Préparation à l'oral
PSI Pasteur 2024-2025

1 Généralités

1.1 Les différents types d'oraux de maths

Concours	Préparation	Passage	Particularités
Mines-Ponts	15'	1h	1 exo avec préparation, un sans
Centrale Maths	x	30'	1 exo
Centrale Maths-Informatique	30'	30'	Utilisation de Python
Mines-Telecom	x	30'	2 exos
CCINP	30'	30'	1 exo à préparer + 1 petit sans préparation
Navale	x	30'	1 exo
Saint-Cyr	30'	25'	Utilisation de Python
ENSEA	20'	20'	2 exos

1.2 Conseils pour l'oral

L'examinateur. L'examinateur n'est pas un colleur : son but n'est pas de vous aider dans l'apprentissage du cours ou de vous dire ce qui va/ne va pas. Son but est de vous **évaluer.** Il sera donc souvent très neutre. Ne cherchez pas à lire sur le visage de la personne qui vous interroge si ce que vous dites est juste ou faux. Extrait rapport CCINP

> L'autonomie du candidat est également évaluée. Le rôle de l'examinateur est de poser des questions avec bienveillance, conscient du stress que peut générer ce type d'épreuve, mais pas de mener l'oral à la place du candidat. En particulier, les candidats ne doivent pas rechercher l'approbation régulière de l'examinateur durant la présentation. Rappelons que les examinateurs ont le souci de rester bienveillants. Le candidat n'est pas censé réclamer des indications, en revanche l'examinateur est libre de faire des remarques utiles à la bonne poursuite de l'oral.

Écoutez donc les indications qui sont données, c'est fondamental !
Ensuite, il faut **interagir** avec l'examinateur et ne pas rester collé à son tableau, dos à l'examinateur.

Oraux sans préparation. La difficulté de l'oral sans préparation est de pouvoir réfléchir « en direct ». Extrait du rapport Mines-Ponts

> Le jury apprécie quand un candidat est capable de lister tous les théorèmes qui peuvent s'appliquer à une situation donnée (interversion limite intégrale, diagonalisabilité d'une matrice,...) avant de réfléchir à celui qui semble le plus adapté à la situation. Cette phase de réflexion ne doit cependant pas se muer en une série de propositions faites à l'examinateur afin d'obtenir sa validation. L'esprit d'initiative et la capacité des candidats à mener un raisonnement de façon autonome font partie des attendus du concours.

Oraux avec préparation. L'oral avec préparation, c'est un exercice assez différent de la colle. Sachez correctement gérer votre temps de préparation !

- **pendant la préparation**
  - essayez rapidement de voir où l'exercice veut aller, les thématiques qu'il semble aborder
  - commencez **linéairement** l'exercice, même si des concours comme CCINP autorisent le fait de sauter des questions intermédiaires (c'est moins apprécié à Centrale...)
  - vous n'êtes pas obligé·e·s de faire intégralement toutes les questions, si vous pensez qu'ensuite, à l'oral, vous arriverez à les faire en direct
  - en revanche, pour certains calculs, je vous conseille de les faire au brouillon si vous avez peur de ne pas réussir à les faire en direct
- **pendant le passage**
  - l'oral n'est pas un écrit debout ! Il ne faut surtout pas se contenter de recopier au tableau ce qu'on a fait au brouillon.
  - vous n'êtes pas obligés de faire une présentation intégrale de l'exercice que vous allez faire. Extrait du rapport de l'oral 2024 de Centrale :

    > « En début d'épreuve, la lecture, la copie quasi intégrale au tableau de l'énoncé, la présentation générale à l'oral du sujet constituent une perte de temps ; les membres du jury interrogent toujours en ayant l'énoncé de l'exercice, et les candidats sont invités à entrer d'emblée dans le vif du sujet. »

    Même son de cloche pour CCINP

    > « Répéter ou réécrire l'énoncé peut paraître une étape rassurante pour le candidat, mais attention de ne pas y passer trop de temps. En revanche, si le candidat prend le temps d'exposer au préalable les différentes étapes de son raisonnement avant de rentrer dans les détails, la qualité de la présentation s'en retrouve améliorée. »
  - n'hésitez pas à présenter de manière **synthétique** ce que vous avez présenté. Par exemple « J'ai calculé au brouillon la dérivée seconde de la fonction f, puis-je vous donner directement le résultat ? » Extrait de rapport CCINP

    > Les candidats ont intérêt à gagner en efficacité dans la présentation de ce qu'ils ont préparé pour bénéficier d'un temps de réflexion supplémentaire sur les questions qu'ils n'ont pas entièrement traitées, en s'appuyant sur les indications éventuelles de l'examinateur.

Le cas des oraux avec Python. L'outil informatique rajoute une difficulté supplémentaire, celle de la gestion du temps. Tout oral de maths avec Python est avant tout un **oral de maths**. La priorité, ce sont les mathématiques ! Il faut donc limiter son temps de passage sur python (une dizaine de minutes maximum) et prendre le temps de faire des maths pendant la préparation !

2 Concours Mines-Ponts

2.1 Paul Benoit

Exercice 1. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ on définit $f_{a,b,c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3; t \mapsto \begin{pmatrix} be^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix}$.

Soit $F = \left\{f_{a,b,c},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel, en donner la dimension et une base.
2. Trouver $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall f \in F, f'(t) = Mf(t)$.
3. M est-elle inversible ?
4. Quelles sont les valeurs propres de M ? Pouvait-on s'y attendre ?

Exercice 2. On considère $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-t^2}\, dt$.

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par F.
3. En déduire l'expression de F. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3. Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2.2 Eva Chaudanson

Exercice 4. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, g à valeurs dans $[0, 1]$ et f décroissante. Montrer que $\displaystyle\int_{b-c}^{b} f \leqslant \int_a^b fg \leqslant \int_a^{a+c} f$ où $c = \displaystyle\int_a^b g$.
Indication : on pourra introduire une fonction d'une variable bien choisie.

Exercice 5. Soit $(E, <|>)$ un espace euclidien. Pour $X_1, \dots, X_p$ dans $E, G(X_1, \dots, X_p)$ désigne la matrice de coefficient $G_{i,j} = \langle x_i, x_j\rangle$.

