Mathématiques, DS 08-A : Centrale PC 2022

I Généralités sur les matrices symétriques réelles

Q 1. Supposons que A soit symétrique. Alors $\boxed{\text{par le théorème spectral, elle est orthodiagonalisable.}}$ Réciproquement, supposons A orthodiagonalisable. Alors on dispose de D diagonale et de P orthogonale telles que $A = PDP^\top$. Mais alors

$$A^\top = (P^\top)^\top D^\top P^\top = PDP^\top = A,$$

donc $\boxed{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).}$

I.A – Un exemple dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Q 2. On remarque que

$$\boxed{A_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.}$$

Ainsi $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre 7.

Q 3. On considère

$$A_1 - 7\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}-4 & -2 & 4\\ -2 & -1 & 2\\ 4 & 2 & -4\end{pmatrix}$$

Alors si l'on note (C_1, C_2, C_3) les colonnes de cette matrice, $C_1 = -C_3$, ce qui indique que $U = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est dans $E_7(A_1)$ (on le savait déjà), et $C_1 = 2C_2$, ce qui indique que $V = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ est aussi vecteur propre de A_1.
De plus, $A_1 \neq 7\mathrm{I}_3$, donc $E_7(A_1) \neq \mathbb{R}^3$. Ainsi,

$$\boxed{E_7(A_1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\right).}$$

Par ailleurs, si l'on nomme λ_2 l'autre valeur propre de A_1, on sait que $\boxed{2\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(A_1) = 12}$, donc $\lambda_2 = -2$.

Q 4. On orthogonalise la base trouvée : on pose

$$\begin{aligned} W &= V - \frac{1}{\|U\|^2}\langle U, V\rangle\, U \\ &= V - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, une base orthonormée de $E_7(A_1)$ est

$$(e_1, e_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

On en déduit directement un troisième vecteur d'une BON de diagonalisation est

$$e_3 = e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en prenant

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -4 & \sqrt{2} \\ 3 & -1 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

on a bien $\boxed{A_1 = PDP^\top.}$

I.B – Un exemple dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Q 5. On montre que ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

- déjà, par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, ϕ est symétrique : pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\phi(P, Q) = \phi(Q, P)$.
- ensuite, on montre la bilinéarité.
  Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors

  $$\begin{aligned} \phi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q) &= \int_0^1 (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t) Q(t) dt \\ &= \lambda_1 \int_0^1 P_1(t) Q(t) dt + \lambda_2 \int_0^1 P_2(t) Q(t) dt \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &\boxed{= \lambda_1 \phi(P_1, Q) + \lambda_2 \phi(P_2, Q).} \end{aligned}$$

  D'où la linéarité par rapport à la première variable et, par symétrie, la bilinéarité.
- on montre enfin le caractère défini positif. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors

  $$\phi(P, P) = \int_0^1 P(t)^2 dt \boxed{\geqslant 0 \text{ par positivité de l'intégrale.}}$$

  De plus, si $\phi(P, P) = 0$ alors, comme $t \mapsto P(t)^2$ est une fonction continue sur $[0, 1]$, positive, d'intégrale nulle, elle est nulle. Donc, pour tout t, $P(t)^2 = 0$.
  Ainsi, P admet une infinité de racines, donc P est le polynôme nul : $\boxed{P = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}.}$

Ainsi, ϕ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q 6. Soient i et j dans $[\![0, n-1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned} \phi(X^i, X^j) &= \int_0^1 t^i t^j dt \\ &\boxed{= \frac{1}{i+j+1}} \end{aligned}$$

Q 7. On calcule, en notant $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} U^\top HU &= \sum_{i=0}^{n-1} u_i [HU]_{i,1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} u_i \sum_{j=0}^{n-1} h_{i,j} u_j \\ &\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} \phi(X^i, X^j) u_i u_j = \phi\left(\sum_{i=0}^{n-1} u_i X^i, \sum_{j=0}^{n-1} u_j X^j\right) = \phi(P, P),} \end{aligned}$$

où $\boxed{P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i X^i.}$

Q 8. Déjà, $\boxed{H \text{ est clairement symétrique car } \phi(X^i, X^j) = \phi(X^j, X^i).}$
Ensuite, pour tout U dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\boxed{U^\top HU = \phi(P, P) \geqslant 0}$ donc $H \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que ses valeurs propres sont strictement positives.

