Mathématiques, DS 07-B : type CCINP. Durée : 3h

Ce devoir comporte deux exercices complètement indépendants.

A. Quelques propriétés des matrices antisymétriques

Présentation générale. On se propose ici d'étudier certaines propriétés des matrices antisymétriques réelles. Après avoir étudié un exemple en dimension 2 , on utilise les matrices antisymétriques pour paramétrer un sous-ensemble des matrices orthogonales.

Notations.

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels et, pour tout entier $n>0, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $n\times n$ à coefficients réels. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour tout entier $n>0$, on désigne par $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n\times n$ antisymétriques à coefficients réels et par $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices $n\times n$ orthogonales à coefficients réels. Le groupe spécial orthogonal est constitué des matrices orthogonales de déterminant 1.

A-I. Un exemple en dimension 2

1. Soit t un réel et soit $A=\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres complexes de A.
2. Calculer $R=(\mathrm{I}_2+A)(\mathrm{I}_2-A)^{-1}$ et montrer que R est une matrice du groupe spécial orthogonal.
3. Pour tout réel $\theta\in\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, on note $R_\theta=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer $M=(\mathrm{I}_2+R_\theta)^{-1}(\mathrm{I}_2-R_\theta)$.

A-II. Matrices antisymétriques et matrices orthogonales

Dans ce qui suit, n désigne un entier strictement positif.

4. Soient B et C deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si C est inversible et $BC=CB$, alors $BC^{-1}=C^{-1}B$.
5. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Soit λ une valeur propre complexe de A et $X\in\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ un vecteur propre associé. En calculant de deux façons
$$(AX)^\top\overline{X}$$
montrer que λ est un complexe imaginaire pur (éventuellement nul).
6. Déduire de la question précédente que si A est antisymétrique réelle, alors I_n+A est inversible et :
$$(\mathrm{I}_n-A)(\mathrm{I}_n+A)^{-1}=(\mathrm{I}_n+A)^{-1}(\mathrm{I}_n-A)$$
Montrer que $R=(\mathrm{I}_n+A)^{-1}(\mathrm{I}_n-A)$ est une matrice orthogonale.
7. Calculer le déterminant de R.
8. Soit R une matrice orthogonale telle que I_n+R soit inversible. Démontrer que la matrice $A=(\mathrm{I}_n+R)^{-1}(\mathrm{I}_n-R)$ est antisymétrique.
9. On suppose ici que $n=3$ et que $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure usuelle d'espace euclidien orienté par la base canonique. Soit r une rotation d'angle $\theta\in]-\pi,\pi[$ autour d'un axe orienté par un vecteur u de norme 1 et soit $R\in\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base canonique. Montrer qu'il existe une matrice antisymétrique $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$R=(\mathrm{I}_3+A)^{-1}(\mathrm{I}_3-A).$$

B. Décomposition de Cholesky

Cet exercice a pour but d'étudier la décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique réelle définie positive.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre n .
- $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, I_n désigne la matrice identité.
- $O_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques réelles.
- Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(f_1, \dots, f_k)$ une famille de vecteurs de E , $\mathrm{Vect}\,(f_1, \dots, f_k)$ désigne le sous espace vectoriel engendré par la famille $(f_1, \dots, f_k)$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R}), \mathrm{Sp(A)}$ désigne l'ensemble des valeurs propres réelles de A et $A^\top$ la transposée de A.
- $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.
  Par définition, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(A) \subset]0, +\infty[$.
- $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs.
- $\mathbb{R}^n$ sera identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ensemble des matrices réelles avec n lignes et 1 colonne.
- Lorsque $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique : $\|X\|^2 = X^\top X$.

B-I. Étude d'un exemple numérique

On considère, dans cette partie B-I. uniquement, la matrice $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Énoncer le théorème qui permet de justifier qu'il existe une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $P^\top S P = D$ où D est une matrice diagonale.

2. Déterminer P et D telles que $\det(P) = 1$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ où $\alpha < \beta < \gamma$ puis justifier que $S \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$.

3. Démontrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{T}_3^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = B^\top B$. On explicitera la matrice B.

B-II. Résultats préliminaires

4. On considère $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que :

$$\varphi_s : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (X, Y) \mapsto X^\top S Y \end{array} \right. \quad \text{est un produit scalaire sur } \mathbb{R}^n$$

5. On considère la **Proposition :** $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que

- $\forall M \in \mathcal{T}_n^{++}$, $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$,
- $\mathrm{I}_n \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$,
- $\forall (M, N) \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})^2,\ MN \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$,
- $\forall M \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R}),\ M^{-1} \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Démontrer cette proposition pour $n = 2$. Dans la suite, on admettra le résultat pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

B-III. Une caractérisation des matrices symétriques réelles définies positives

Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$, on pose $B = A^\top A$.

6. Montrer que $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

7. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre associé à λ, alors $\|Ax\|^2 = \lambda\|x\|^2$ en déduire que $\lambda \in [0, +\infty[$.

8. En déduire que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

B-IV. Décomposition de Cholesky

Le but de cette question est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1

$S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = A^\top A$. Cette décomposition s'appelle décomposition de Cholesky de S.

On considère $S \in \mathcal{S}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$.

9. Montrer que s'il existe $A \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = A^\top A$ alors $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

10. On suppose qu'il existe A_1, A_2 deux matrices de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A_1^\top A_1 = A_2^\top A_2$.

(a) Montrer que $\Delta = A_1 (A_2)^{-1}$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

(b) En déduire, en utilisant $A_1^\top A_1 = A_2^\top A_2$, que $\Delta^2 = \mathrm{I}_n$.

(c) En déduire que $A_1 = A_2$.

11. On suppose $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et on considère φ_S le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ défini en B-II.. Soit $\mathrm{b} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{b}' = (v_1, \ldots, v_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de b pour le produit scalaire φ_S. On note A la matrice de passage de la base b' à la base b.

(a) Montrer $A \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $S = A^\top A$.