1. Montrer que : G est inversible $\Longleftrightarrow (X_1, \dots, X_p)$ est libre.
2. Montrer que $\operatorname{rg}(G) = \operatorname{rg}(X_1, \dots, X_p)$.
3. (question ajoutée) Montrer que lorsque $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ est libre, on a $G(X_1, \dots, X_p) > 0$.
4. (question ajoutée) On suppose le système $(X_1, \dots, X_p)$ libre. Soit z le projeté orthogonal d'un vecteur y sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_p)$. Montrer que $\|y - z\|^2 = \dfrac{G(y, X_1, \dots, X_p)}{G(X_1, X_2, \dots, X_p)}$.

2.3 Nathan Couëdel

Exercice 6. Soit $(E, <|>)$ un espace euclidien et F une partie fermée, non vide et convexe de E. Pour $x \in E$ on pose $d(x) = \inf\limits_{f\in F} \|x - f\|$ et $\Gamma(x) = \{f \in F, \|x - f\| = d(x, F)\}$.

1. Caractériser l'ensemble des x tels que $d(x) = 0$.
2. Montrer que $\Gamma(x)$ est non vide. En déduire que d est 1-lipschitzienne.

3. En utilisant une identité relative à la norme, montrer que :

$$\forall (f, f') \in \Gamma(x)^2, f \neq f' \text{ et } \left\| \frac{1}{2}(f+f') - x \right\|^2 < d(x)^2.$$

4. Montrer que $\Gamma(x)$ est réduit à un seul élément, que l'on notera $p(x)$.

5. Montrer que $p(x)$ est caractérisé par : $\forall y \in F, < x - p(x) \mid y - p(x) > \leqslant 0$.

Exercice 7. Soit (E) l'équation différentielle : $x^2 y'(x) + y(x) = x^2$.

1. Montrer que (E) n'admet pas de solution développable en série entière.

2. Résoudre l'équation différentielle sur $[0, +\infty[$.

3. Montrer qu'il existe une unique solution à l'équation tendant vers 0 en 0^+.

2.4 Liv Craen

Exercice 8. Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ représentant un projecteur p dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On suppose P de rang r et l'on considère l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\Psi(X) = PX - XP.$$

Déterminer la trace de Ψ en fonction de n et r.

Exercice 9. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement monotone, telle que $f \circ f = 2f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

1. Montrer que f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. On pose $f_0 = f$ et $f_{n+1} = f \circ f_n$. Montrer que $\frac{1}{n} f_n$ admet une limite, que l'on précisera.

3. (question ajoutée) La limite précédente est-elle uniforme ?

2.5 Niels Descourvières

Exercice 10. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{e}^{-xt} \, \mathrm{d}t$

1. Déterminer le domaine de définition I de F.

2. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur I et donner son sens de variation.

3. Déterminer les limites de F aux bornes de I.

4. Calculer $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-xt} \, \mathrm{d}t$.

5. Montrer que $F(x) \sim \dfrac{6}{x^4}$ quand x tend vers $+\infty$. (On pourra majorer $|F - G|$)

Exercice 11. Soit $X_1, \dots, X_n$ des vaiid suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On considère $U = (X_1, \dots, X_n)$ et $M = U^\top U$.

1. Déterminer la loi de $\mathrm{rg}(M)$ et celle de $\mathrm{tr}(M)$.

2. Calculer la probabilité que M soit une matrice de projection.

2.6 Frédéric Hor

Exercice 12. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la suite de fonctions définie par, pour tout n dans $\mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^a} \mathrm{e}^{inx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour quelles valeurs de a la série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$? On suppose cette condition remplie dans la suite et l'on pose : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $S^{(k)}(0)$.
3. En utilisant le théorème de Fubini, montrer que pour $a > 1$, S est développable en série entière en 0.

Exercice 13. Soit p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien.

1. Montrer que $u = p - q$ est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(u) \subset [-1, 1]$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$.

2.7 Fleurine Jaegler

Exercice 14. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs et, pour $n \geqslant 1$, $y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}$.

1. Étudier la convergence de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. Étudier la convergence de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $x_n = ab^{2^n}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.
3. Montrer que la suite (y_n) converge si et seulement si la suite $\left(x_n^{1/2^n}\right)$ est bornée.

Exercice 15. Soit $A \in {}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\mathrm{rg}(A) = 2, \mathrm{tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0_n$. Montrer que A est diagonalisable.

2.8 Marius Le Goff

Exercice 16. Pour $n \geqslant 2$, on s'intéresse à l'équation $\mathrm{e}^x - x^n = 0$.

1. Montrer que cette équation admet exactement 2 solutions positives u_n et v_n, avec $u_n < v_n$.
2. (a) Montrer que u_n tend vers une limite L à déterminer.
   (b) Trouver un équivalent de $u_n - L$.
3. Montrer que la suite (v_n) diverge.

Exercice 17. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $A_{i,j} = P(x + i + j - 2)$. Montrer que A n'est pas inversible.

2.9 Thomas Lesage

Exercice 18. On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Que vaut $f(0)$?
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.
3. Montrer que g est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2g'(x)g(x)$.
5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\pi}{4} - g(x)^2$.
6. En déduire la limite de g en $+\infty$ puis conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 19. Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A représente une isométrie, déterminer sa nature et ses valeurs propres.

2.10 Baptiste Rouard

Exercice 20. Soit $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et l'on note R le rayon de convergence de cette série entière.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2^n} \leqslant a_n \leqslant 1$. En déduire un encadrement de R.
2. Montrer que $(2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n$.
3. En déduire que : $\forall x \in]-R, R[$, $\left(2x - x^2\right) f'(x) + (1-x)f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
4. Trouver ainsi une expression de $f(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
5. Trouver une autre expression de $f(x)$ en montrant que : $\forall x \in]-1, 1[$,
$$f(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\left(1+t^2\right)x}{2}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{(1+t^2)x}{2}} \mathrm{d}t,$$
et en calculant cette intégrale.

Exercice 21. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E.

1. Montrer que $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$.
2. Pour $E = \mathbf{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ et $F = \{P \in E, P(1) = P'(1) = 0\}$, déterminer $F^\perp$ et $\left(F^\perp\right)^\perp$.
3. Retour au cas général : donner une condition suffisante pour que $F = \left(F^\perp\right)^\perp$.

2.11 Adrien Valette

(Exercice 10)

Exercice 22. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B.
On note $\mathbb{R}_{p-1}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]\}$.

1. Montrer que $B^2 = B$.
2. On suppose désormais que A est diagonalisable avec p valeurs propres. En considérant une division euclidienne, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathbb{R}_{p-1}[A]$.
3. (ajouté) Démontrer que $B \in \mathbb{R}_{p-1}[A]$.

