F(x^2) - F(x)$ or F est dérivable sur $[x,x^2]$
donc continue

donc f est bien continue sur $[x,x^2]$.

Si $x \in]1,+\infty[$ alors $x^2 > x$:

$$\left| \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \right| \leq \int_x^{x^2} \left| \frac{dt}{\ln(t)} \right| \leq \int_x^{x^2} \left| \frac{1}{\ln(x)} \right| dt = \frac{x^2 - x}{\ln(x)}$$

- $$\frac{x^2 - x}{\ln(x)} = \frac{x(x-1)}{\ln(x+1-1)} \underset{x \to 1^+}{\sim} \frac{x(x-1)}{x-1} = x \xrightarrow[x \to 1^+]{} 1$$

Également, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)}\,dt \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$

$$\frac{1}{\ln(x^2)}\, x(x-1) = \frac{x(x-1)}{\ln(1+x^2-1)} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{x(x-1)}{x^2-1} = \frac{x\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} \xrightarrow[x\to 1]{} \underline{\frac{1}{2}}$$

Les inégalités sont « molles ».

- Déjà comme $\displaystyle\frac{1}{\ln(t)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{t-1}$,

on regarde $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \ln(x+1) \xrightarrow[x\to 1]{} \underline{\ln(2)}$

Ensuite, (asymptotique en 1)

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} - \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = \int_x^{x^2} \underbrace{\frac{t-1-\ln(t)}{\ln(t)(t-1)}}_{\varphi(t)}\,dt$$

Mais $\displaystyle\varphi(t) \underset{t\to 1}{=} \frac{(t-1) - \left(t-1 - \frac{(t-1)^2}{2} + o\left((t-1)^2\right)\right)}{\ln(t)(t-1)}$

$$\underset{t\to 1}{\sim} \frac{\frac{(t-1)^2}{2}}{\ln(t)(t-1)} \xrightarrow[t\to 1]{} \frac{1}{2}$$

Donc φ est prolongeable par continuité en 1.

En notant $M = \displaystyle\max_{x\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)} |\varphi(x)|$

$$\left| \int_x^{x^2} \psi(t)\, dt \right| \leq M|x^2 - x| \xrightarrow[x \to 1]{} 0$$
$$= M x |x-1|$$

Donc $f(x) - \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} \xrightarrow[x \to 1]{} 0$

Donc $f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} \ln(2)$

Soit $x \in]0,1[$, $\displaystyle\left| \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \right| \leq \int_x^{x^2} \left| \frac{dt}{\ln(t)} \right|$

Posons $k = \max\limits_{t \in]0, \frac{1}{2}[} \left\{ \dfrac{1}{\ln(t)} \right\}$

car on veut la limite en 0

donc $\leq |(x^2 - x) k| = |x(x-1)| k \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

donc f est prolongeable par $\mathcal{C}^0$ en 0.

(6)

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-w^k}{1+w^k}$$ (naïvement, on part comme ça)

$$= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-e^{\frac{2i\pi k}{n}}}{1+e^{\frac{2i\pi k}{n}}}$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{-e^{\frac{2i\pi k}{n}}}{e^{\frac{2i\pi k}{n}}} \frac{\left(-e^{\frac{-2i\pi k}{2n}} + e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right)}{\left(e^{-\frac{2i\pi k}{2n}} + e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right)}$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{-2i\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)}$$

$$= (-i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{\pi k}{n}\right)$$

On pose $P = (1+X)^n - (1-X)^n$

car $x_k = \dfrac{1-w^k}{1+w^k}$ avec $(w^k)^n = 1$

donc $x_k(1+w^k) = 1-w^k$

donc $\underbrace{(w^k)^n}_{=1} = \left(\dfrac{1-x_k}{1+x_k}\right)^n$ $\rightarrow$ étude de $\left(\dfrac{1-X}{1+X}\right)^n - 1$

Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$ on a :

$$P(z) = 0 \iff (z+1)^n - (1-z)^n = 0$$

$$\iff \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n = +1$$

$\Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \dfrac{1-z}{1+z} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

$\Leftrightarrow \quad \_\_\_\_\_\_ \quad 1 - z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z+1)$

$\Leftrightarrow \quad \_\_\_\_\_\_ \quad z = \dfrac{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$

$\Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \underline{z = \dfrac{1-\omega^k}{1+\omega^k}}$

La qté recherchée est le produit des racines non nulles de P.

$$P = \prod_{k=0}^{n} \left(X - \frac{1-\omega^k}{1+\omega^k} \right)$$

$$= XQ$$

On $P = (X+1)^n - (1-X)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-(-1)^k) X^k$$

$$= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} \cdot 2X^k$$

$$= X \underbrace{\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ imp}}} \binom{n}{k} 2X^{k-1}}_{Q}$$

$P = XQ$

La qté recherchée est le produit des racines $(-1)^{n-1} Q(0)$

$$Q(0) = 2 \times \binom{n}{1} = 2n$$

Donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(-1)^{n-1} \times 2n}{(-1)^{n-1}} = \frac{2n}{i^{n-1}}$

Rmq n doit être impair pour ne pas avoir $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$.