Mathématiques, DS 08-A : CCINP PC 2020

EXERCICE 1 – Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Partie I - Préliminaires

Q1. On sait que

- $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}$ est $\boxed{\text{continue sur }]0,+\infty[,}$
- $|\varphi_x(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$, intégrable sur $[0,+\infty[$ donc, par comparaison, $\boxed{\varphi_x \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$

Q2. On note $a(t) = 1-\cos(t)$, donc $a'(t) = \sin(t)$ et $b(t) = -\dfrac{1}{t}$ donc $b'(t) = \dfrac{1}{t^2}$. Or, le crochet

$$[a(t)b(t)]_0^{+\infty} = \left[-\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_0^{+\infty}$$

converge, car

$$\boxed{-\frac{1-\cos(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^2}{2t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0}$$

et

$$\boxed{\left|-\frac{1-\cos(t)}{t}\right| \leqslant \frac{2}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

Donc, par le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt \text{ et } \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

sont de même nature.
Or,

- $\psi : t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est $\boxed{\text{continue}}$ sur $]0,+\infty[$,
- $\psi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2t^2} = \dfrac{1}{2}$, donc ψ est $\boxed{\text{prolongeable par continuité en } 0,}$
- enfin,

$$\boxed{|\psi(t)| \leqslant \frac{1}{t^2},}$$

  intégrable en $+\infty$, donc, par comparaison, ψ est intégrable en $+\infty$.

Q3. On note $h(t) = u(x,t)$. Alors h est dérivable et pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} h'(t) &= -\frac{x\cos(t)-\sin(t)}{1+x^2}\mathrm{e}^{-xt} + x\frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2}\mathrm{e}^{-xt} \\ &= \frac{-x\cos(t)+\sin(t)+x^2\sin(t)+x\cos(t)}{1+x^2}\mathrm{e}^{-xt} \\ &\boxed{= \sin(t)\mathrm{e}^{-xt},} \end{aligned}$$

donc $\boxed{h \text{ est bien une primitive de } t \mapsto \sin(t)\mathrm{e}^{-xt} \text{ sur }]0,+\infty[.}$

Partie II - Calcul de F sur $]0,+\infty[$

Q 4. Soit $x > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
|F(x)| &= \left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}dt\right| \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{e}^{-xt}dt \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}dt \text{ par l'inégalité admise.} \\
&\boxed{\leqslant \left[\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

On en déduit, par encadrement, que $\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

Q 5. Il s'agit d'appliquer un théorème de dérivation des intégrales à paramètre. On sait que

- pour tout $x \geqslant a$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$, intégrable sur $]0,+\infty[$,
- pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable, de dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\mathrm{e}^{-xt}dt$,
- pour tout $x \geqslant a$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$,
- Pour tout $x \geqslant a$ et $t > 0$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at},$$

intégrable et indépendant de x.

Ainsi, par le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, F est dérivable sur $[a,+\infty[$ et

$$\boxed{\forall x \in [a,+\infty[,\ F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}dt.}$$

Q 6. F est dérivable sur tout $[a,+\infty[$ avec $a > 0$, donc sur tout segment de $]0,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$. On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}dt \\
&= -\left[u(x,t)\right]_{t=0}^{+\infty} \\
&= -\left(0 - -\frac{1}{1+x^2}\right) \\
&\boxed{= -\frac{1}{1+x^2}.}
\end{aligned}$$

On en déduit que l'on dispose de $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$,

$$\boxed{F(x) = -\mathrm{Arctan}(x) + C.}$$

Mais $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $C = \dfrac{\pi}{2}$ et, finalement,

$$\boxed{\forall x > 0,\ F(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x).}$$

Partie III - Conclusion

Q 7. Il s'agit d'appliquer un théorème de continuité des intégrales à paramètre. On sait que

- pour tout x dans $[0,1]$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,1]$,
- pour tout t dans $]0,1]$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$,
- pour tout x dans $[0,1]$ et t dans $]0,1]$,
$$|f(x,t)| = \frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{e}^{-xt} \leqslant 1,$$
intégrable sur $[0,1]$ et indépendante de x.

