1 Centrale 1

1.1 *(Éric Baudet)*

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ soit $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{1-x^n}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1,1[$.

b) Montrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

1.2 *(Dorian Berchoux)*

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ soit $u_n(x) = \frac{(-1)^n n}{n^2+x}$.

a) Établir la convergence simple de la série de terme général $u_n(x)$ sur $\mathbf{R}_+$.

b) Pour $a > 0$, établir la convergence uniforme de la série de terme général $u_n(x)$ sur $[0,a]$.

c) Soit (a_n) une suite croissante de réels positifs.

   i) Montrer que $0 \leqslant (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \leqslant a_n$.

   ii) Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbf{R}_+$.

1.3 *(Blandine Griselin)*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,1\}$, de lois uniformes ; et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) Pour $t \in \mathbf{R}$, justifier que $\exp(tX_n)$ admet une espérance et la calculer.
Montrer que $E(\exp(tX_n)) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$ pour tout $(n,t) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{R}$.

b) Justifier que $\exp(tS_n)$ admet une espérance et la calculer.
Déterminer la limite de $E(\exp(tS_n/\sqrt{n}))$ quand n tend vers $+\infty$.

c) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \forall t > 0,\ P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{\left(\frac{nt^2}{2} - n\varepsilon t\right)}$. Que peut-on en déduire ?

1.4 *(Anthony Jaecklé)*

Soit $S = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que S est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.
Montrer que S est semblable à une matrice de diagonale nulle.

b) Pour $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ on pose $\varphi(M) = \mathrm{diag}(1,2)M - M\mathrm{diag}(1,2)$. Déterminer l'image de φ.
Montrer qu'il existe C et D telles que $S = DC - CD$.

c) Montrer que toute matrice carrée de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle.

d) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ de trace nulle est $\left\{DC - CD\,;\ (C,D) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2\right\}$.

1.5 *(Abd Lbarch)*

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

a) Soit $x \in \mathbf{R}$ et $Z = \exp(x(S_n - n/2)^2)$ Montrer que Z est d'espérance finie et calculer son espérance.

b) Soit $a \in \mathbf{R}$ et $f(x) = ax - \ln(\mathrm{ch}(x/2))$.
Étudier $f(x)$ au voisinage de $\pm\infty$ et montrer que f admet un maximum $M(a)$.

c) Établir une certaine inégalité. . .

1.6 *(Tanguy Le Cloirec)*

Dans tout l'exercice, A est une matrice 2x2 à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

a) Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
i) A est inversible et A^{-1} est à coefficients dans $\mathbf{Z}$. ii) $\text{dét}(A) \in \{-1, 1\}$.

b) Dans la suite on suppose qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^p = I_2$.
Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, inversible, avec A^{-1} à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

c) Montrer que toute valeur propre de A est de module 1.

d) Montrer que le polynôme caractéristique de A appartient à un ensemble fini.

e) Soit $E_a = \left\{k \in \mathbf{N}^* : A^k = I_2\right\}$. Montrer que E_a admet un plus petit élément p_a.
Exprimer E_a en fonction de p_a.

1.7 *(Clément Poirson)*

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs positives; et $u_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier la convergence de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ et montrer que $S = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que $S = 1/2 \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (\frac{1-t}{2})^n f(t)\,\mathrm{d}t$ et que $\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}(p+1)}$.

c) Soit $S_n = \sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{k+1}$.
   i) Trouvez un encadrement de $\ln(2) - S_n$.
   ii) Trouvez un équivalent de $\ln(2) - S_n$.
   iii) Comment obtenir un développement asymptotique de $\ln(2) - S_n$?

1.8 *(Édouard Raimbault)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.

a) Déterminer la loi de $X + Y$.

b) Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ de $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$.

c) Soit X' et Y' deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1, 6]\!]$.
Montrer que si $X' + Y'$ et $X + Y$ suivent la même loi alors X' et Y' suivent une loi uniforme.

1.9 *(William Raymond)*

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que toute matrice non nulle de F soit inversible.

1) On suppose $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Montrer que pour tout couple de matrice (A, B) avec A inversible, il existe un scalaire α tel que $\alpha A - B$ ne soit pas inversible. En déduire que $\dim(F) \leqslant 1$.

2) On suppose $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.
   a) Que peut-on dire de F si n est impair ?
   b) Pour $n = 2$, donner un exemple avec F de dimension 2.
   c) Montrer que si n est pair la dimension de F ne peut excéder n.

1.10 *(Clara Roch)*

Soit $a_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} (\sin t)^{2n} \,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que la suite (a_n) est bien définie et déterminer sa limite.

b) Trouver une relation entre a_n et a_{n-1}.

c) Soit $b_n = \sqrt{n} a_n$. Établir la convergence de la série de terme général $\ln \frac{b_n}{b_{n-1}}$

1.11 *(Antonin Rouffet)*

Soit g une application de classe C^1 de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ et $S(g) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 ; z = g(x, y)\}$.

1) Montrer que $S(g)$ n'a que des points réguliers.

2) Une histoire de vecteur orthogonal à $S(g)$ revenant à $(E) : 2\partial_1 g(x, y) + \partial_2 g(x, y) = 0$.

3) Montrer que l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ défini par $u(x, y) = (x - 2y, y)$ est inversible.

4) Si h est une application de classe C^1 de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, on pose $f = h \circ u^{-1}$.
Calculer les dérivées partielles de f. En déduire les solutions de (E).

1.12 *(Émilie Stentz)*

1. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \,\mathrm{d}x$.
2. Soit f une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $|f(t)| \leqslant \frac{C}{1+t^2}$. Justifier l'existence, pour tout $h > 0$, de $S(h) = h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh)$.
3. On fixe $h > 0$ et l'on considère $\varphi_h :\ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}\,;\ t \mapsto f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)$. Montrer que $S(h) = \int_0^{+\infty} \varphi_h(t) \,\mathrm{d}t$.
4. Montrer que $S(h)$ tend vers $\int_0^{+\infty} f(t) \,\mathrm{d}t$ quand h tend vers 0.