2.12 Exos en plus (RMS, BEOS)

Exercice 23. Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E.

1. Soit (u_n) une suite qui converge dans (E, N_1). On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes. Montrer que (u_n) converge dans (E, N_2).
2. On suppose que pour toute suite (u_n), on a : (u_n) converge dans (E, N_1) si et seulement si (u_n) converge dans (E, N_2). Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.
3. On prend $E = \mathbb{R}[X]$, $a \in \mathbb{R}$ et $N_a(P) = |P(a)| + \displaystyle\int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t$. Montrer que, si $a, b \in [0, 1]$, N_a et N_b sont équivalentes.
4. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \dfrac{X^n}{2^n}$. Trouver les valeurs de a telles que (P_n) converge pour N_a et déterminer alors la limite.
5. En déduire que N_a et N_b ne sont pas équivalentes si $0 \leqslant a < b$ et $b > 1$.

3 Concours Centrale-Supélec – Maths 1

3.1 Paul Benoit

Exercice 24. **1.** Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ puis celle de $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{n\ln(n)^{(1-\alpha)}}$.

Soit Φ une application décroissante et continue de $[n_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \Phi(n)$ diverge.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \Phi(n)x^n$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \Phi(n)x^n \underset{x\to 1^-}{\to} +\infty$. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \Phi(n)x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \int_{n_0}^{+\infty} \Phi(t)x^t \mathrm{d}t$.

3.2 Eva Chaudanson

Exercice 25. **1.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un C-espace vectoriel E de dimension n. On suppose que u possède exactement 2 valeurs propres distinctes, λ_1 et λ_2. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il existe deux projecteurs p_1 et p_2 tels que $u = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ et $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}_E$.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Montrer que $A = \begin{pmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+b \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

3.3 Nathan Couëdel

Exercice 26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ on pose $a_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle$; et l'on considère $A_{\mathcal{B}} = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n}$.

1. Montrer que : $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall X \in \mathbb{R}^n$, $\langle X, Y \rangle = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(X)^\top A_{\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Y)$.
2. Soit $\mathcal{C}$ une autre base de $\mathbb{R}^n$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$. Montrer que : $A_{\mathcal{C}} = P^\top A_{\mathcal{B}} P$.
3. En distinguant les cas $n = 2$ et $n \geqslant 3$, montrer que $\mathrm{Tr}(A_{\mathcal{B}}) > 0$ et $\det(A_{\mathcal{B}}) > 0$.
4. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 2$, $(A_{\mathcal{B}})^p$ est définie positive.

3.4 Liv Craen et Théophile Cirier

Exercice 27. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$ et pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 1$, on pose : $A_n = (X_1 < \cdots < X_n)$, $u_n = P(A_n)$, $B_{n,k} = (X_1 = k, X_1 < \cdots < X_n)$, $v_{n,k} = P(B_{n,k})$. Enfin pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\pi_n = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \left(1 - q^j\right)$.

1. Calculer $P(X_1 = X_2)$ et $P(X_1 < X_2)$.
2. Pour $n \geqslant 3$ et $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $v_{n,k} = pq^{k-1} \displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j}$.
3. En déduire que, pour $n \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{n,k} = \dfrac{1}{\pi_{n-1}} \left(pq^{k-1}\right)^n q^{\alpha_n}$ où α_n est un entier à préciser

4. Établir enfin que, pour $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{1}{\pi_n} p^{\beta_n} q^{\gamma_n}$ où β_n et γ_n sont des entiers que l'on précisera.

5. (question qui n'était pas dans la planche, en mode Centrale Maths II) Vérifier le résultat avec python.

3.5 Élise D'Andréa

Exercice 28. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne canonique.
On considère l'équation (1) : $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ où Φ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ et A une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On admet le théorème : pour tout $(t_0, X_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, il existe une unique solution de (1) vérifiant $\Phi(t0) = X_0$.

1. Vérifier ce résultat avec $t_0 = 0$ lorsque :

(a) A est constante avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{2t}{1+t^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- Pour toute solution Φ de (1), $\|\Phi\|$ est constante.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est antisymétrique.

3.6 Nils Dérouet

Exercice 29. Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ on pose $u_{n,p}(x) = (-1)^p \dfrac{(2p+2)^n}{(2p+1)!} \dfrac{x^n}{n!}$.

1. Déterminer les réels x pour lesquels la famille $(u_{n,p}(x))_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

2. Donner le rayon de convergence et la valeur de $u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$ où $a_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!}$.

3. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} u(t)\mathrm{d}t$ est bien définie.

4. (question ajoutée) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} u(t)$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

3.7 Niels Descourvières

Exercice 30. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi : $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = 1/2$. On pose $S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\Psi(\lambda) = \ln(\mathrm{ch}(\lambda))$.

1. Soit Z une variable aléatoire telle que pour tout $\lambda > 0$, $\mathrm{e}^{\lambda Z}$ soit d'espérance finie. Montrer que : $\forall \lambda > 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(Z \geqslant t) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda Z})$.

2. Montrer que $\mathbb{P}(S_n \geqslant 0) \geqslant 1/2$.

3. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(Sn \geqslant t)) \leqslant \inf\{\Psi(\lambda) - \lambda t,\ \lambda \geqslant 0\}$.

3.8 Oriane Gicquiaux

Exercice 31. Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$. Pour $f \in E$ et $x \in]0,1]$ on pose $T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$; et l'on pose $T(f)(0) = f(0)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? Surjectif ?
2. On se donne f et g dans E et l'on pose $F(x) = x\displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t - \left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)$.
   (a) Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$ et mettre F' sous la forme d'une intégrale.
   (b) Montrer que si f et g sont de même monotonie, alors $T(fg)(x) \geqslant T(f)(x)T(g)(x)$.
   (c) (question ajoutée) Quand a-t-on égalité dans l'inégalité précédente (en supposant toujours f et g monotones) ?
3. (question ajoutée) Déterminer les éléments propres de T.

3.9 Maxence Herbelin

Exercice 32. Soit E l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}_+$dans $\mathbb{R}_+$ pour lesquelles existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x^\alpha f(x)$ tende vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.

Dans la suite on se donne $f \in E$.

