RÉVISIONS SUP

Exercice 3 :

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Re(e^{ikx})$

$$= Re\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}\right)$$

$$= Re\left((1+e^{ix})^n\right)$$

$$= Re\left((e^{ix/2} \times 2\cos(x/2))^n\right)$$

$$= 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) Re\left(e^{inx/2}\right)$$

$$= 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

Exercice 10 :

Soit $x \in]0,4[$, $w = \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2}$

1) $\cos(w) = \cos\left(\text{Arcsin}\left(\frac{x}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\text{Arcsin}\left(\frac{x}{2} - 1\right)\right)$

$$= 1 - \frac{x}{2}$$

$\rightarrow$ Q° : $\text{Arcsin}(\sin(\theta)) = \theta$? $\longrightarrow$ si $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

2) On veut mq $0 < \frac{w}{2} < \frac{\pi}{2}$

Or $\frac{w}{2} = \frac{\text{Arcsin}(x/2 - 1)}{2} + \frac{\pi}{4}$

$$-1 < \frac{x}{2} - 1 < 1$$

donc $-\frac{\pi}{2} < \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}-1\right) < \frac{\pi}{2}$

donc $-\frac{\pi}{4} < \frac{\text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}-1\right)}{2} < \frac{\pi}{4}$

Ainsi $0 < \frac{w}{2} < \frac{\pi}{2}$

D'où $\cos\left(\frac{w}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{w}{2}\right)$ positifs.

3) Mq $\cos^2\left(\frac{w}{2}\right) = 1 - \frac{x}{4}$ et $\sin^2\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{x}{4}$

Or $\cos^2\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{2w}{2}\right)}{2} = \frac{1+1-x/2}{2} = 1 - \frac{x}{4}$

Et $\sin^2\left(\frac{w}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{x}{4}$

donc $\cos\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{\sqrt{4-x}}{2}$ et $\sin\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ par positivité

4) $2\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right) = 2\text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{x}/2}{\frac{\sqrt{4-x}}{2}}\right)$

$= 2\text{Arctan}\left(\frac{\sin(w/2)}{\cos(w/2)}\right) = 2\text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{w}{2}\right)\right)$

$= 2 \times \frac{w}{2}$ car $\frac{w}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$= w$

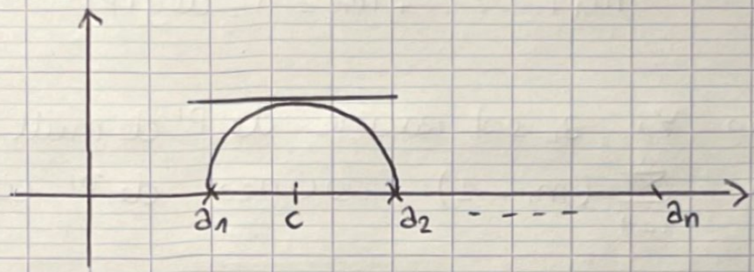
Exercice 5

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$. P SRS sur $\mathbb{R}$.
Mq P' est SRS

On peut écrire :

$$P(X) = C(X - a_1) \dots (X - a_n)$$

On suppose $a_1 < \dots < a_n$



Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$.
Appliquons le théorème de Rolle sur a_i et a_{i+1}
P est continu sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$
P est dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$ et $P(a_i) = P(a_{i+1}) = 0$

Donc, selon le thm de Rolle, on dispose de $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tq $P'(b_i) = 0$
On a trouvé $n-1$ racines distinctes de P' et $\deg(P') = n-1$
(on a trouvé ttes les racines de P')

Donc P' est SRS.

2) On suppose le polynome P SRS sur $\mathbb{R}$.
Alors $P', P'', \dots$ sont SRS (Q1)
Alors $P^{(5)}(X) = 8 \times \frac{8!}{3!} X^3 + 4 \frac{7!}{2!} X^2$

$$= X^2 (\dots)$$

Donc $P^{(5)}$ a une racine double $\longrightarrow$ ABSURDE !