1.13 *(Myriam Topa)*

1. (a) Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont toutes réelles.
   (b) Que dire des valeurs propres réelles des matrices antisymétriques réelles ?
2. Soit S l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $M^2 + M^T = I_n$.
   (a) Montrer que les matrices de S sont diagonalisables.
   (b) Montrer qu'une matrice de S est inversible si et seulement si elle est symétrique.

2 Centrale 2

2.1 *(Éric Baudet)*

On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $E = \mathrm{Vect}\{A, B, C\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2. Montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ il existe un unique élément $M_{a,b,c}$ de E tel que $M_{1,1} = a$, $M_{2,1} = b$ et $M_{3,1} = c$. Écrire une fonction $M(a, b, c)$ qui renvoie $M_{a,b,c}$. Que vaut $J = M(1, 1, 1)$?
3. Donner une norme de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. Écrire une fonction Norme(M) qui renvoie cette norme. En déduire une fonction test(M) qui renvoie True si M appartient à E et False sinon.

4. Donner les éléments propres de matrices $M_{a,b,c}$ pour a, b, c, choisis au hasard. Montrer que tous les éléments de E ont un vecteur propre commun.
5. Dans le cas où la trace de M est nulle, donner la forme du polynôme caractéristique de M.

Il y avait deux autres questions...

2.2 *(Dorian Berchoux)*

Les polynômes de Hilbert sont définis par : $H_0 = 1$ et $H_i(X) = \frac{1}{i!}\prod_{j=0}^{i-1}(X-j)$ pour $i \geqslant 1$.

1) Avec Python afficher H_k pour k variant de 0 à 7.
   Comparer $P(X) = 2 + X + 3X^2 + \cdots$ et $Q(X) = 2H_0 + 24H_1 + 526H_2 + \cdots + 2120H_6$
2) Soit T_n l'endomorphisme de $\mathbf{C}_n[X]$ défini par : $T_n(P) = P(X+1)$; et $L \in \mathbf{C}_n[X]$.
   i) Justifier l'existence et l'unicité de $(a_j)_{0\leqslant j\leqslant n} \in \mathbf{C}^{n+1}$ tel que $L = \sum_{j=0}^{n} a_j H_j$.
      Montrer que $\big(L(0), L(1), \ldots, L(n)\big) = \big(a_0, a_1, \ldots, a_n\big)M$
      où M est la matrice de T_n dans la base canonique de $\mathbf{C}_n[X]$.
      En déduire l'expression des a_i en fonction des $L(j)$.
      Qu'obtient-on si L est le polynôme P de la première question ?
   ii) Montrer que l'ensemble des entiers relatifs est stable par L si, et seulement si, L est combinaison linéaire à coefficients entiers des polynômes de Hilbert.
3)

2.3 *(Alexandre Descamps)*

$(q_k)_{k\geqslant 1}$ étant une suite croissante d'entiers tous supérieurs ou égaux à 2, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1/(q_1 \cdots q_k)$.

1) Avec Python, calculer S_{100} pour différentes suites (q_k) vérifiant les conditions ci-dessus.
2) Prouver la convergence de S_n et donner un encadrement de sa limite L indépendant de (q_k).
3) a) Démontrer que $1/q_1 < L \leqslant 1/(q_1 - 1)$.
      En déduire une écriture de q_1 en fonction de L faisant appel à la fonction partie entière.
   b) Soit $X_p = (L - S_p)(q_1 \ldots q_p)$. Écrire X_p sous forme d'une somme.
   c) En déduire l'unicité de la suite (q_k).
4) Montrer que pour tout réel $L \in]0,1]$ il existe une suite (q_k) telle que $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/(q_1 \cdots q_k) = L$.

2.4 *(Aude Feyel)*

Soit $\mathscr{E}(a,b)$ l'équation différentielle : $\begin{cases} y''(t) + (1+q(t))y(t) = 0 \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$ où q est continue sur $[0, +\infty[$.

1) Avec Python
   a) Écrire une fonction tracer(u,v,a,b,q) donnant le tracé de la solution de $\mathscr{E}(a,b)$ sur $[u, v]$.
   b) Observer ce qui se passe pour pour $(u, v) = (0, 50)$, $(a, b) = (0, 1)$ ou $(1, 0)$ et q parmi $t \mapsto 1/(1+t^2)$, $t \mapsto 1/\sqrt{1+t}$ (il y en avait d'autres...)
2) Soit y solution de $\mathscr{E}(a,b)$.
   a) Pour f continue sur $[0, +\infty[$, soit $z\colon x \mapsto \int_0^x \sin(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer $z'' + z$.

b) Soit $x \geqslant 0$. Montrer que $0 \leqslant |y(x)| \leqslant |a|+|b|+\int_0^x |q(t)||y(t)|\,\mathrm{d}t$.
En déduire que y est bornée sur $[0,+\infty[$ si q est intégrable sur $[0,+\infty[$.

3) On suppose maintenant q de classe C^1 et q' intégrable sur $[0,+\infty[$.

a) Montrer que $q(x)$ admet une limite ℓ qaund x tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $y'(x)^2 - y'(x_0)^2 = -(1+q(x))y(x)^2 + (1+q(x_0))y(x_0)^2 + \int_{x_0}^x q'(t)y(t)^2\,\mathrm{d}t$.
En déduire que y est bornée sur $[0,+\infty[$ si $\ell > -1$.