I.C – Rayon spectral

Q 9. Si A est nilpotente, déjà A n'est pas inversible donc $0 \in \mathrm{Sp}(A)$. Ensuite, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors on dispose de $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Alors

$$A^p X = \lambda^p X = 0_{n,1}.$$

Mais, comme $X \neq 0$, cela signifie que $\lambda^p = 0$, i.e. $\boxed{\lambda = 0.}$ Le spectre de A est donc réduit à $\{0\}$, ce qui signifie que $\boxed{\rho(A) = 0.}$

Q 10. On note

$$f : \left| \begin{array}{r} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ U \mapsto U^\top U \end{array} \right.$$

Comme l'application $(U, V) \mapsto U^\top V$ est $\boxed{\text{bilinéaire sur un espace de dimension finie, donc continue,}}$ on en déduit que f est continue. Ainsi, $\boxed{C = f^{-1}(\{1\})}$ et $\{1\}$ est fermé, donc C est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
Autre argument, C est la sphère unité pour la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique...

Q 11. On note

$$f : \left| \begin{array}{r} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ U \mapsto |U^\top AU| \end{array} \right. .$$

De même qu'à la question précédente, $(U, V) \mapsto U^\top AV$ est bilinéaire sur un espace de dimension finie donc est $\boxed{\text{continue.}}$
De plus, C est $\boxed{\text{fermé}}$ par la question précédente ; $\boxed{C \text{ est de plus borné}}$ car C est la sphère unité pour la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Donc, $\boxed{\text{par le théorème des bornes atteintes,}}$ g admet un maximum sur C.

Q 12. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, X un vecteur propre associé, $Y = \dfrac{1}{\|X\|}X$. Alors $Y \in C$ et

$$\boxed{g(Y) = |Y^\top AY| = |Y^\top \lambda Y| = |\lambda||Y^\top Y| = |\lambda|.}$$

Mais $g(Y) \leqslant \max\limits_{U\in C} |U^\top AU|$, donc

$$|\lambda| \leqslant \max_{U\in C} |U^\top AU|,$$

d'où

$$\boxed{\rho(A) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda| \leqslant \max_{U\in C} |U^\top AU|.}$$

I.D – Rayon spectral d'une matrice symétrique

Q 13. Par le $\boxed{\text{théorème spectral,}}$ la matrice A est diagonalisable en baase orthonormée.
Notons $\lambda_1, \dots \lambda_n$ les valeurs propres, ordonnées de sorte que $|\lambda_1| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_n|$.
Notons ensuite $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de diagonalisation telle que $Ae_i = \lambda_i e_i$.
Soit $U \in C$, écrivons $U = \sum\limits_{i=1}^n u_i e_i$. Alors

$$\begin{aligned} |U^\top AU| &= |\langle U, AU\rangle| \\ &= \left|\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^2\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n |\lambda_i| u_i^2 \\ &\boxed{\leqslant |\lambda_n| \sum_{i=1}^n u_i^2 = |\lambda_n|} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\max_{U\in C} |U^\top AU| \leqslant |\lambda_n| = \rho(A),}$$

d'où l'égalité entre les deux quantités par l'inégalité de la question 12.

Q 14. Si toutes les valeurs propres de A sont positives, on a pour tout U

$$|U^\top AU| = U^\top AU$$

et $|\lambda_i| = \lambda_i$ pour tout i. Les raisonnements précédents fonctionnent toujours, mais sans valeur absolue. Donc

$$\boxed{\rho(A) = \max_{U\in C}(U^\top AU).}$$

Q 15. Vérifions que ρ satisfait toutes les hypothèses d'une norme :

- déjà, ρ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,
- ensuite, si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$ sont les valeurs propres de αA, donc

$$\rho(\alpha A) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\alpha\lambda| = |\alpha| \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda| \boxed{= |\alpha|\rho(A)}$$

D'où l'homogénéité.