Donc, $\boxed{\text{d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre}}$, la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.

Q 8. Si $x \in [0,1]$, $|u(x,t)| \leqslant 2$, donc
$$\frac{|u(x,t)|}{t^2} \leqslant \frac{2}{t^2},$$
intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
On fixe alors $x \in [0,1]$. On pose $a(t) = u(x,t)$, donc $a'(t) = \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}$, et $b(t) = -\dfrac{1}{t}$ donc $b'(t) = \dfrac{1}{t^2}$. Le crochet $[a(t)b(t)]_1^{+\infty}$ converge, donc, comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} a(t)b'(t)dt$ converge, le théorème d'intégration par parties assure que
$$\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt = [a(t)b(t)]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt} \times \frac{-1}{t}dt$$
$$\boxed{= -\frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}\mathrm{e}^{-x} + F_2(x).}$$

D'où le résultat désiré.

Q 9. On applique un théorème de continuité des intégrales à paramètre sur $G(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt$.

- pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$,
- pour tout t dans $[1,+\infty[$, $x \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue sur $[0,1]$,
- si $x \in [0,1]$ et $t \in [1,+\infty[$,
$$\frac{|u(x,t)|}{t^2} \leqslant \frac{2}{t^2},$$
indépendante de x et intégrable sur $[1,+\infty[$.

Donc, par le théorème de continuité des intégrales à paramètre, G est continue sur $[0,1]$, donc F_2 l'est aussi.

Q 10. On en déduit que $F = F_1 + F_2$ est continue sur $[0,1]$ et que
$$\boxed{\mathrm{I} = F(0) = \frac{\pi}{2}.}$$

EXERCICE 2 – Extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée

Partie I - Étude d'un exemple

Q 11. L'application f est $\boxed{\text{continue}}$ car $\boxed{\text{polynomiale sur un espace vectoriel de dimension finie.}}$
B_2 est $\boxed{\text{fermée}}$ car c'est une boule fermée, $\boxed{\text{bornée}}$ par 1.
Donc, $\boxed{\text{par le théorème des bornes atteintes,}}$ la fonction f admet un maximum et un minimum sur B_2.

Q 12. On pose $\varphi : t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$. Comme $S_2 = \{(\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]\}$, déterminer les extremums de φ sur $[0, 2\pi]$ permet de déterminer les extremums de f sur S_2.
Pour $t \in [0, 2\pi]$,

$$\boxed{\varphi(t) = \cos(t)^2 + \sin(t)^2 + 4\sin(t)\cos(t) = 1 + 2\sin(2t)}$$

Or, sur $[0, 2\pi]$, le maximum de $\sin(2t)$ est 1 et son minimum est -1.
Donc $\min\limits_{t\in[0,2\pi]} \varphi(t) = -1$ et $\max\limits_{t\in[0,2\pi]} \varphi(t) = 3$.
Donc

$$\boxed{\min_{(x_1,x_2)\in S_2} f(x_1, x_2) = -1 \text{ et } \max_{(x_1,x_2)\in S_2} f(x_1, x_2) = 3}$$

Q 13. La fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ comme fonction polynomiale. De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 + 4x_1.$$

Ainsi, si (x_1, x_2) est un point critique, $2x_1 + 4x_2 = 0$, donc $x_1 = -2x_2$ et $x_2 + 2x_1 = 0$ donc $-3x_2 = 0$ donc

$$\boxed{(x_1, x_2) = (0, 0) \text{ est le seul point critique de } f.}$$

Q 14. On sait que f atteint son maximum et son minimum sur B_2 :

- si le maximum est atteint à l'intérieur de B_2, c'est nécessairement en un point critique, i.e. en $(0, 0)$, alors il vaudrait $f(0, 0) = 0$, ce qui est impossible car f atteint la valeur 3 sur S_2. Donc $\boxed{\text{le maximum de } f \text{ sur } B_2 \text{ est atteint sur } S_2 \text{ et vaut } 3.}$
- si le minimum est atteint à l'intérieur de B_2, c'est nécessairement en un point critique, i.e. en $(0, 0)$, alors il vaudrait $f(0, 0) = 0$, ce qui est impossible car f atteint la valeur -1 sur S_2. Donc $\boxed{\text{le maximum de } f \text{ sur } B_2 \text{ est atteint sur } S_2 \text{ et vaut } -1.}$