2.5 *(Blandine Griselin)*

Pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ on pose $N(x,y) = \int_0^1 |x-ty|\,\mathrm{d}t$.

a) Vérifier que N est une norme sur $\mathbf{R}^2$.

b) Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto N(x,1)$ pour $x \in [-1/2, 3/2]$.

c) Calculer $N(x,1)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. En déduire la valeur de $N(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

d) Soit C le cercle unité, d'équation $x^2+y^2=1$. Tracer la courbe de $x \mapsto N\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$ pour $x \in [-1,1]$. Estimer, à l'aide de ce tracé, les valeurs de $\sup N(C)$ et $\inf N(C)$.

e) Déterminer la valeur exacte de $\sup N(C)$ et $\inf N(C)$.

2.6 *(Anthony Jaeckle)*

1) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $\mathrm{sh}(\alpha)=1$.

2) Donner un encadrement de α à 10^{-5} près.

3) Écrire une fonction suite(n) qui renvoie l'intégrale $I_n = \int_0^\alpha (\mathrm{sh}\,t)^n\,\mathrm{d}t$.

4) Établir que $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.

5) Montrer que la suite de terme général I_n converge et préciser sa limite.

6) Trouver un équivalent de I_n

2.7 *(Abd Lbarch)*

On considère l'équation $E_n : x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x = 1$. On pose $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x - 1$.

1) Écrire une fonction graph(n) qui renvoie la représentation graphique sur $[0,1]$ de f_n.

2) Montrer l'existence et l'unicité de u_k tel que $f_k(u_k) = 0$.

3) Écrire une fonction suite(n) qui renvoie la liste des solutions u_k pour $1 \leqslant k \leqslant n$ approchées à 10^{-5} près. Conjecturer ainsi la limite de la suite (u_n).

4) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

5) Trouver un équivalent de $u_n - \ell$ quand n tend vers l'infini.

2.8 *(Tanguy Le Cloirec)*

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. En traçant la représentation graphique de F avec Python, conjecturer l'intervalle de définition, le signe, le sens de variation et la limite en $+\infty$ de F.
2. Démontrer ces conjectures.

3. Monter que F vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. En déduire que F est de classe C^∞ sur un intervalle à préciser.
4. Montrer que, pour $x > 0$, $F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$. En déduire la limite de $F(x)$ quand $x \to 0^+$.
5. Déterminer un équivalent simple de $F(x)$ quand x tend vers 0.

2.9 *(Clement Poirson)*

Soit E l'ensemble des polynômes dont les coefficients sont égaux à 0 ou à 1 ; et W l'ensemble des nombres complexes qui sont racine d'un élément de E.

1) Représenter dans le plan complexe les racines des polynômes de E de degré au plus 7.
2) Montrer que W est stable par conjugaison et que si $z \neq 0$ appartient W, son inverse itou.
3) Pour $z \in W$ tel que $|z| < 1$, soit $P \in E$ tel que $P(0) = 1$ et $P(z) = 0$. Pour $y \in W$ on pose : $Q(y) = P(y) - 1 - y/2(1-y)$. Montrer que si $|y| < 1$ alors $|Q(y)| \leqslant |y|/2(1-|y|)$.
En déduire que $|(2-z)/(1-z)| \leqslant |z|/(1-|z|)$.
4) Montrez alors que $|(2z-1)/(z-1)| \leqslant 1/(|z|-1)$.
5) Petite question de python sur des tracés de lignes de niveau.
6) Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^{2k+1}$. Montrez que P_n admet une unique racine $x_n \in [-1, 0]$.

Il y avait d'autres questions…

2.10 *(Clara Roch)*

Un joueur dispose de 1 euro, qui lui permet de jouer sur une machine à sous. La machine délivre un gain selon une loi aynt pour fonction génératrice $G(s)$. Le lendemain, il joue tous ses gains. Et ainsi de suite, si le n-ième jour il a gagné X_{n+1} euros, le jour suivant il jouera X_{n+1} fois sur la machine.

1. Quelle est la fonction génératrice de X_1.
2. Écrire une fonction $jeu(n, \lambda)$ qui retourne la valeur de X_n et $moyenne(n, \lambda)$ la moyenne des X_n sur 1000 expériences pour Y suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \{0.1; 0.5; 1\}$ et réaliser un tracé pour n entre 1 et 40.
3. Retour au cas général. Exprimer G_{n+1} en fonction de G_n et montrer que $G_n(G(s)) = G(G_n(s))$. (On donnait un théorème d'inversion de sommes infinies)
4. Déterminer G_n pour une loi de Bernoulli.
5. Dans le cas général, exprimer l'espérance de X_{n+1} en fonction de celle de X_n.

Il y avait encore 5 questions…

2.11 *(Antonin Rouffet)*

Fonction Python utile : plt.scatter(X,Y) trace le nuage de points dont les coordonnés (x,y) sont réparties dans les listes X (abscisses) et Y (ordonnées).
Définitions : - matrice stochastique : matrice carrée (réelle) dont tout les coefficients sont dans le segment [0, 1] et dont la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1 - matrice stochastique semi-vide : matrice stochastique dont tout les coefficients d'indice (i,j) sont nuls si i+j est pair.

1) a) Écrire une fonction Stoch(N) qui prend en argument un entier naturel N non nul et renvoie *aléatoirement* une matrice stochastique de dimension $N \times N$.

b) Écrire une fonction Stoch2(N) qui prend en argument un entier naturel N non nul et renvoie *aléatoirement* une matrice stochastique semi-vide de dimension $N \times N$.

2) a) Écrire une fonction vpplot(M) qui prend en entrée une matrice réelle carrée de dimension quelconque et affiche la disposition des valeurs propres complexes de cette matrice sous forme de nuage de points.

b) Vérifier que les matrices stochastiques semi-vides sont des composées de symétries et que si λ est valeur propre d'une telle matrice alors $-\lambda$ et $\bar{\lambda}$ itou.