- considérons maintenant $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\rho(A) = 0$. Alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ donc, comme A est diagonalisable, A est nulle. $\boxed{\text{D'où la séparation.}}$
- enfin, soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $U \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned}|U^\top (A+B)U| &= |U^\top AU + U^\top BU| \\ &\leqslant |U^\top AU| + |U^\top BU| \text{ par inégalité triangulaire avec la valeur absolue.} \\ &\boxed{\leqslant \rho(A) + \rho(B)} \text{ par la question 13}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\rho(A+B) = \max_{U \in C} |U^\top (A+B)U| \leqslant \rho(A) + \rho(B)}$$

D'où l'inégalité triangulaire.

Donc ρ définit bien une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

II Matrice de covariance

II.A

Q 16. On sait que la covariance est une forme bilinéaire symétrique, donc, pour tous i et j,

$$\boxed{\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathrm{Cov}(Y_j, Y_i) = \sigma_{ji}.}$$

Ensuite, on sait que

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) &= \mathbb{E}((Y_i - \mathbb{E}(Y_i))(Y_j - \mathbb{E}(Y_j)) \\ &\boxed{= \mathbb{E}([VV^\top]_{ij}),}\end{aligned}$$

en posant

$$V = \begin{pmatrix} Y_1 - \mathbb{E}(Y_1) \\ \vdots \\ Y_n - \mathbb{E}(Y_n) \end{pmatrix} = Y - \mathbb{E}(Y).$$

Le résultat demandé est ainsi démontré.

Si U est un vecteur constant dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\mathbb{E}(Y + U) = \mathbb{E}(Y) + U,$$

donc

$$\boxed{Y + U - \mathbb{E}(Y + U) = Y - \mathbb{E}(Y),}$$

donc

$$\boxed{\Sigma_Y = \Sigma_{Y+U}}$$

Q 17. Les coordonnées de Z sont des combinaisons linéaires de variables admettant une espérance, donc Z admet une espérance. On sait que pour $i \in [\![1, p]\!]$,

$$[Z]_i = \sum_{j=1}^{n} [M]_{ij} [Y]_j$$

Ainsi, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}([Z]_i) = \sum_{j=1}^{n} [M]_{ij} \mathbb{E}([Y]_j).$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(Z) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}([Z]_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}([Z]_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} [M]_{1j}\mathbb{E}([Y]_j) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} [M]_{pj}\mathbb{E}([Y]_j) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbb{E}([Y]_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}([Y]_n) \end{pmatrix} \boxed{= M\mathbb{E}(Y)}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (Z - \mathbb{E}(Z))\,(Z - \mathbb{E}(Z))^\top &= M(Y - \mathbb{E}(Y))\,(M(Y - \mathbb{E}(Y)))^\top \\ &= M(Y - \mathbb{E}(Y))(Y - \mathbb{E}(Y))^\top M^\top \end{aligned}$$

On en déduit, en faisant le même travail sur l'espérance que précédemment, que

$$\begin{aligned} \Sigma_Z &= \mathbb{E}\left((Z - \mathbb{E}(Z))\,(Z - \mathbb{E}(Z))^\top\right) \\ &= M\mathbb{E}\left((Y - \mathbb{E}(Y))(Y - \mathbb{E}(Y))^\top\right) M^\top \\ &\boxed{= M\Sigma_Y M^\top.} \end{aligned}$$

II.B – Propriété des valeurs propres

Q 18. Par la question précédente,

$$\Sigma_X = P^\top \Sigma_Y P$$

Mais P étant la matrice de passage de la base canonique à une base orthonormée formée de vecteurs propres de Σ_Y, si on note $C_1, \dots, C_n$ les coefficients de P et λ_i la valeur propre associée à C_i, on en déduit que

$$\boxed{\Sigma_X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}}$$

Donc Σ_X est diagonale.