2. Montrer que $g : x \mapsto \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} f(t)\mathrm{d}t$ est correctement définie et vérifie : $g'(x) - g(x) = f(x)$.
3. Soit $f_0 = f$ puis, par récurrence, $f_{n+1} = f \circ f_n$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

3.10 Frédéric Hor

Exercice 33. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que M^2 est diagonalisable et M inversible. Montrer que M est diagonalisable.
2. On suppose qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $Q(M)$ diagonalisable et $Q'(M)$ inversible. On se propose de montrer que M est diagonalisable.
   (a) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tel que $P \circ Q(M) = 0_n$.
   (b) Soit $\beta_1, \dots, \beta_k$ les racines de P. En considérant les polynômes $(Q(X) - \beta_1), \dots, (Q(X) - \beta_n)$, montrer que toute valeur propre de M est racine simple de $P \circ Q$. Conclure.

3.11 Fleurine Jaegler

Exercice 34. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$.

1. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$ et $a > 0$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{2M_0}{a} + \dfrac{aM_2}{2}$. En déduire : $M_1^2 \leqslant 4M_0M_2$.
2. On suppose qu'il existe deux réels K_1 et R tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, M_{2n} \leqslant K_1(2n)!R^{2n}$. Montrer qu'alors il existe un réel K_2 tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, M_{2n+1} \leqslant K_2(2n+1)!R^{2n+1}$. En déduire que f est développable en série entière.
3. (question ajoutée) La réciproque est-elle vraie ?

3.12 Marius Le Goff

Exercice 35. **1.** On veut montrer la relation suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{ch}(t)}\mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

(a) Justifiez la convergence de l'intégrale.

(b) Montrer que pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\frac{t}{\mathrm{ch}(t)} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t\mathrm{e}^{-(2n+1)t}$.

(c) Conclure.

2. On veut montrer la relation suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$.

(a) Justifiez la convergence de l'intégrale.

(b) Établir la relation attendue.

On pourra montrer que pour $t > 0$, $\displaystyle\frac{\cos(t)}{1+\mathrm{e}^t} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-nt}\cos(t)$.

3.13 Tristan Mehnert

Exercice 36. On se donne $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et l'on considère $U = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

1. Soit $R \in \mathbf{R}[X]$. Calculer $R(V)$ et $R(U)$.

2. On suppose que U et V sont semblables et que A est diagonalisable.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme P scindé à racines simples vérifiant $AP'(A) = 0_n$.

(b) Montrer que $A = 0_n$.

3.14 Maxime Nouvel

Exercice 37. Soit $A \in S_3(\mathbb{R})$. Pour toute colonne non nulle $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ on pose $q(X) = \dfrac{X^\top AX}{X^\top X}$.

1. Énoncer le théorème spectral pour les matrices symétriques réelles.

2. Soit $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ les valeurs propres de A, distinctes ou non.
Montrer que $\lambda_3 = \max\{q(X), X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{3,1}\}\}$. Énoncer une propriété similaire pour λ_1.

3. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des plans vectoriels de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Pour $P \in \mathscr{P}$, justifier l'existence de $\max\left\{X^\top AX, X \in P, \|X\| = 1\right\}$, puis montrer que :

$$\lambda_2 = \min\left\{\max\left\{X^\top AX, X \in P, \|X\| = 1\right\}, P \in \mathscr{P}\right\}.$$

3.15 Baptiste Rouard

Exercice 38. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$dans $\mathbb{R}$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t$. On suppose que $f(x)F(x)$ tend vers 3 quand x tend vers l'infini.

1. Montrer que $f(x)$ admet une limite finie en $+\infty$ et préciser cette limite.

2. Soit une fonction continue de $\mathbb{R}_+$dans $\mathbb{R}$.
Montrer que si $g(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers l'infini, alors $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ tend aussi vers ℓ.

3. Trouver un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers l'infini.

4. *Il y avait une quatrième question.*

3.16 Aurélien Simone

Exercice 39. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq -1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \dfrac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$.
2. Montrer que si (u_n) est à termes positifs, alors la série de terme général v_n est convergente.
3. Montrer que si la série de terme général u_n est absolument convergente, alors la série de terme général v_n est absolument convergente.

3.17 Étienne Sponton

Exercice 40. Soit f un endomorphisme d'un C-espace vectoriel E de dimension n. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $r_k = \mathrm{rg}\left(f^k\right)$.

1. Montrer que la suite (r_k) est décroissante et stationnaire.
2. En considérant $g_k : \left| \begin{array}{c} f^k(E) \to f^{k+1}(E) \\ x \mapsto f(x) \end{array}\right.$, montrer que la suite $(r_k - r_{k+1})$ est décroissante.

3.18 Adrien Valette

Exercice 41. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X_k$.

1. Pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$, on considère $Z_i = \mathrm{e}^{\lambda(X_i - 1/2)}$. Calculer l'espérance de Z_i.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$, calculer $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))}\right)$.
3. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $f_t : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}; \lambda \mapsto \lambda t - \ln(\mathrm{ch}(\lambda/2))$.
   Montrer que : $\forall \lambda > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant nt) \leqslant \mathrm{e}^{-nf_t(\lambda)}$.
4. Pour $t \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$, on pose $\mathrm{I}(t) = \left(t - \dfrac{1}{2}\right)\ln(1-2t) - \left(t + \dfrac{1}{2}\right)\ln(2t+1)$. Montrer que $\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant nt) \leqslant \mathrm{e}^{n\mathrm{I}(t)}$.
5. Comparer l'inégalité précédente avec celle de Bienaymé-Tchebycheff.

3.19 Exos en plus (RMS, BEOS)

Exercice 42. Soit (P_n) la suite à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 2, P_1 = X$ et, pour $n \geqslant 2$, $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.