3) Soit A une matrice réelle 4×4 stochastique semi-vide.

a) Écrire une fonction Puissance(k) qui prend en argument un entier naturel k et renvoie A^k. Cette suite semble-t-elle converger ?

b) Montrer la conjecture faite à la question précédente.

c) Que peut-on dire du produit de deux matrices stochastiques de même format $N \times N$?

d) Il restait une question…

2.12 *(Émilie Stentz)*

On lance indépendemment n dés équilibrés et l'on note S_n la somme des valeurs obtenues.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $k \in \mathbf{N}^*$, $P(S_n = k) = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} P(S_{n-1} = k-j)$.

2) On pose $Z_n = S_n / E(S_n)$. Calculer l'espérance et la variance de Z_n.

3) Écrire une fonction tcheb(n) qui renvoie le tableau T de dimensions $(n, 6n+1)$ tel que $T[i,k] = P(S_i = k)$.

4) Soit F_n la fonction définie par $F_n(t) = P(Z_n \geqslant t)$. (Il y avait quelques courbes représentant F_n pour $n = 1,2,3$ et $t \in [0,2]$). Vers quelle fonction semble tendre F_n ?

5) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev, prouver cette convergence.

2.13 *(Jeanne D'Albret)*

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et $B \in \mathscr{M}_p(\mathbf{C})$, on pose $A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}$.

1) Écrire un fonction prodk(A,B) qui retourne $A \otimes B$.
Tester avec les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Comparer numériquement $(A \otimes B)(A' \otimes B')$ et $AA' \otimes BB'$ pour les matrices ci-dessus.
Que peut-on conjecturer ? Prouver ce résultat.
Que peut-on en déduire concernant $A \otimes B$ et $A' \otimes B'$ si A est semblable à A' et B à B' ?

3) Avec Python, déterminer les valeurs propres de M_i, M_j et $M_i \otimes M_j$ pour qqes matrices ci-dessus. Que peut-on conjecturer ?

4) Pour $\alpha \in \mathbf{C}$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, donner le polynôme caractéristique de αM.

5) Si A est une matrice triangulaire supérieure, que vaut le polynôme caractéristique de $A \otimes M$?

6) Montrer que si A et B sont diagonalisables, $A \otimes B$ itou.

2.14 *(Une planche de Monsieur Thaï)*

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires seront définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1) Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'évènements de Ω. On note $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} \bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k$.
   a) Soit ω un élément de Ω. Donner une interprétation de l'assertion "$\omega \in A$".
   b) On suppose que la série de terme général $P(A_n)$ converge. Montrer que $P(A) = 0$.
2) Une variable aléatoire suivant une loi géométrique admet-elle un moment d'ordre 4 ?
3) Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n(p) = \sum_{k=1}^n X_k$.
   a) Écrire une fonction `simul_S` qui prend en entrée $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times]0,1[$ et simule $S_n(p)$.
   b) Représenter graphiquement la suite de terme général $S_n(p)/n$.
4) Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi centrée, admettant un moment d'ordre 4. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $E[S_n^4] = nE[X_1^4] + 3n(n-1)E[X_1^2]^2$.
   b) Montrer que $P\left(\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right) = 1$. Comparer ce résultat avec la question 3b).

3 Mines-Ponts

3.1 *(Éric Baudet)*

3.1.1

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

a) Montrer que pour tout vecteur $a \neq 0_E$, $(a, f(a))$ est une famille libre.
   Dans la suite, on notera $F(a)$ l'espace vectoriel engendré par ces deux vecteurs.
b) Montrer qu'il existe des vecteurs $a_1, \ldots, a_n$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^n F(a_i)$.
c) Montrer que E est de dimension paire.
   Trouver une base de E dans laquelle la matrice de f soit aussi simple que possible.
d) Questions subsidiaires posées à l'oral : Donner le polynôme caractéristique de cette matrice.
   Que dire du spectre de f (dans $\mathbf{R}$, dans $\mathbf{C}$) ? f est-elle diagonalisable ?

3.1.2

On considère une fonction y de classe C^2 de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$.

a) Donner une primitive de $y^2 - (y')^2 + (y")^2 - (y + y' + y")^2$.
b) Montrer que si $\int_0^{+\infty} y^2$ et $\int_0^{+\infty} (y")^2$ sont convergentes alors $\int_0^{+\infty} (y')^2$ itou.
c) Montrer que si $\int_0^{+\infty} y^2$ et $\int_0^{+\infty} (y")^2$ sont convergentes alors $\int_0^{+\infty} (y')^2 \leqslant \int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} (y")^2$.

3.2 *(Dorian Berchoux)*

3.2.1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et f_A l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ défini par : $f_A(M) = AM$.

a) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ on a : $P(f_A) = f_B$, avec B à préciser.

b) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A l'est.

c) En écrivant la matrice de f_a dans une base bien choisie, donner les valeurs-propres de f_A, leurs multiplicités ainsi que la dimension des espaces-propres associés en fonction de celles et ceux de A. Retrouvez ainsi le résultat de la question précédente.

3.2.2

Pour $x > 0$ on pose $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.

a) Montrer que l'on définit ainsi une application de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*$.

b) Montrer que G est l'unique solution de $y'' + y = \frac{1}{x}$ tendant vers 0 en $+\infty$.

c) Montrer que $G(x) = \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$.

3.3 *(Laura Faria)*

3.3.1

Pour $n \in \mathbf{N}$ soit $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t^2}\,dt$.

a) Montrer que l'intégrale définissant I_n est convergente.

b) Exprimer I_n comme somme d'une série.

c) Trouver un équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini.

3.3.2

Soit g un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.
On s'intéresse à $\varphi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E), h \mapsto h \circ g - g \circ h$.

a) Que vaut le déterminant de φ ?

b) Montrer que les vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres non nulles sont des endomorphismes nilpotents.

c) Il y avait d'autres questions…

3.4 *(Blandine Griselin)*

3.4.1

Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ de trace nulle et $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes.

a) $\mathscr{H}$ et $\mathscr{N}$ sont-ils des espaces vectoriels ?

b) Montrer que l'espace engendré par $\mathscr{N}$ est inclus dans $\mathscr{H}$.

c) Cette inclusion est-elle une égalité ?