Q 15. On calcule

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule alors

$$\chi_{M_f}(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 - 4 = (x-3)(x+1),$$

donc $\boxed{\text{la plus petite valeur propre de } M_f \text{ vaut } -1 = \min\limits_{B_2} f}$ et $\boxed{\text{la plus grande valeur propre de } f \text{ vaut } 3 = \max\limits_{B_2}(f).}$

Partie II - Le cas général

Q 16. On calcule

$$\begin{aligned} X^\top M_f X &= \sum_{1\leqslant i}[X^\top]_i[M_f X]_i \\ &= \sum_{1\leqslant i} x_i \sum_{j=1}^n [M_f]_{ij}x_j \\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i[M_f]_{ij}x_j \\ &= \sum_{i=1}^n x_i[M_f]_{ii}x_i + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i[M_f]_{ij}x_j \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii}x_ix_i + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i a_{ij}x_j \\ &\boxed{= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_i a_{ij} x_j = f(x)} \end{aligned}$$

Q 17. La matrice M est $\boxed{\text{symétrique réelle}}$ donc, par le $\boxed{\text{théorème spectral,}}$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (en base orthonormée).

Q 18. On précise déjà que, P étant orthogonale, $P^{-1} = P^\top$. Ensuite, on calcule

$$\begin{aligned} Y^\top Y &= (P^\top X)^\top P^\top X \\ &= X^\top (P^\top)^\top P^\top X \\ &= X^\top P P^\top X \\ &\boxed{= X^\top X = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2} \end{aligned}$$

Q 19. Comme $x \in B_n$, $Y^\top Y = 1$. On note $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors

$$Y^\top D Y = Y^\top \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} \boxed{= \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.}$$

Or, pour tout i, $\lambda_1 \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_n$, d'où

$$\sum_{i=1}^n \lambda_1 y_i^2 \leqslant Y^\top D Y \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_n y_i^2,$$

donc, comme $\sum_{i=1}^n y_i^2 = \|x\|^2$, on peut affirmer que

$$\boxed{\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant Y^\top D Y \leqslant \lambda_n \|x\|^2 .}$$

Or, $\lambda_1 < 0$ et $\|x\|^2 \leqslant 1$, donc $\lambda_1 \leqslant \lambda_1 \|x\|^2$; de même $\lambda_n \|x\|^2 \leqslant \lambda_n$, d'où

$$\boxed{\lambda_1 \leqslant Y^\top D Y \leqslant \lambda_n.}$$

Or,
$$f(x) = X^\top M_f X = (PY)^\top M_f PY = Y^\top (P^\top M_f P)Y = Y^\top DY,$$
d'où l'inégalité pour $f(x)$.

Q 20. On a déjà l'encadrement de la question 19. De plus, en prenant pour x un vecteur propre unitaire associé à λ_1 (resp λ_n)
$$f(x) = \lambda_1 \|x\|^2 = \lambda_1 \text{ (resp. } \lambda_n)$$
Donc
$$\max_{B_n}(f) = \lambda_n \text{ et } \min_{B_n}(f) = \lambda_1.$$

Q 21. Si $\lambda_1 \geqslant 0$, le $\boxed{\text{même raisonnement que précédemment}}$ assure que
$$\boxed{\max_{B_n}(f) = \lambda_n}$$
De plus, on a, pour tout x dans B_n,
$$\boxed{f(x) \geqslant \lambda_1 \|x\|^2 \geqslant 0.}$$
Comme $f(0) = 0$, on en déduit que
$$\boxed{\min_{B_n}(f) = 0.}$$