Rappel : Si $Q(X) = X^n$ et $k \leq n$, $Q^{(k)}(X) = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$

Rq : Si P scindé sur $\mathbb{R}$, P' l'est aussi

$$P(X) = C \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}$$

$$a_1 < \dots < a_k$$

$$m_1 + \dots + m_k = n = \deg(P)$$

Alors $\forall i$, a_i est racine de P' de mult. $m_i - 1$

D'où $\sum_{i=1}^{n} (m_i - 1)$ racines de P' comptées avec multiplicité

$$= n - k$$

→ on a en plus, par le thm de Rolle,

$k-1$ racines de P' $(b_1, \dots, b_{k-1})$ tq

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < b_{k-1} < a_k$$

D'où $n - k + k - 1 = n - 1 = \deg(P')$ racines pour P'

D'où P' scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 :

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

$$\int_{t=k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \int_{t=k}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$$

MATHS
SUP

Exercice 13 (suite) :

$$\int_{t=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \geq S_n \geq \int_{t=n+1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

Donc $\quad [2\sqrt{t}]_n^{2n} \geq S_n \geq [2\sqrt{t}]_{n+1}^{2n+1}$

Donc $\quad 2\sqrt{2n} - 2\sqrt{n} \geq S_n \geq 2\sqrt{2n+1} - 2\sqrt{n+1}$

Donc $\quad 2\sqrt{2} - 2 \geq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq \frac{2\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$

$$= 2\sqrt{2+\frac{1}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\sqrt{2} - 2$$

Donc par encadrement,

$$S_n \sim (2\sqrt{2} - \quad)\sqrt{n}$$

- Sommes de Riemann :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt \quad \text{si } f \text{ continue}$$

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \times n \times \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt$$

$$= [2\sqrt{1+t}]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$$

Donc $\quad S_n \sim 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n}$

Exercice 16 :

1) Soit w une racine de P.

Alors $P(w)=0$

Or $P(w^2) = P(w)\,P(w-1) = 0$

Donc w^2 est aussi racine de P.

2) Soit w une racine de P

Alors w^2 est aussi racine de P.

Si $|w| \neq 0$ ou $|w| \neq 1$

Alors $|w|^2 \neq |w|$ donc $w^2 \neq w$

Plus précisément, supposons $|w| > 1$,

les racines de P sont $w, w^2, \dots w^{2^k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

et $|w| < |w^2| < \dots < |w^{2^k}|$

donc P aurait une infinité de racines donc serait le polynôme nul

ABSURDE!

↳ car P non constant.

De même si $|w| < 1$.

3) Si 0 est racine de P,

Alors $P(1^2) = P(1)\,P(1-1) = P(1)\,P(0) = 0$

donc 1 est aussi racine de P.

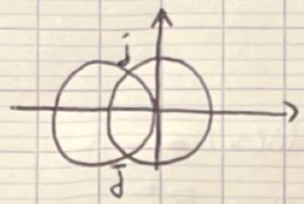
Donc $P(4) = P(2^2) = P(2)\,P(2-1)$
$= P(2)\,P(1) = 0$

Donc 4 est aussi racine

ABSURDE !

↳ car les racines de P sont soit nulles, soit de module 1 par Q2).

4)



<u>Analyse</u> : soit w une racine de P alors $|w| = 1$

$P((w+1)^2) = P(w+1)\,P(w) = 0$

donc $|w+1| = 1$

Donc $w \in$ à l'intersect° des 2 cercles

ie $w = j$ ou $w = j^2$

Donc $P(X) = C(X-j)^a(X-j^2)^b$

Comme $j^2 = \bar{j}$ et que $P \in \mathbb{R}[X]$, $b = a$

Donc $P(X) = C(X-j)^a(X-\bar{j})^a = C(X^2+X+1)^a$

Or $P(X^2) = C(X^4+X^2+1)^a$

et $P(X)P(X-1) = C^2(X^2+X+1)^a((X-1)^2+X-1+1)^a$

$= C^2(X^2+X+1)^a(X^2-X+1)^a$

$= C^2(X^4 - \cancel{X^3} + \cancel{X^2} + \cancel{X^3} - \cancel{X^2} + \cancel{X} + X^2 - \cancel{X} + 1)^a$

$= C^2(X^4+X^2+1)^a$

Donc $C^2 = C$ et P est non constant donc $C = 1$.