3.4.2

Pour $x > 0$ on pose : $f(x) = \int_0^1 \ln(t)\ln(1-t^x)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est correctement défini.

b) Exprimer $f(x)$ sous forme d'une série de fonctions.

c) Il y avait une troisième question…

3.5 *(Anthony Jaecklé)*

3.5.1

Soit X et Y deux variables aléatoire discrètes indépendantes, de même loi, à valeurs réelles ;
et f et g deux applications croissantes de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

a) Montrer que la variable aléatoire $\big(f(X)-f(Y)\big)\big(g(X)-g(Y)\big)$ est à valeurs positives.

b) En déduire que la covariance de $f(X)$ et $g(X)$ est positive ou nulle.

c) Soit (a_n) et (b_n) deux suites croissantes de réels. Montrer que : $\sum_{i=1}^n a_i b_i \geqslant \frac{1}{n}\big(\sum_{i=1}^n a_i\big)\big(\sum_{i=1}^n b_i\big)$.

3.5.2

Soit A une matrice symétrique réelle et $B = A^3 + A + I_n$.
Montrer qu'il existe un polynôme T tel que $A = T(B)$.

3.6 *(Abd Lbarch et Clara Roch)*

3.6.1

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p.

a) Soit $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer la loi, puis l'espérance, de Y.

b) Soit $Z = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer la loi de Z, puis un équivalent de l'espérance de Z quand n tend vers l'infini.

3.6.2

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, tels que $f \circ g = f + g$.

a) Montrer que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g$ et $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$.

b) On suppose que f et g sont diagonalisables.
Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable, avec un spectre inclus dans $\mathbf{R} \setminus]0,4[$.

3.7 *(Tanguy Le Cloirec)*

3.7.1

Soit $n \in \mathbf{N}$. On s'intéresse aux chemins permettant de rejoindre le point de coordonnées (n,n) en partant de $(0,0)$ et en ne se déplaçant que d'une unité vers la droite ou vers le haut.

a) Calculer le nombre de chemins possibles.

b) Soit d_n le nombre de chemins où, à chaque instant, on se trouve au dessus (ou) sur la diagonale.
On pose $d_0 = 1$. Vérifiez que $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 5$.

c) Démontrer que $d_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} d_k d_{n-k}$. Indication : Considérer B_k qui correspond au chemin où la première rencontre avec la diagonale se fait en position (k,k).

d) Démontrer que $0 \leqslant d_n \leqslant \binom{2n}{n}$.
En déduire un minoration du rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$.

e) Montrer que : $\forall x \in]-R, R[\setminus \{0\}, \exists \varepsilon(x) \in \{-1,1\}$ tel que $f(x) = \frac{1+\varepsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x}$.

f) En déduire d_n pour tout entier naturel n.

3.7.2

a) Déterminer l'ensemble des matrices symétriques réelles et nilpotentes.

b) Soit A une matrice symétrique réelle. Montrer que $A + \mathrm{i}I_n$ et $A - \mathrm{i}I_n$ sont inversibles puis déterminer la valeur de $(A + I_n)(A - \mathrm{i}I_n)(A + \mathrm{i}I_n)^{-1}(A - \mathrm{i}I_n)^{-1}$.

3.7.3

Pour $x \in \mathbf{R}$, déterminer la limite de $(1 + \frac{x}{n})^n$ quand n tend vers l'infini.
En déduire, pour $z \in \mathbf{C}$, la limite de $(1 + \frac{z}{n})^n$.

3.8 *(Clément Poirson)*

3.8.1

Soit (T_n) la suite de polynômes définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

a) Calculer $I_{p,n} = \int_{-1}^{1} \frac{T_p(y)T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$. (On admet que pour tout $x \in]-1,1[$, $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$)

b) Montrer que, pour $|x| > 1$, $2T_n(x) = (x - \sqrt{x^2-1})^n + (x + \sqrt{x^2-1})^n$.

c) Déterminer le rayon de convergence $\sum_{n \geqslant 0} T_n(x) t^n$ puis calculer sa valeur.

3.8.2

Dans un espace euclidien E, soit p et q deux projecteurs orthogonaux, respectivement sur des sous-espaces F et G.

a) Montrez que $p \circ q \circ p$ est un endomorphisme symétrique.

b) Montrez que E est la somme directe orthogonale de $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q)$ et de $\mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p)$.

c) Montrez que $p \circ q$ est diagonalisable.

3.9 *(Édouard Raimbault)*

3.9.1

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie ; et $P \in \mathbf{C}[X]$.

a) Soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Montrer que si $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective, alors $P(u) - P(\lambda)\mathrm{Id}_E$ n'est pas injective. Idem avec la surjectivité.

b) On suppose $\deg(P) \geqslant 1$. Montrer que si $P(u) - \mu \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif, alors il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\mu = P(\lambda)$ et $P(u) - P(\lambda)\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif. Idem avec la surjectivité. *(ndr : idiot amha)*

3.9.2

Déterminer les extrema de $(x, y) \mapsto y\,(x^2 + (\ln y)^2)$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$.

3.10 *(William Raymond)*

3.10.1

Soit ρ une application continue sur $[0,1]$, à valeurs strictement positives ; et $F\colon \mu \mapsto \int_0^1 \rho(t)^\mu \,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et préciser $F'(0)$.

b) Déterminer la limite de $F(\mu)^{1/\mu}$ quand μ tend vers 0.

c) Vérifier la validité de ce résultat pour $\rho(t) = \exp(\alpha t)$.