Partie III - Application des résultats

Q 22. Dans cette question, on remarque que
$$[M_f]_{ii} = 1 \text{ et } [M_f]_{ij} = -1$$
Donc
$$\boxed{M_f - 2\mathrm{I}_n = -J,}$$
où J est la matrice constituée uniquement de 1. Elle est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormée.
Or, J est de $\boxed{rang 1}$ car elle est non nulle et toutes ses colonnes sont identiques. Donc le noyau de J est de dimension $n-1$. Donc $\boxed{\text{0 est valeur propre de } J \text{ de multiplicité } n-1.}$
De plus, J possède une autre valeur propre λ, vérifiant $(n-1) \times 0 + \lambda = \mathrm{Tr}(J) = n$, donc $\boxed{nestladernirevaleurproprede J.}$
Donc on dispose de $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que
$$\boxed{J = P \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & n \end{pmatrix} P^\top.}$$
Ainsi,
$$M_f = -J + 2\mathrm{I}_n \boxed{= J = P \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2 & \\ & & & 2-n \end{pmatrix} P^\top.}$$
La plus grande valeur propre de J est 2, donc $\boxed{\max_{B_n}(f) = 2}$. La plus petite valeur propre de J est strictement négative et vaut $2-n$ (ou vaut 0 si $n = 2$), donc $\boxed{\min_{B_n}(f) = 2-n.}$

EXERCICE 3 – Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Partie I - Calcul de p_n

Q 23. La variable aléatoire S_n représente la $\boxed{\text{position du pion à l'instant } n.}$ (c'est la somme de tous les déplacements)

Q 24. On calcule

$$\boxed{p_0 = \mathbb{P}(S_0 = 0) = 1} \text{ car le pion se trouve en 0 à l'instant 0.}$$

Ensuite,

$$\boxed{p_1 = \mathbb{P}(S_1 = 0) = 0,}$$

car le pion s'est nécessairement déplacé en -1 ou en 1.
Enfin,

$$\begin{aligned}
p_2 &= \mathbb{P}(S_2 = 0) \\
&= \mathbb{P}(\{X_1 = 1, X_2 = -1\} \cup \{X_1 = -1, X_2 = 1\}) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1) + \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 1) \text{ car les deux événements sont disjoints.} \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = -1) + \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(X_2 = 1) \\
&\boxed{= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Q 25. Soit $\omega \in \Omega$. Pour que $S_n(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$ soit égal à 0, il faut qu'il y ait autant d'indices i tels que $X_i(\omega) = 1$ que d'indices i tels que $X_i(\omega) = -1$, autrement dit que n soit pair.
Ainsi, $\boxed{\text{si } n \text{ est impair, } \mathbb{P}(S_n = 0) = 0.}$

Q 26. On remarque que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_k = 0) &= \mathbb{P}\left(\frac{X_k + 1}{2} = 0\right) \\
&= \mathbb{P}(X_k + 1 = 0) \\
&= \mathbb{P}(X_k = -1) \\
&\boxed{= \frac{1}{2}.}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_k = 1) &= \mathbb{P}\left(\frac{X_k + 1}{2} = 1\right) \\
&= \mathbb{P}(X_k + 1 = 2) \\
&= \mathbb{P}(X_k = 1) \\
&\boxed{= \frac{1}{2}.}
\end{aligned}$$

Donc Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Q 27. Comme $(X_1, \ldots, X_n)$ sont indépendantes, par le $\boxed{\text{lemme des coalitions,}}$, $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont indépendantes. Donc Z_n est la somme de n variables de Bernoulli mutuellement indépendantes, donc Z_n $\boxed{\text{suit une loi binomiale de paramètres } \left(n, \frac{1}{2}\right).}$

Ensuite,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} X_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (2Y_i - 1) \\ &\boxed{= 2Z_n - n.} \end{aligned}$$

Q 28. De la question précédente, on déduit que

$$\begin{aligned} p_{2m} &= \mathbb{P}(S_{2m} = 0) \\ &= \mathbb{P}(2Z_{2m} - 2m = 0) \\ &= \mathbb{P}(Z_{2m} = m) \\ &= \binom{2m}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2m-m} \\ &\boxed{= \binom{2m}{m}} \end{aligned}$$