1. Déterminer le degré de P_n. Étudier la parité de P_n.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.
3. Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4 Concours Centrale-Supélec – Maths 2

4.1 Nathan Couedel

Exercice 43.
D'après un écrit très célèbre Centrale 1989.
On s'intéresse aux suites (U_n) où U_0 et U_1 sont positifs et vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+2} = \frac{1}{2}\left(U_{n+1}^2 + U_n^2\right)$$

1. Déterminer l'éventuelle limite de (U_n). Montrer que si trois termes consécutifs sont égaux, alors la suite (U_n) est constante.
2. **[Py]** Calculer les premiers termes de la suite (U_n) pour différentes valeurs de U_0 et U_1. Que peut-on en déduire ? Pour les suites telles que $U_n \to +\infty$, s'intéresser à la suite définie par :
$$V_n = \frac{\ln\left(\frac{U_n}{2}\right)}{2^n}$$
3. Comparer les signes de $U_{n+1} - U_n$ et $U_n - U_{n-2}$.
4. On suppose désormais $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non constante. Montrer que si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $U_{n_0+1} \geqslant U_{n_0}$ et $U_{n_0+1} \geqslant U_{n_0-1}$, alors la suite $(U_n)_{n\geqslant n_0+1}$ est strictement croissante.
On admet que si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $U_{n+1} \leqslant U_n$ et $U_{n+1} \leqslant U_{n-1}$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.
5. Supposons que quel que soit N dans $\mathbb{N}$, la suite $(U_n)_{n\geqslant N}$ ne soit pas strictement monotone. Montrer que $U_0 \neq U_1$ et que si $U_0 < U_1$, alors $U_0 < U_2 < U_3 < U_1$ (vérifier si l'inégalité est stricte ou non). En déduire que la suite (U_n) converge vers 1.
6. (question ajoutée) Établir, pour une suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ non constante appartenant à S, l'équivalence des propriétés suivantes :
   (a) Il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que $U_N \geqslant 1$ et $U_{N+1} \geqslant 1$.
   (b) La suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.
   (c) La suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

4.2 Liv Craen

Exercice 44. Soit la fonction :
$$F(x) = \int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}\,dt$$
et la série :
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

1. (a) Tracer F sur l'intervalle $[-1, 1]$.
   (b) Tracer S_2, S_5, S_8, et superposer les courbes (chaque S_i étant la somme partielle d'ordre i de la série S). Que peut-on conjecturer ?
2. (a) Montrer que F est bien définie sur $[-1, 1]$.
   (b) Montrer que F est continue sur $[-1, 1]$.
3. Démontrer la conjecture faite en 1.(a).
4. Calculer $F(1)$ et $F(-1)$.
5. (a) Montrer que F est dérivable sur $]-1, 1[$.
   (b) F est-elle dérivable en 1 ?

4.3 Niels Derouet

Exercice 45. On possède N cases. On y fait tomber successivement n boules qui ont une probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans une case donnée. La variable aléatoire T_n correspond au nombre de cases non vides au n-ième lancer.

1. Créer une fonction `remplir(n, N)` qui renvoie une liste contenant N éléments donnant le nombre de boules dans chaque case après n lancers. Créer une fonction `nonvides(n, N)` qui renvoie le nombre de cases non vides après n lancers. Que se passe-t-il quand n augmente ? Tester pour $N = 10$.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T_n en fonction de n et N. Donner la loi de T_1 et de T_2.
3. Trouver $P(T_n = 1)$, $P(T_n = 2)$ et $P(T_n = n)$ en distinguant les cas $n \leqslant N$ et $n > N$.
4. On fixe $n > 2$. Montrer que :
$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \mathbb{P}(T_n = k)\frac{k}{N} + \mathbb{P}(T_n = k-1)\frac{N-k+1}{N}$$
pour des valeurs de k bien choisies.
5. Soit $G_n(x)$ la génératrice de T_n. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$,
$$G_{n+1}(x) = \frac{x}{N}\left(NG_n(x) + (1-x)G_n'(x)\right)$$
6. (rajoutée) En déduire l'espérance de T_n. Vérifier ce résultat en python. Interpréter la limite de cette quantité quand n tend vers $+\infty$.

4.4 Niels Descourvières

Exercice 46. On considère la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :
$$U_n = \frac{1}{64^n}\left(\frac{1}{6n+1} + \frac{3}{2(6n+2)} + \frac{1}{4(6n+3)} - \frac{1}{8(6n+5)}\right)$$

1. (a) Montrer que la série de terme général U_n converge. On note $S = \sum U_n$.
   (b) Donner, à l'aide de python, une estimation de la valeur de S. Que dire de la convergence de S ?
   (c) On pose :
$$\mathrm{I} = \int_0^{1/2} \frac{1+3x+x^2-2x^4}{1-x^6}\,dx$$
   Justifier la convergence de I. Donner une estimation de $2\mathrm{I}$. Quelle relation peut-on conjecturer entre I et S ?
2. On note :
$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x+x^2}\,dx, \quad \mathrm{I}_2 = \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x+x^2}\,dx, \quad \mathrm{I}_3 = \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x^2}\,dx$$
   (a) Calculer I_1, I_2, I_3.
   (b) Déterminer $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que :
$$\alpha\mathrm{I}_1 + \beta\mathrm{I}_2 + \gamma\mathrm{I}_3 = \frac{\pi}{a\sqrt{b}}$$
3. (a) Développer $(1-x^2)(1-x+x^2)(1+x+x^2)$.

(b) En déduire un polynôme $P(x)$ tel que :

$$\frac{\pi}{a\sqrt{b}} = \int_0^{1/2} \frac{P(x)}{1-x^6}\,dx$$

(c) Calculer la somme :

$$\sum_{n\geqslant 0} U_n$$

4.5 Fleurine Jaegler

Exercice 47. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 dans lesquelles sont répartis $2n$ jetons numérotés de 1 à $2n$. L'urne U_1 contient initialement r jetons ($0 \leqslant r \leqslant n$). On tire au hasard un numéro de jeton : s'il est dans U_1 on le place dans U_2 et inversement. On note X_p la variable aléatoire donnant le nombre de jetons contenu dans U_1 après p tirages.

1. Réaliser une fonction `jeu(n,r,p)` qui renvoie X_p.
2. Pour $n = 9$ et $r = 4$, donner une estimation de l'espérance de X_p pour $p \in [\![100, 200]\!]$.
3. Tracer, pour différentes valeurs de n et r, l'espérance de X_p en fonction de p pour $p \in [\![0, 4n]\!]$. Que peut-on conjecturer ?
4. Déterminer l'espérance de X_1.
5. Pour $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, montrer que : $\mathbb{P}(X_{p+1} = k) = \dfrac{2n-k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k-1) + \dfrac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k+1)$. Que peut-on dire pour $k = 0$ et $k = 2n$?
6. Montrer que : $G_{X_{p+1}}(s) = sG_{X_p}(s) + \dfrac{1-s^2}{2n}G'_{X_p}(s)$.
7. Calculer l'espérance de X_p et prouver la conjecture établie en 3).