3.10.2

Soit deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant respectivement des lois géométriques de paramètres p_1 et p_2.

a) Déterminer la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

b) Soit Z une troisième variable aléatoire, suivant une loi de Bernoulli de paramètre q. Ces trois variables aléatoires étant supposées mutuellement indépendantes, déterminer la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

3.10.3

Soit $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.
Déterminer (a, b) tel que la série de terme général u_n soit convergente.

3.11 *(Antonin Rouffet)*

3.11.1

On considère une suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$, uniformément distribuées. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. S_n définit la position après n déplacements d'une marche aléatoire sur l'axe des entiers relatifs, en commençant en 0.

a) Déterminer $P(S_n = 0)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$; puis sa limite quand n tend vers l'infini.

Il y avait d'autres questions...

3.11.2

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, tels que $f \circ g = f + g$.

a) Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

b) On suppose que f et g sont diagonalisables.
Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable, avec un spectre inclus dans $\mathbf{R} \setminus]0, 4[$.

3.12 *(Émilie Stentz)*

3.12.1

Soit a et n deux entiers naturels. On considère an clients qui choisissent des fournisseurs. Il y a n fournisseurs et ils sont choisis au hasard. Soit X_i la variable aléatoire associée au nombre de clients du fournisseur i ; et Y la variable associée au nombre de fournisseurs qui n'ont pas de clients.

a) Donner la loi, l'espérance et la variance de X_i .

b) Calculer $Cov(X_1 + X_2 + \cdots + X_n, X_i)$. En déduire $E(X_j X_i)$ et $Cov(X_j, X_i)$.
Calculer le coefficient de corrélation de X_j et X_i pour $i \neq j$.

c) Calculer l'espérance et la variance de Y.

3.12.2

On considère une série entière de terme général $a_n z^n$, de rayon de convergence $R > 0$.

a) Déterminer le rayon de convergence de la série de terme général $\frac{a_n}{n!} z^n$.

b) On pose $b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$.

  i) Montrer que la la série de terme général $b_n z^n$ a un rayon de convergence $R' > 1$.

  ii) Déterminer R' en fonction de R.

4 CCINP

4.1 *(Alexandre Cymes et Romane Mangenot)*

4.1.1

On cherche les applications f continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant $(E)\ :\ f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Discuter selon la valeur du réel c la résolution de $y''(x) - cy(x) = 0$.

b) Soit $F(x,y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est de classe C^2 et calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

c) Calculer $f(0)$ et $f''(x)f(y) - f(x)f''(y)$. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

4.1.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

a) A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.

b) Trouver $B \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$.

c) Les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$ sont-elles diagonalisables ?

4.2 *(Mélanie Esteves)*

4.2.1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,\pi[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que la série de terme général u_n^3 converge. (on pourra considérer $u_{n+1} - u_n$)
3. Montrer que la série de terme général u_n^2 diverge. (on pourra considérer $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$)

4.2.2

Soit E un espace vectoriel de dimension 4.

1. Soit u un endomorphisme de E tel que $\text{rg}(u) = 2$ et $u^2 = 0$.
   (a) Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$
   (b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u est représentée par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Soit u un endomorphisme de E tel que $\text{rg}(u) = 3$ et $u^3 = 0$.
   (a) Montrer que $\text{Ker}(u^2) = \text{Im}(u)$
   (b) Il y avait une dernière question !

4.3 *(Louis Farcot-Lafond)*

4.3.1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$, de même loi, admettant un moment d'ordre deux, telles que $Z = X + Y + 1$ suive une loi géométrique de paramètre p.

a) Déterminer l'espérance et la variance de X en fonction de p.

b) Déterminer la fonction génératrice de X. En déduire la loi de X.

4.3.2

Soit $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant les deux propriétés suivantes :
(i) les coefficients diagonaux sont valeurs propres
(ii) ces coefficients sont les seules valeurs propres

a) Montrer que toute matrice triangulaire est dans $\mathscr{D}_n$.

b) La matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 est-elle dans $\mathscr{D}_n$?

c) $\mathscr{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$?

d) Montrer que si M appartient à $\mathscr{D}_n$ alors $M + aI_n$ appartient à $\mathscr{D}_n$ pour tout réel a.

e) Montrer que toute matrice de $\mathscr{D}_2$ est triangulaire.

f) Exhiber un ensemble infini de matrices de $\mathscr{D}_3$ nilpotentes non triangulaires.

4.4 *(Aude Feyel)*

4.4.1

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 définies sur un même espace probabilisé d'univers Ω, indépendantes et suivant toutes deux une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & 1 \\ 0 & X_2(\omega) \end{pmatrix}$.

Il s'agit de déterminer la probabilité que $M(\omega)$ soit diagonalisable.

1. En développant de deux manières le polynôme $(1+X)^{2n}$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$
2. Calculer la probabilité de l'événement $(X_1 = X_2)$.
3. Conclure.

4.4.2

Soit $F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}\,\mathrm{d}t$ et D_F son domaine de définition.

1. Montrer que $]-1,1[\subset D_F$.
2. Trouver un développement en série entière de $F(x)$.
3. Montrer que F est de classe C^1 sur $[0,1[$.
4. En déduire une expression simple de F' sur $[0,1[$.
5. Proposer une autre méthode pour aboutir à ce résultat.

4.5 *(Blandine Griselin)*

4.5.1

On considère l'équation différentielle $(E) : (x^2-1)\,y''(x) + 2x y'(x) - 2y(x) = 0$.

a) Déterminer les solutions polynomiales de (E).

b) Trouver l'équation différentielle (E^*) vérifiée par $z(x) = xy(x)$.

c) Chercher a, b et c tels que $\frac{2-4x^2}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

d) Résoudre (E^*) ; en déduire toutes les solutions de (E).