D'où $P(X) = (X^2+X+1)^a$

<u>Synthèse</u> : Le calcul est fait ds l'analyse.

Exercice 14 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On pose $f_n : x \longmapsto x - \ln(x) - n$

f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$f_n'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

x	0		1	
f_n'		$-$		$+$
f_n		$\searrow$		$\nearrow$

f_n décroît strictement sur $]0,1]$

$f_n(1) = 1 - n \leq 0$

$f_n(x) \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$

⚠ on ne dit pas que TVI !

Donc par le TVI et stricte monotonie, il existe un unique $x_n \in]0,1]$ tq $f_n(x_n) = 0$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_{n+1}(x_n) = x_n - \ln(x_n) - (n+1)$$
$$= \ln(x_n) + n - \ln(x_n) - n - 1$$
$$= -1$$

Donc $f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$

Or f_n décroit sur $]0,1]$ donc $x_n > x_{n+1}$ $\forall n$

donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroit sur $]0,1]$

MATHS
SUP

Exercice 14 (suite)

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0
donc par le thm de la limite monotone (x_n)
converge vers $l \in [0,1]$

Supposons $l>0$
Alors $x_n - \ln(x_n) = n$
$\rightarrow l - \ln(l) \longrightarrow +\infty$

ABSURDE donc $\underline{l=0}$

$$\frac{x_n}{n} = \frac{\ln(x_n)}{n} + 1$$

Or $\frac{x_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\frac{\ln(x_n)}{n} + 1 \longrightarrow 0$

Donc $-\frac{\ln(x_n)}{n} \longrightarrow 1$ Donc $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$

⚠ On ne passe pas les équivalents à l'exp ⚠

$e^{x_n - \ln(x_n)} = e^n$ donc $\frac{e^{x_n}}{x_n} = e^n$

d'où $x_n = e^{x_n} e^{-n}$ Or $e^{x_n} \longrightarrow 1$

Donc $\underline{x_n \sim e^{-n}}$

3) $x_n = e^{x_n} e^{-n}$
$e^{x_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + x_n + o(x_n)$

Donc $x_n \underset{n\to+\infty}{=} e^{-n}(1+x_n+o(x_n))$

$x_n - e^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} e^{-n}x_n + o(e^{-n}x_n)$

Donc $x_n - e^{-n} \sim e^{-n}x_n$
$\sim e^{-2n}$

Donc $x_n \underset{n\to+\infty}{=} e^{-n} + e^{2n} + o(e^{-2n})$

Exercice 4 (fin)

3) Mq $|z| \leq 1 + |w|$

Si $|z| > 1 + |w|$ (≥ 1)

$z^3 = -wz^2 + \overline{w}z + 1$

donc $|z|^3 \leq |w|\,|z|^2 + |\overline{w}|\,|z| + 1$

$z \neq 0$ donc $|z| \leq |w| + \frac{|w|}{|z|} + \frac{1}{|z|^2}$

$\leq |w| + \frac{|w|}{1+|w|} + \frac{1}{(1+|w|)^2}$

$\leq |w| + \frac{|w|}{1+|w|} + \frac{1}{1+|w|}$

$\leq |w| + 1$

ABSURDE !

exo classique du m̂ genre :

$$\text{Si } z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k = 0 \quad \text{alors } |z| \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$$

(disjoindre $|z| \leq 1$ et $|z| > 1$)