N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

# Préparation à l'oral – errata
# PSI Pasteur 2024-2025

**Exercice 55.** La relation de récurrence est $D_{n+2} = \boxed{2} D_{n+1} - D_n$.

**Exercice 56.** La suite est $U_n(x) = \dfrac{1}{xn^2 + n}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 60.** Il faut montrer, dans la dernière question, que $S(x) \sim_{+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$.

**Exercice 69.** Question 2, calculer $\mathbb{P}(Y \leqslant k)$ et pas $\mathbb{P}(Y \geqslant k)$.

**Exercice 71.** Dernière question incomplète : « Calculer $J_n$ et en déduire une expression de $\mathrm{I}_n$. »

**Exercice 82.** Question 3, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(k)} x^k$.

**Exercice 86.** Question 2, $p_k = \dbinom{k+r-1}{k} p^r q^k$.

**Exercice 87.** C'est $\dfrac{1}{3}(\mathrm{I}_n + 2M)$ et non pas $\dfrac{1}{3}(\mathrm{I}_n - 2M)$ qui est dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 93.** $f$ est l'endomorphisme canoniquement associé à $A$.

**Exercice 94.** Question 3 à changer en : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X_p = n)$. Et la relation de récurrence entre les fonctions génératrices est à démontrer !

**Exercice 99.** Question 4, l'hypothèse est « telles que $\sum |a_n| n^2$ et $\sum |b_n| n^2$ convergent »

**Exercice 104.** Supprimer la question 2.(a) (elle est fausse et ne sert à rien).

**Exercice 117.** $T = w^4 + w^5 + w^6$.

**Exercice 119.** Question 2, la BON est « constituée de vecteurs propres de $u$. »

**Exercice 120.** Exercice buggué en l'état, voici un énoncé (partiellement) corrigé.

Soit $E$ l'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{N}$. On définit $F : E \to E$ par :
Pour $u \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$F(u)_n = u_{n+1}$$

1. Montrer que $F$ est linéaire.
2. Est-elle injective ? Surjective ?
3. Construire $G$ endomorphisme linéaire de $E$ tel que $F \circ G = \mathrm{Id}_E$.
4. Que vaut $G \circ F$ ?
5. Conclure.

On note $E_{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{Z}$. On définit $H : E_{\mathbb{Z}} \to E_{\mathbb{Z}}$ par :
Pour $u \in E$, et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ :

$$H(u)_n = u_{n+1} + u_{n-1}$$

**6.** Montrer que $H$ est linéaire. Est-elle injective ?

**7.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $u \in \ker(H - \mathrm{Id}_E)$. Trouver $M_\lambda \in M_2(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = M_\lambda^k \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

**8.** Pour $|\lambda| \neq 2$, montrer que $M_\lambda$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres.

**9.** Existe-t-il des suites de $\ker(H - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ périodiques ? Les caractériser.

**10.** Étudier le cas $|\lambda| = 2$.