PSI – Programme de colles
Semaine 20 – du 17 au 21 mars 2025

Programme en bref.

- Cours sur la topologie des evn.
- Exercices sur les evn (normes + topologie) et révisions sur les endomorphismes des espaces euclidiens.

Exemples de questions de cours

1. Pour une application linéaire, équivalence entre
   - continue
   - continue en 0
   - bornée sur la boule unité fermée
   - il existe $K > 0$, $\|u(x)\| \leq K\|x\|$ pour tout x
   - lipschitzienne
2. Si E est de dimension finie et $u : E \to F$ est linéaire, alors u est continue (on admet l'équivalence des normes en dimension finie !)
3. Une boule ouverte est ouverte.
4. Une boule fermée est fermée. (en définissant fermé comme « stable par passage à la limite »)
5. Le complémentaire d'un ouvert est un fermé.
6. Le complémentaire d'un fermé est un ouvert.
7. Opérations ensemblistes sur les ouverts/fermés.
8. L'image réciproque d'un ouvert/fermé par une application continue est ouvert/fermé.
9. $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense.
10. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Espaces vectoriels normés

Cette section vise les objectifs suivants :

- *généraliser au cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel ;*
- *fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.*

Les notions seront illustrées par des exemples concrets et variés.
Il convient de souligner l'aspect géométrique des concepts topologiques à l'aide de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Normes	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace pré-hilbertien réel.	Normes usuelles $\\| \\|_1$, $\\| \\|_2$ et $\\| \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme $\\| \\|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.
Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère. Partie convexe. Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	Convexité des boules.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Convergence et divergence d'une suite.	Exemples dans des espaces de matrices, dans des espaces de fonctions.
Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.
d) Topologie d'un espace vectoriel normé	
Point intérieur à une partie.	
Ouvert d'un espace normé.	Une boule ouverte est un ouvert.
Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.	
Fermé d'un espace normé.	Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés.
Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.	
Point adhérent à une partie, adhérence.	L'adhérence est l'ensemble des points adhérents. Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.
Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	
e) Limite et continuité en un point	
Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.	Caractérisation séquentielle.
Opérations algébriques sur les limites, composition.	
Continuité en un point.	Caractérisation séquentielle.
f) Continuité sur une partie	
Opérations algébriques, composition.	
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.	
g) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration est hors programme. La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Théorème des bornes atteintes : toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.	La notion de norme subordonnée est hors programme. Exemples du déterminant, du produit matriciel.