4.6 Marius le Goff

Exercice 48. Définition : On dit qu'une matrice A de taille $n \times n$ est **à spectre diagonal** si son polynôme caractéristique est scindé et que les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de A, avec la même multiplicité. Autrement dit, le polynôme caractéristique est :

$$\prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$$

où a_{ii} sont les éléments diagonaux de la matrice A.
Soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ à spectre diagonal et $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Justifiez que toutes les matrices de $\mathcal{E}_n$ sont trigonalisables.
2. Écrire une fonction `polydiag(A)` qui renvoie les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice A, c'est-à-dire le produit :

$$\prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$$

Voici six matrices à analyser. Pour chaque matrice, calculez son polynôme caractéristique avec Python et vérifiez si elle appartient à $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_3$ en fonction de sa taille :

$$A_1 = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 4\end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix}5 & 7\\2 & 6\end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix}8 & 1\\3 & 9\end{pmatrix}$$
$$A_4 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 2 & -1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\1 & 5 & 4\\3 & 2 & 6\end{pmatrix}.$$

3. Caractériser $\mathcal{E}_2$.
4. Donner une matrice 4×4 de $\mathcal{E}_4$ avec 13 coefficients réels non nuls.
5. On définit la matrice M de la manière suivante :
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
Montrer que si A et C sont à spectre diagonal, alors M aussi.
6. Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}_n$.
   (a) Montrer que M^2 est diagonalisable puis que $M^2 = 0$.
   (b) Exprimer $\mathrm{Tr}(M^2)$ en fonction des coefficients de M. En déduire que $M = 0$.
7. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F tel que $F \subset \mathcal{E}_n$?

4.7 Maxime Nouvel

Exercice 49. Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}$.

1. Montrer que S est bien définie, périodique et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer (théoriquement ou à l'aide de python) un entier N tel que, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$|S(x) - S_N(x)| \leqslant 10^{-3}.$$

On définit le problème suivant :
$$\forall x \in [0, \pi], \forall t \in]0, +\infty[, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = S(x) \text{ pour tout } x, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

3. Vérifier que $u(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)\mathrm{e}^{-(2n+1)^2 t}}{(2n+1)^3}$ est une solution du problème.
4. Tracer la fonction qui à x associe $u(x, t)$ pour t fixé. On prendra $t = 1$ et $t = 2$.
5. En considérant, pour w solution du problème,
$$\int_0^{\pi} w(x, t)^2 \, dx,$$
déduire l'unicité du problème.
6. (question ajoutée) Étudier la limite de la solution du problème lorsque t tend vers $+\infty$.

4.8 Maxence Herbelin

Exercice 50. On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On définit
$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{k+1} = \dfrac{1}{2} A_k (\mathrm{I}_n + (A_k^\top A_k)^{-1}) \end{cases}$$

Uniquement la question 1 se traite en Python.

1. (a) Diagonaliser $A^\top A$. Trouver B tel que $A^\top A = B^2$.
   (b) Déterminer $A_5^\top A$ et $A_6^\top A$. Que conjecturez-vous ?

2. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On note $M = A^\top A$.

(a) Montrer qu'il existe un $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = B^2$.

(b) En considérant $Q = AB^{-1}$, montrer qu'il existe un couple $(Q, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = QS$.

3. On montre l'unicité du couple :

(a) Montrer que la matrice B de la question 2.a (et donc S) peut être choisie comme étant un polynôme en M.

(b) Soit (Q_1, S_1) un autre couple satisfaisant $A = Q_1S_1$. Calculer S_1^2, et conclure.

4. Convergence de la suite :

(a) Montrer que pour tout k, $A_k^\top A_k$ est inversible,

(b) On note (Q_k, S_k) l'unique couple de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A_k = Q_kS_k$. Montrer que la suite $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante et que $S_{k+1} = \dfrac{1}{2}(S_k + S_k^{-1})$.

(c) En déduire que $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Q$, où Q est le Q de la question 2.b

4.9 Baptiste Rouard

Exercice 51. On considère un candidat qui doit se rendre sur un lieu de convocation. Pour cela, il dispose de 2 chemins, le chemin A et le chemin B. Il prend le chemin A avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On note T la variable aléatoire égale au temps de trajet du candidat. Le temps de trajet du chemin, en minutes, A (respectivement B) suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$ (respectivement $b > 0$).

1. Justifier que $T(\Omega) = \mathbb{N}$.

2. (a) Écrire une fonction prenant comme argument p, a et b et renvoyant la valeur de T.

(b) On pose $a = 5$ et $b = 10$. Donner les valeurs moyennes de T pour $N = 500$ simulations pour $p \in \left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right\}$.

(c) Comment peut-on approcher la valeur de $\mathbb{E}(T)$? À quel résultat du cours pensez-vous ? Sous quelles hypothèses ?

3. Déterminer la loi de T en fonction de p, a et b. Donner sa fonction génératrice, et calculer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$ si elles existent.

4. On reprend les mêmes valeurs que dans la question 2., avec $p = 1/2$ On souhaite obtenir dans 95% des cas, un écart maximum de 30 secondes entre la valeur moyenne pour N simulations et l'espérance de T. Déterminer N afin de respecter cette exigence. Trouver ce N à l'aide de Python. *Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*

5. On considère maintenant que ce candidat rejoint une amie. Cette amie reste au lieu de rendez-vous pendant une durée qui suit une loi de Poisson de paramètre $c > 0$. On note R la variable aléatoire égale à 1 si les 2 amis se rencontrent et 0 sinon (l'amie est déjà partie).

6. (a) Définir une fonction prenant en argument p, a, b et c et renvoyant la valeur de R.

(b) Déterminer la loi de R.

(c) Exprimer son espérance et sa variance.

(d) Vérifier les résultats avec python.

4.10 Aurélien Simone

Exercice 52. Deux amis se donnent rendez-vous. On modélise par X et Y le temps de retard respectif des deux amis. On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes. On définit $T = |X - Y|$.

1. Que représente T ?
2. En Python, écrivez une fonction `rdv` qui prend en argument le nombre de simulations et renvoie n simulations de T pour les quatre cas suivants :
   - X, Y uniformes dans $[\![0, 14]\!]$
   - $X+1, Y+1$ géométriques de paramètre $p \in]0, 1[$
   - $X+1$ géométrique p et Y poisson de paramètre λ
   - X, Y de Poisson de paramètre λ

   Pour les simulations, on prendre $p = 1/3$ et $\lambda = 10$.
3. À l'aide de Python, tracez une estimation de $P(T = k)$ en fonction de k (on se limitera à $k \leqslant 40$) et estimez l'espérance de T pour les quatre cas.
4. Montrer que $P(T = 0) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X = j)P(Y = j)$ et donner la formule permettant de déterminer $P(T = k)$.
5. Déterminez la loi de T pour les deux premiers cas.
6. Montrer que T admet une espérance finie si X et Y admettent une espérance finie.
7. Calculez l'espérance de T pour les deux premiers cas.
8. (Question ajoutée) On admet que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, alors $\mathbb{E}(T) = \sqrt{\lambda + \mu}$. Calculer $\mathbb{V}(T)$ et montrer qu'elle est minimale lorsque $\lambda = \mu$.