4.5.2

Soit A et B deux matrices de $O_n(\mathbf{R})$ telles que $M = \frac{1}{3}(A+2B) \in O_n(\mathbf{R})$.

1. Calculer $A\,{}^tB + B\,{}^tA$. Indication : calculer $M\,{}^tM$
2. Montrer que $A = B$. Indication : on pourra considérer un polynôme annulateur de $C = A\,{}^tB$ puis montrer que $\mathrm{Ker}(C - I_n)$ et $\mathrm{Im}(C - I_n)$ sont supplémentaires orthogonaux.

4.6 *(Rémi Lambert)*

4.6.1

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $a \in [0,1]$. Pour $x \in]0,1]$ on pose $f_n(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{x^a\left(1+x^2\right)}$.

a) Montrer que f_n converge simplement vers une fonction que l'on précisera.

b) Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles il y a convergence uniforme ?

c) Montrer que l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente pour tout $a \in [0,1]$.

d) Pour $a \in [0,1[$ montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

e) Qu'en est-il pour $a = 1$?

4.6.2

Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ vérifiant $f + f^3 = 0$; et A sa matrice dans la base canonique.

a) Montrer que A est non inversible.

b) Montrer que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \bigoplus \mathrm{Ker}(f^2 + I_3)$.

c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 + I_3)$ n'est pas réduit au vecteur nul.

d) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.7 *(Abd Lbarch)*

4.7.1

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que la série de terme général a_n est convergente et l'on définit une suite (u_n) par $u_{n+1} = \left(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}\right)/2$.

1. Montrer que $u_{n+1} - u_n \leqslant a_n/2$
2. En déduire que la suite u_n converge.
3. La réciproque est-elle vraie ? (indication : considérer $u_n = n/(n+1)$)

4.7.2

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant $M^2 + M^T = I_n$.

1. Montrer que si P est un polynôme annulateur de M, toute valeur propre de M est racine de P.
2. On suppose que M est symétrique.
   Montrer que M est diagonalisable puis prouver que $\mathrm{tr}(M)\,\mathrm{dét}(M) \neq 0$.
3. Montrer que M est diagonalisable même si elle n'est pas symétrique.
4. Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M.

4.8 *(Tanguy Le Cloirec)*

4.8.1

Soit $p \in]0,1[$. Pour $k \in \mathbf{N}^*$ on pose $p_k = p^2 k(1-p)^{k-1}$.

a) Montrer que $(p_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbf{N}^*$.

b) Soit X une variable aléatoire telle que : $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(X = k) = p_k$.
Justifier l'existence et déterminer la valeur de $E(X-1)$ puis de $E\big((X-1)(X-2)\big)$.

c) En déduire l'existence et la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.

4.8.2

Pour P et Q dans $\mathbf{R}_n[X]$ on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

b) Soit $E = \{P \in \mathbf{R}_n[X] \ : \ P(1) = 0\}$.
Montrer que E est un sous-espace de $\mathbf{R}_n[X]$ et préciser sa dimension.

c) Déterminer la distance du polynôme constant égal à 1 à E.

4.9 *(Hugo Nguyen)*

4.9.1

Soit $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

b) Montrer que $I_n \sim \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

c) Sachant que $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, trouver la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

4.9.2

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $A = X X^T$.

a) Déterminer le rang et le spectre de A.

b) Déterminer le polynôme caractéristique de A.

c) Montrer que $\text{dét}\left(I_n - X X^T\right) = 1 - X^T X$.

4.10 *(William Raymond)*

4.10.1

On dispose d'une urne qui contient 3 jetons numérotés 1,2,3, dans laquelle on effectue des tirages avec remise. Soit Y la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un chiffre différent du premier chiffre obtenu; et Z la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage l'on obtient pour la première un troisième chiffre.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Quelle est la loi de $Y-1$? En déduire l'espérance et la variance de Y.
3. Déterminer la loi de (Y, Z).
4. En déduire la loi de Z.

4.10.2

Soit $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ C & I_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M^T M$. En déduire que M est inversible.
2. Montrer que $M^{-1}M^T$ est une matrice orthogonale.

4.11 *(Clara Roch)*

4.11.1

Soit $a \in \mathbf{R}$ et, pour $P \in \mathbf{R}[X]$, $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que N_a est une norme sur $\mathbf{R}[X]$.
2. Montrer que si une suite de vecteurs converge dans une espace vectoriel normé, alors la suite des normes de ces vecteurs converge vers la norme de la limite de cette suite.
3. Pour quelles valeurs de a la suite des $P_n = \left(\frac{X}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour N_a ?

4.11.2

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ diagonalisable de rang 1 et $B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha + \beta = \gamma$, $\beta + \gamma \neq 0$ et $\beta\gamma \neq 0$.

1. Exprimer le polynôme caractéristique de B à l'aide de celui de A. Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de B ?
2. Montrer que si X est dans le noyau de A, $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de B.
3. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker} B) \geqslant 2 \dim(\mathrm{Ker} A)$.
4. Montrer que B est diagonalisable.

4.12 *(Émilie Stentz)*

4.12.1

1. Dans une urne contenant n tickets dont p gagnants, un joueur tire avec remise p tickets.
   (a) Calculer la probabilité $P(n, p)$ pour que le joueur tire au moins un ticket gagnant.
   (b) On suppose $p = \sqrt{n}$. Calculer la limite lorsque p tend vers l'infini de $P(p^2, p)$.
2. Reprendre les questions précédentes lorsque le joueur tire p tickets sans remise.
   (Pour le calcul de la limite, on donnait la formule de Stirling.)

4.12.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que A est trigonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ mais pas diagonalisable.

b) Donner, s'il y en a, les droites stables par A.

c) Donner, s'il y en a, les plans stables par A.