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q 29. On sait que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $0 \leqslant p_n \leqslant 1$; or, le rayon de convergence de $\sum x^n$ est 1. Donc, par comparaison, $\boxed{R_p \geqslant 1.}$

Q 30. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right) &= \frac{1}{m!} \prod_{k=1}^{m} \frac{2k-1}{2} \\ &= \frac{1}{2^m m!} \prod_{k=1}^{m} (2k-1) \\ &= \frac{1}{2^m m!} \frac{(2m) \times (2m-1) \dots 2 \times 1}{(2m) \times (2m-2) \times \cdots \times 2} \\ &= \frac{1}{2^m m!} \frac{(2m)!}{2^m m!} \\ &\boxed{= \frac{1}{4^m} \binom{2m}{m} = p_{2m}} \end{aligned}$$

Q 31. On sait que

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n,$$

où

$$a_n = \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - m + 1)$$

En prenant $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ et $t = -x^2$, on remarque que

$$\boxed{f(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.}$$

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

Q 32. Comme S_1 ne peut pas être nul, $\boxed{\mathbb{P}(T=1)=0.}$
Ensuite, on a vu que

$$\boxed{\mathbb{P}(T=2)=\mathbb{P}(S_2=0)=\frac{1}{2}.}$$

Q 33. On sait que pour tout x dans $[-1,1]$, $|g_n(x)| \leqslant q_n$, indépendant de x. Donc

$$\boxed{\|g_n\|_\infty^{[-1,1]} \leqslant q_n,}$$

terme général d'une série convergente (car $\sum\limits_{n\geqslant 0} q_n = \sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(T=n) \leqslant 1$).

On en déduit que pour tout t dans $[-1,1]$, $\boxed{(q_n t^n) \text{ est bornée.}}$ Par la définition du rayon de convergence, $\boxed{R_q \geqslant 1.}$

Q 34. Les séries entières $f(x)$ et $g(x)$ ont toutes deux un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, donc la série entière de terme général $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$ aussi et, par produit de Cauchy,

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right)x^n \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right)x^n \text{ car } p_0 q_0 = 0. \\
&= \sum_{n\geqslant 1} p_n x^n \\
&\boxed{= f(x)-1.}
\end{aligned}$$

Q 35. On sait que pour tout x dans $]-1,1[$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On en déduit que pour tout x dans $]-1,1[$,

$$\frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1.$$

Donc

$$\boxed{g(x) = 1-\sqrt{1-x^2}.}$$

La fonction $t \mapsto \sqrt{1+t}$ est développable en série entière ; le rayon de convergence de cette série entière vaut 1 et

$$\forall t \in]-1,1[,\ \sqrt{1+t} = 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-k+1\right)\right)x^n$$

Or,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-k+1\right) &= \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\cdots\times\left(-\frac{2n-3}{2}\right) \\
&= \boxed{\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}}
\end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 - 1 - \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}(-1)^n x^{2n} \\ &= \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} x^{2n}. \end{aligned}$$

Q 36. On en déduit donc, par unicité du développement en série entière, que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.}$$

Q 37. On sait que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T < +\infty) &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(T = n) \\ &= \sum_{n\geqslant 0} q_n \\ &= g(1) \text{ par convergence normale de } \sum g_n \text{ sur } [-1,1] \\ &= 1 - \sqrt{1-1} = 1, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\mathbb{P}(T = +\infty) = 1 - \mathbb{P}(T < +\infty) = 0.}$$

Ceci signifie que $\boxed{\text{la variable } T \text{ est presque sûrement finie}}$, c'est-à-dire que le pion revient à zéro en temps fini avec probabilité 1.

Q 38. On remarque que g est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc, par le $\boxed{\text{théorème de la limite de la dérivée,}}$ g $\boxed{\text{n'est pas dérivable en 1}}$.
Donc la fonction génératrice de T n'est pas dérivable en 1, $\boxed{\text{donc } T \text{ n'admet pas d'espérance.}}$