4.11 Étienne Sponton

Exercice 53. Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

1. Montrer la convergence de la somme de la suite et donner une approximation à 10^{-6} près.
2. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} U_k = \ln(2).$$
3. On veut réorganiser la suite sous le nom de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en prenant à la suite deux termes positifs et un terme négatif :
$$V : \left\{1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{4}, \dots\right\}.$$
4. Écrire la fonction $V(n)$ et donner $V(250)$, $V(251)$, et $V(252)$.
5. Soit t_n la somme partielle des suites (V_n). Donner une valeur approchée de t_{250}, t_{251}, et t_{252}.
6. Faire le rapport $\frac{s_n}{t_n}$ et trouver une conjecture.
7. Prouver la conjecture.
8. Considérons une généralisation de la suite (V_n) sous la forme suivante : on prend p termes positifs et q termes négatifs dans la suite. Trouver la limite de cette suite généralisée.

5 Concours Mines-Telecom

5.1 Théophile Cirier

Exercice 54. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p.

1. Calculer $P(X_i > k)$ et $P(X_i \leqslant k)$.
2. Soit $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$.
   (a) Calculer $P(Y > k)$ puis $P(Y \leqslant k)$ et $P(Y = k)$.
   (b) Montrer que Y a une espérance finie, que l'on calculera.

Exercice 55. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Soit $D_n = \det(A_n)$. Montrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Calculer D_n.
3. A_n est-elle diagonalisable ? Est-ce que 0 est une valeur propre ?

5.2 Elise D'Andrea

Exercice 56. Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $U_n(x) = \dfrac{1}{xn^2 + n}$.

1. Montrer la convergence de la série de terme général $U_n(x)$ pour $x > 0$.
2. Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$
3. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que :

$$\forall x > 0, \ \left| S(x) - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right| \leqslant \frac{K}{x^2}$$

4. (question ajoutée) En déduire un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 57. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E.
Soit $H = \{h \in \mathcal{L}(E) \ ; \ h \circ p = -p \circ h\}$

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $f \in H$.
   (a) Montrer que $\ker(p)$ est stable par f.
   (b) Démontrer que $\mathrm{Im}(p)$ est stable par f.
   (c) Donner la matrice de f dans une base de E adaptée à p.

5.3 Nils Dérouet

Exercice 58. Pour $x \neq 0$ on pose $k(x) = \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2}$

1. k est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. k est-elle prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
3. Que peut-on dire de plus ?

Exercice 59. Soit, dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, le plan

$$\mathscr{P} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = x - y + z - t = 0\right\}.$$

Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$.

5.4 Nicolas Dumitrescu-Palcau

Exercice 60. On pose, pour tout $x > 0$, pour tout $t \geqslant 1$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{t(t+x)}$$

1. Montrer que $\varphi(t) = \dfrac{1/x}{t} - \dfrac{1/x}{t+x}$.
2. Donner la nature et calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)dt$.
3. On pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n(n+x)}$. Soit la série $\sum f_n$ de somme S, pour quelles valeurs de x cette série converge-t-elle ? Étudier la continuité de S sur son ensemble de définition.
4. Montrer que $S(x) \sim \dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$.

Exercice 61. On dit que u est un endomorphisme anti-adjoint si pour tout x $\langle u(x), x\rangle = 0$.

1. Montrer que pour tous x et y, $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$.
2. Soit M la matrice de u dans une base orthonormée. Montrer que M est antisymétrique.
3. Montrer que si u est anti-adjoint, $s = u \circ u$ est un endomorphisme autoadjoint.
4. Démontre que $\mathrm{ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont des supplémentaires orthogonaux.

5.5 Gavivarsan Ganeshanathan

Exercice 62. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer l'existence d'un vecteur propre $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On définit $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ par $B = \begin{pmatrix} A & XX^\top \\ XX^\top & A \end{pmatrix}$.

2. Donner les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $Y_a = \begin{pmatrix} X \\ aX \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B.
3. Donner une base de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de B.
4. On suppose $n = 3$. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. On définit B comme ci-dessus. Donner un polynôme annulateur de B de degré 3 .

Exercice 63. Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3 + x^2}$ définit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5.6 Oriane Gicquiaux

Exercice 64. Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1. Montrer que $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
2. Calculer $P_{Z=n}(X = k)$ pour $(k, n) \in \mathbf{N}^2$.
3. Reconnaître alors la loi conditionnelle de X sachant $(Z = n)$.

Exercice 65. Soit $(a_1, \dots, a_n)$ n réels, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $M_{n,i} = M_{i,n} = a_i$ et les autres coefficients sont nuls.

1. M est-elle diagonalisable ?
2. Préciser les éléments propres de M.

5.7 Antonio Griffaton

Exercice 66. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et soit f définie par : $\forall X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$
3. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Donner le spectre de f.
5. Donner les espaces propres associés.

Exercice 67. Étudier l'existence et calculer (si possible) :

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$$

5.8 Sabrina Guecem

Exercice 68. Soit E, espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x non nul, on définit

$$\varphi(f)(x) = \int_0^x \frac{1}{x} f(t)\, dt.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Montrer que φ est injectif.
3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

Exercice 69. Soit N un entier naturel. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire simultanément n ; on modélise le plus petit chiffre tiré par une variable aléatoire X, et on note Y la variable aléatoire modélisant le plus grand chiffre tiré.

1. Calculer le nombre de combinaisons possibles de tirage.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Y, puis calculer $\mathbb{P}(Y \leqslant k)$. Déterminer la loi de Y.
3. Faire la même chose pour X.

 N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

5.9 Maxence Herbelin

Exercice 70. On s'intéresse à : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$

1. Donner le rayon de convergence et la somme S de cette série.
2. Soit X une variable aléatoire. On pose $G_X(t) = \lambda S$. Trouver la valeur de λ.
3. Donner $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, et la loi de X.