Q 19. La matrice Σ_X est diagonale et on a

$$\boxed{\lambda_i = [\Sigma_X]_{ii} = \mathrm{Cov}(X_i, X_i) = \mathbb{V}(X_i) \geqslant 0,}$$

donc les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de Σ_Y sont positives.

Q 20. Par définition,

$$\boxed{\mathbb{V}_T(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = \mathrm{Tr}(\Sigma_X) = \mathrm{Tr}(\Sigma_Y) = \mathbb{V}_T(Y),}$$

car la trace est un invariant de similitude.

II.C – Étude de la réciproque

Q 21. Soient $Z_1, \dots, Z_n$ $\boxed{n \text{ variables aléatoires } \textbf{indépendantes}}$ telles que $\boxed{\mathbb{V}(Z_i) = \lambda_i}$ (par exemple, si $\lambda_i = 0$, on prend Z_i constante et, si $\lambda_i > 0$, on prend $Z_i \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Alors pour $i \neq j$,

$$[\Sigma_Z]_{i,j} = \mathrm{Cov}(Z_i, Z_j) = 0 \text{ par indépendance.}$$

De plus,
$$[\Sigma_Z]_{i,i} = \mathrm{Cov}(Z_i, Z_i) = \mathbb{V}(Z_i) = \lambda_i.$$

Ainsi, on conclut bien que $\boxed{\Sigma_Z = D.}$

Q 22. La matrice A est symétrique réelle donc, par le théorème spectral, on dispose de D diagonale et de P orthogonale telles que
$$A = PDP^\top.$$

Soit maintenant Z telle que $\Sigma_Z = D$. $\boxed{\text{Posons } Y = PZ.}$ Alors par la question **17**, on sait que
$$\boxed{\Sigma_Y = P\Sigma_Z P^\top = PDP^\top = A.}$$

II.D

Q 23. On fait bien attention, U est un vecteur colonne. Ainsi,
$$X = \sum_{i=1}^{n} u_i Y_i.$$

On en déduit que
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i Y_i\right)\\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mathrm{Cov}(u_i Y_i, u_j Y_j)\\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} u_i \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) u_j\\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} u_i [\Sigma_Y]_{i,j} u_j\\ &\boxed{= U^\top \Sigma_Y U.}\end{aligned}$$

II.E – Image de Σ_Y

Q 24. Si $r = n$, $\mathfrak{Im}(\Sigma_Y) = \mathbb{R}^n$ donc, comme pour tout ω dans Ω, $Y(\omega) - \mathbb{E}(Y) \in \mathbb{R}^n$, on en déduit que
$$\boxed{\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) - \mathbb{E}(Y) \in \mathfrak{Im}(\Sigma_Y)}$$

donc que $\boxed{\mathbb{P}(Y - \mathbb{E}(Y) \in \mathfrak{Im}(\Sigma_Y)) = 1.}$

Q 25. Soients $X \in \ker(\Sigma_Y)$ et $X' \in \mathrm{Im}(\Sigma_Y)$. On dispose de $U \in \mathbb{R}^n$ tel que $X' = \Sigma_Y U$. Alors
$$\begin{aligned}\langle X, X'\rangle &= \langle X, SU\rangle\\ &= \langle SX, U\rangle \text{ car } S \text{ est symétrique.}\\ &\boxed{= 0 \text{ car } X \in \ker(S).}\end{aligned}$$

Donc X et X' sont orthogonaux, donc $\boxed{\text{le noyau et l'image de } \Sigma_Y \text{ sont orthogonaux.}}$
De plus, par le théorème du rang, $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(\Sigma_Y)) + \dim(\ker(\Sigma_Y)) = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n}$, donc on en déduit que $\boxed{\text{le noyau et l'image de } \Sigma_Y \text{ sont supplémentaires orthogonaux.}}$