4.13 *(Alexandre Thierry)*

4.13.1

Soit f définie sur $I =]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$.

a) Vérifier que f est prolongeable par continuité en 1.

b) Justifier l'intégrabilité de f sur I.
c) Donner, au voisinage de 1, un développement de $f(x)$ en série entière.
d) Calculer l'intégrale de f sur I.

4.13.2

a) La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
b) Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
c) En déduire les solutions du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

4.14 *(Myriam Topa)*

4.14.1

Une urne contient N boules, r blanches et $N - r$ noires. On effectue des tirages successifs sans remise, jusqu'à épuisement des boules blanches. Soit X le nombre de tirages nécessaires.

1) Identifier la loi de X et donner son espérance pour $r = 1$ et pour $r = N$.
2) Dans la suite, r est quelconque, compris entre 1 et N.
   a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
   b) Montrer que, pour de telles valeurs de k, $P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} / \binom{N}{r}$.
3) Soit p et q deux entiers naturels non nuls.
   Trouver une relation liant $\binom{p}{q}$ et $\binom{p-1}{q-1}$. En déduire que : $E(X) = \frac{r(N+1)}{r+1}$.

4.14.2

a) Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
b) Soit A, B, C, dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que $AC = CB$ et que $C \neq 0_n$.
   Montrer que, pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$, $P(A)C = CP(B)$.
c) Montrer qu'un produit de matrices est inversible si et seulement si tout ses facteurs le sont.
   En déduire que A et B ont au moins une valeur propre commune.
d) Réciproquement, si A et B ont une valeur propre commune, montrer qu'il existe une matrice C non nulle telle que $AC = CB$.

4.15 *(Maxence Zhuang)*

4.15.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

1. Donnez le rang de A ; en déduire la dimension du noyau.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Que dire de la multiplicité de la valeur propre 0 ?
4. Montrez que A admet 3 valeurs propres : $0, \lambda, 1 - \lambda$.
5. Donnez un polynôme annulateur de A de degré 3.

4.15.2

Un exercice de calcul différentiel

5 Mines-Télécom

5.1 *(Alexandre Cymes)*

5.1.1

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution sur $[0,1]$.
2. Soit a_n cette solution. Montrer que la suite (a_n) est décroissante et minorée par $1/2$.
3. Montrer que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.

5.1.2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant $A_{1,1}+A_{2,1} = A_{1,2}+A_{2,2} = 1$. Et f l'endomorphisme canoniquement associé.

1. Montrer que si $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ alors $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$.
2. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f et préciser sa valeur propre associée.
3. Montrer que si V est un vecteur propre non colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors V est propre pour 1.
4. Il y avait une dernière question...

5.2 *(Alexandre Descamps)*

5.2.1

Justifier l'existence puis calculer $\int_0^{+\infty} \big(1 - t\arctan(1/t)\big)\,\mathrm{d}t$.

5.2.2

On estime qu'il y a une chance sur 1000 pour q'un élève soit un génie. On dispose d'un échantillon de 500 élèves. Soit X le nombre d'élèves qui sont des génies.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Par quelle autre loi peut-on approcher X ?

Il y avait deux autres questions...

5.3 *(Louis Farcot-Lafond)*

5.3.1

On cherche les applications f de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ vérifiant : $(*)\ \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \frac{f(x+n)-f(x)}{n}$.

1. Soit f vérifiant $(*)$.
   (a) En considérant des valeurs particulières de n, montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = f'(x+1)$.
   (b) Montrer que $\int_x^{x+1} f'(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de x, puis que f' est constante.
2. Donner toutes les solutions du problème posé.

5.3.2

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ tel que toute matrice non nulle de F soit inversible.

1. On suppose que A et B sont dans E. Montrer que $x \mapsto \text{dét}(xA - B)$ est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que $\alpha A - B \notin GL_n(\mathbf{C})$.
3. En déduire que $\dim(F) \leqslant 1$ et préciser la nature de F.

5.4 *(Myriam Topa)*

5.4.1

On considère le système $(S) : \begin{cases} x' = y - z \\ y' = z - x \\ z' = x - y \end{cases}$ avec les conditions initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = z(0) = 0$.

1. Existence et unicité des solutions de (S).
2. Montrer que si (x, y, z) est une solution, alors $x + y + z$ et $x^2 + y^2 + z^2$ sont des fonctions constantes. Que peut-on en déduire pour la trajectoire ?
3. Résoudre S.

5.4.2

Pour P et Q dans $\mathbf{R}_n[X]$ on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

b) Soit $E = \{P \in \mathbf{R}_n[X] \ : \ P(1) = 0\}$.
Montrer que E est un sous-espace de $\mathbf{R}_n[X]$ et préciser sa dimension.

c) Déterminer la distance du polynôme constant égal à 1 à E.

6 ENSEA

6.1 *(Alexandre Cymes)*

6.1.1

Soit ψ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbf{R}_n[X]$ associe $P + P'$.

1. Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Soit M_ψ la matrice représentant ψ dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.
   (a) Cette matrice est-elle inversible ?
   (b) Pour $n = 2$, cette matrice est-elle diagonalisable ?

6.1.2

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

1. Montrer que $u_n = v_n - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ avec $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
2. Déterminer la nature des séries de terme général v_n et u_n.
3. Montrer que $v_n \sim_{+\infty} u_n$. Conclusion ?

6.2 *(Louis Farcot-Lafond)*

6.2.1

Trouver toutes les matrices $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telles que : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6.2.2

Déterminer les solutions de $xy''(x) - (x+1)y'(x) + y(x) = 0$ développables en série entière.

6.3 *(Maxence Zhuang)*

6.3.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. En déduire l'expression de A^n.
4. Retrouver cette expression en observant que $A = I_3 + N$ avec N une matrice nilpotente.

6.3.2

Soit $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$

1. Justifier l'existence de I et de J.
2. Montrer que $I = J$.
3. Calculer $I + J$; en déduire la valeur de I.