PSI – Programme de colles
Semaine 21 – du 24 au 28 mars 2025

Programme en bref.

— Cours sur la topologie des evn et le calcul diff (attention, beaucoup de propriétés sont admises !).

— Exercices sur le calcul diff essentiellement.

Exemples de questions de cours

1. L'image réciproque d'un ouvert/fermé par une application continue est ouvert/fermé.
2. $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense.
3. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé.
4. Dérivation de $L \circ \gamma$ si L est linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.
5. Sur un ouvert convexe, une fonction $\mathscr{C}^1$ est constante si et seulement si son gradient est nul en tout point.
6. (exemple d'utilisation de la règle de la chaîne) Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, si $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, expression de $\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)$ et de $\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)$.
7. Condition nécessaire d'extremum local.
8. Énoncé du DL à l'ordre 2 à l'aide du gradient et de la hessienne + condition nécessaire/suffisante d'extremum local en un point critique, la condition portant sur la hessienne.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Calcul différentiel

B - Dérivabilité des fonctions vectorielles

L'objectif de cette section est de généraliser aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ la notion de dérivée d'une fonction numérique. Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Interprétation d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ comme courbe paramétrée.	L'étude et le tracé d'arcs paramétrés sont hors programme.
Dérivabilité en un point. Dérivabilité sur un intervalle.	Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité d'ordre un. Traduction par les coordonnées dans la base canonique. Interprétation cinématique.
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivée de $L(f)$, où L est linéaire et f à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1,\dots,f_p)$, où M est p-linéaire, et f, g, $f_1,\dots,f_p$ à valeurs vectorielles. Dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est à valeurs réelles et f à valeurs vectorielles. Fonction de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible. Application au produit scalaire et au déterminant.

C - Fonctions de plusieurs variables

Les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ont été introduites en première année. L'objectif de cette section est d'approfondir et de généraliser cette étude aux fonctions de $p \geqslant 2$ variables.
L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à celle de ses coordonnées, cette section se consacre à l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Elle est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie. On se limite en pratique au cas $p=2$ ou $p=3$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$	
Dérivée en un point selon un vecteur.	Notation $D_v f(a)$.
Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. On peut aussi utiliser $\partial_i f(a)$.
Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur Ω.	
Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.	
Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω admet en tout point a de Ω un développement limité d'ordre 1.	La démonstration n'est pas exigible. Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω est continue sur Ω.
Différentielle de f en a.	Elle est définie comme la forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$: $$\mathrm{d}f(a) : (h_1,\dots,h_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i.$$ Notation $\mathrm{d}f(a)\cdot h$.
b) Règle de la chaîne	
Dérivée de $t \mapsto f\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)$. Application au calcul des dérivées partielles de : $$(u_1,\dots,u_n) \mapsto f\big(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_p(u_1,\dots,u_n)\big).$$	Interprétation géométrique. En pratique, on se limite à $n \leqslant 3$ et $p \leqslant 3$. Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.
Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.	
c) Gradient	
Dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Coordonnées du gradient.	Le gradient est défini par la relation $\mathrm{d}f(a)\cdot h = \langle \nabla f(a), h\rangle$ pour $h \in \mathbb{R}^p$. Notation $\nabla f(a)$.
e) Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$	
Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$.	
Théorème de Schwarz.	La démonstration est hors programme.
Matrice hessienne en un point a d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notation $H_f(a)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^\top h + \tfrac{1}{2} h^\top H_f(a) h + \mathrm{o}(\lVert h\rVert^2).$$	La démonstration est hors programme. Expression en termes de produit scalaire.
f) Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$	
Extremum local, global. Point critique d'une application de classe $\mathscr{C}^1$. Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ admet un extremum local en un point a, alors a est un point critique.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et a un point critique de f : — si $H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a ; — si $H_f(a) \notin \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$, alors f n'a pas de minimum en a.	Adaptation à l'étude d'un maximum local. Explicitation pour $p = 2$ (trace et déterminant).
	Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie de $\mathbb{R}^p$.