Q 26. Soit $j \in [\![1, d]\!]$. Alors, par la $\boxed{\text{question 23,}}$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\left(V_j^\top(Y-\mathbb{E}(Y))\right) &= V_j^\top \Sigma_{Y-\mathbb{E}(Y)} V_j \\ &= V_j^\top \Sigma_Y V_j \text{ par la } \boxed{\text{question 16}} \\ &= 0 \text{ car } V_j \in \ker(\Sigma_Y).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Q 27. La variable aléatoire réelle $V_j^\top(Y-\mathbb{E}(Y))$ est de variance nulle, $\boxed{\text{elle est donc presque sûrement constante,}}$ égale à son espérance. Or,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(V_j^\top(Y-\mathbb{E}(Y))\right) &= V_j^\top(\mathbb{E}(Y)-\mathbb{E}(Y)) \text{par la } \boxed{\text{question 17}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\mathbb{P}\left(V_j^\top(Y-\mathbb{E}(Y))=0\right)=1.}$$

Q 28. On peut alors conclure que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Y-\mathbb{E}(Y)\in \mathfrak{Im}(\Sigma_Y)\right) = \mathbb{P}\left(Y-\mathbb{E}(Y)\in \ker(\Sigma_Y)^\perp\right) &= \mathbb{P}\left(\forall j \in [\![1, d]\!]\ \langle Y-\mathbb{E}(Y), Y_j\rangle = 0\right) \\ &\boxed{= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{d}\{V_j^\top(Y-\mathbb{E}(Y))=0\}\right) = 1,}\end{aligned}$$

car pour tout j, l'événement $\{V_j^\top(Y-\mathbb{E}(Y))=0\}$ est de probabilité 1.
On justifie le passage à l'intersection en remarquant que si $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=1$, alors

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$$

donc, comme $A\subset \mathbb{P}(A\cup B)$, $1\leqslant \mathbb{P}(A\cup B)$ donc $\mathbb{P}(A\cup B)=1$, donc $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B)=1+1-1=1$. On en déduit le résultat par récurrence.

III Maximisation de la variance

III.A – Un exemple dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Q 29. La matrice A_2 est diagonale à coefficients positifs donc, d'après la $\boxed{\text{question 21}}$, on dispose d'un vecteur aléatoire Z donc A_2 est la matrice de covariance.

Q 30. Soit $U=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, de norme 1 (i.e. dans C). Alors

$$\begin{aligned}q_Y(U) &= \mathbb{V}(U^\top Y) \\ &= U^\top\Sigma_Y U \\ &= 9u_1^2+5u_2^2+4u_3^2 \\ &\leqslant 9(u_1^2+u_2^2+u_3^2)=9\end{aligned}$$

Mais pour $U=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $U\in C$ et $q_Y(U)=9$, donc

$$\boxed{\max_{U\in C} q_Y(U)=9.}$$

III.B – Cas général

Q 31. Par la $\boxed{\text{question 19}}$, les valeurs propres de Σ_Y sont toutes positives ; par la question 23, on sait que $q_Y(U) = U^\top \Sigma_Y U$.
Mais par la $\boxed{\text{question 14}}$, on sait alors que $\boxed{q_Y \text{ admet un maximum sur } C,}$ égal à $\boxed{\rho(\Sigma_Y).}$
Si l'on note $\lambda_{\max}$ la plus grande valeur propre de Σ_Y et U_0 un vecteur propre associé, alors

$$\boxed{\mathbb{V}(U_0^\top Y) = q_Y(U_0) = \max_{U \in C} \mathbb{V}(U^\top Y).}$$

III.C – Étude d'un exemple

Q 32. On sait, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la covariance, que

$$\boxed{\gamma\sigma^2 = \sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(X_i)\mathbb{V}(X_j)} = \sigma^2,}$$

donc, σ étant strictement positif, $\boxed{\gamma \leqslant 1}$.
On a de plus

$$\boxed{\Sigma_Y = \sigma^2\gamma J + \sigma^2(1-\gamma)\mathrm{I}_n.}$$

Q 33. Déjà, J étant symétrique réelle, elle est diagonalisable. Ensuite, J étant non nulle et avec ses colonnes identiques, $\mathrm{rg}(J) = 1$ donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } J \text{ et } \dim(E_0(J)) = \dim(\ker(J) = n-1.}$
Enfin, si l'on note λ_n la dernière valeur propre de J, on sait que $\mathrm{Tr}(J) = (n-1).0 + \lambda_n$ donc

$\boxed{\lambda_n = n}$. Un vecteur propre associé à la valeur propre n est $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}$.

Q 34. On vient de dire qu'il existait P orthogonale telle que

$$J = P\mathrm{diag}(0, \dots, 0, n)P^\top$$

Donc, comme $\mathrm{I}_n = PP^\top$,

$$\boxed{\Sigma_Y = P\mathrm{diag}\left(\sigma^2(1-\gamma), \dots, \sigma^2(1-\gamma), n\sigma^2\gamma + \sigma^2(1-\gamma)\right) P^\top}$$

Donc la plus grande valeur propre de Σ_Y est

$$\boxed{n\sigma^2\gamma + \sigma^2(1-\gamma) = \sigma^2(1 + (n-1)\gamma),}$$

toujours associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Par la question 31, si l'on pose

$$\boxed{U_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},}$$

alors la variance de $Z = U_0^T Y$, i.e. $q_Y(U_0)$, est maximale.

Q 35. On calcule alors

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Z) &= U_0^\top \Sigma_Z U_0 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} [\Sigma_Z]_{i,j} \\ &\boxed{= \frac{1}{n}\left(n\sigma^2 + n(n-1)\gamma\sigma^2\right)}\end{aligned}$$

De plus,

$$\mathbb{V}_T(Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i) = \mathrm{Tr}(\Sigma_Y) = n\sigma^2,$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{V}_T(Y)} &= \frac{1}{n^2}(n + n(n-1)\gamma) \\ &\boxed{= \frac{1+(n-1)\gamma}{n}.}\end{aligned}$$

III.D

Q 36. On a déjà dit que C était fermé et borné. Or,

$$C' = C \cap F,$$

où

$$F = \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ U_0^\top U = 0\} = \ker(\varphi),$$

où $\varphi : U \mapsto U_0^\top U$ est $\boxed{\text{continue, car linéaire sur un espace de dimension finie.}}$

Donc F est fermé donc, comme intersection de fermés, $\boxed{C' \text{ est fermé.}}$

De plus, $C' \subset C$, qui est borné, donc C' est borné.

L'application q_Y étant continue car polynomiale en dimension finie, elle admet un maximum sur le fermé borné C' par le $\boxed{\text{théorème des bornes atteintes.}}$

Q 37. On considère une BON de vecteurs propres de Σ_Y, $(E_1, \ldots, E_n)$. On a notamment $E_1 = U_0$. Alors $F = \mathrm{Vect}(U_0)^\perp = \mathrm{Vect}(E_2, \ldots, E_n)$. Un calcul analogue à celui de la question 14 montre que le maximum de q_Y sur C', $\boxed{\text{qui est la boule unité de } F}$, $\boxed{\text{est égal à } \lambda_2, \text{ et } U_1 = E_2 \text{ convient.}}$

Q 38. On remarque que si A et B sont deux variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre deux, on a

$$\mathbb{V}(A+B) = \mathbb{V}(A) + 2\mathrm{Cov}(A,B) + \mathbb{V}(B) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(A-B) = \mathbb{V}(A) - 2\mathrm{Cov}(A,B) + \mathbb{V}(B)$$

donc $\mathrm{Cov}(A,B) = \frac{1}{4}(\ \mathrm{V}(A+B) - \mathbb{V}(A-B))$. C'est une identité de polarisation.

On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(U_0^\top Y, U_1^\top Y\right) &= \frac{1}{4}\left(\mathbb{V}\left((U_0+U_1)^\top Y\right) - \mathbb{V}\left((U_0-U_1)^\top Y\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((U_0+U_1)^\top \Sigma_Y (U_0+U_1) - (U_0-U_1)^\top \Sigma_Y (U_0-U_1)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((\lambda_1+\lambda_2) - (\lambda_1+\lambda_2)\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

les variables $U_0^\top Y$ et $U_1^\top Y$ sont donc décorrélées.