Exercice 71. On définit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{nt}}{(1+\mathrm{e}^t)^{n+1}} dt$

1. Montrer que l'intégrale est correctement définie.
2. Pour tout $n \geqslant 2$, montrer la relation : $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{n2^n} + \dfrac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-1}$
3. On pose $J_n = n\mathrm{I}_n$. Calculer J_n et en déduire une expression de I_n.

5.10 Victoire Jalenques

Exercice 72. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ avec$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Trouver un polynôme annulateur de M de degré 3.
2. M est-elle inversible ?
3. M est-elle diagonalisable ?
4. Montrer que les valeurs propres de M^2 sont négatives ou nulles.

Exercice 73. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(t)^n} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.
2. Étudier la limite de a_n quand n tend vers l'infini.
3. Étudier la convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$.
4. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

5.11 Ivann Minoc

Exercice 74. Pour $n \geqslant 2$, on pose $B = J_n - \mathrm{I}_n$, où J_n est la matrice constituée de 1 uniquement.

1. Montrer que B est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de $B + \mathrm{I}_n$. En déduire les éléments propres de B.
3. Déterminer un polynôme de degré 2 annulant B.
4. Montrer que B est inversible.

Exercice 75. Pour n naturel, on pose (E_n) l'équation :

$$x\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = \sqrt{n}$$

1. Montrer que pour tout n, (E_n) admet une unique solution x_n.
2. Déterminer la limite de la suite (x_n).
3. Déterminer un équivalent de (x_n) quand n tend vers $+\infty$.

5.12 Maxime Nouvel

Exercice 76. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient $\text{tr}(M) = 3$ et $M^5 = M^2$.

Exercice 77. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\text{sh}(t)}{t} dt$

1. Trouver le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition et calculer f'.
3. Étudier la limite de f en $+\infty$.
4. (rajout) Trouver une expression de f.

5.13 Jathusan Satheeskumar

Exercice 78. On cherche les applications f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}. \qquad (*)$$

1. Soit f vérifiant $(*)$.
   (a) En considérant des valeurs particulières de n, montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(x+1).$$
   (b) Montrer que $\displaystyle\int_x^{x+1} f'(t)\mathrm{d}t$ ne dépend pas de x, puis que f' est constante.
2. Donner toutes les solutions du problème posé.

Exercice 79. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que toute matrice non nulle de F soit inversible.

1. On suppose que A et B sont dans E. Montrer que $x \mapsto \det(xA - B)$ est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha A - B \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
3. En déduire que $\dim(F) \leqslant 1$ et préciser la nature de F.

5.14 Beryl Spérélakis-Beedham

Exercice 80. Soit E l'espace des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose : $\phi(f)(0) = f(0)$ et $\phi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ si $x \neq 0$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de E.
2. Montrer que 0 n'est pas une valeur propre de ϕ.
3. Montrer que 1 est une valeur propre de ϕ et trouver l'espace propre associé.
4. Déterminer les autres valeurs propres.

Exercice 81. X suit une loi géométrique de paramètre $p < 1$.
On considère :

- A : « X prend des valeurs paires »
- B : « X prend des valeurs multiples de 3 »

1. Calculer $\mathbb{P}(A)$.

2. Calculer $\mathbb{P}(B)$. On calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(X = 3k)\\ &= \sum_{k\geqslant 1} pq^{3k-1}\\ &= \frac{p}{q}\frac{q^3}{1-q^3}\\ &= \frac{pq^2}{(1-q)(1+q+q^2)}\\ &= \frac{q^2}{1+q+q^2}.\end{aligned}$$

3. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

6 CCINP

6.1 Sami Bennane + Yssambre Venturini

Exercice 82. Pour $x > 0$, $n \geqslant 2$, $U_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(n)} x^n$.

On admet que la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln(n)}$ est divergente.

1. Donner le domaine D de convergence de $\sum_{n\geqslant 2} U_n(x)$.
2. La convergence de cette série est-elle normale sur D ?
3. On note $S(x) = \sum_{n\geqslant 2} U_n(x)$ et $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\ln(k)} x^k$. Montrer que pour tout $x \in D$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.
4. En déduire que S est continue sur D.
5. S est-elle intégrable sur D ?

Exercice 83. Soit $(A_1, A_2, A_3, A_4) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^4$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $\mathrm{rg}(A) \leqslant \mathrm{rg}(B_1) + \mathrm{rg}(B_2)$; puis que : $\mathrm{rg}(A) \leqslant \sum_{k=1}^{4} \mathrm{rg}(A_k)$.
2. Montrer que si $\mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}(A_4) = n$ et $A_3 = 0$, A est inversible. Que vaut alors A^{-1} ?

6.2 Etienne Bouilleau, Thomas Faure, Maxence Herbelin

Exercice 84. Soit φ l'application qui au polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par $X^4 - 1$.

1. Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donnez A la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. A est-elle diagonalisable ? (on pourra calculer A^2)
3. Donner le spectre de φ.
4. Donnez les sous-espaces propres de φ.
5. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donnez son inverse.
6. L'application φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 85. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geqslant 0$, $\dfrac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on précisera.
2. Démontrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier la convergence de (f_n').

6.3 Eva Chaudanson

Exercice 86. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $|x| < 1$.

1. Donner le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-x}$ puis celui de $\dfrac{1}{(1-x)^r}$
2. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = p - 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = \dbinom{k+r-1}{k} p^r q^k$. Montrer que $P(X = k) = p_k$ définit une probabilité.

3. Calculer la fonction génératrice de X.

4. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 87. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique.
Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\frac{1}{3}(\mathrm{I}_n + 2M) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $\langle MU, U\rangle = \|U\|^2$

2. Démontrer que pour tout U dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, U est vecteur propre de M.

3. En déduire que M est une homothétie et en déduire M.

6.4 Jean Compagnon

Exercice 88. Soit $a \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}[X]$, on pose pour tout $P \in E$:

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\, dt$$

1. Montrer que N_a est une norme.

2. (a) Montrer que N_0 et N_1 sont équivalentes.

(b) Montrer que pour toute suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, P_n converge dans (E, N_0) si et seulement si elle converge dans (E, N_1).

3. (a) Montrer que $\forall (a, b) \in [0, 1]^2$, P_n converge dans (E, N_a) si et seulement si P_n converge dans (E, N_b).

(b) Montrer que si $1 \leqslant a < b$, alors l'équivalence précédente n'est plus valable. (Indication : on pourra poser $P_n = \left(\frac{X}{c}\right)^n$ avec c une constante.)

4. Que dire si $E = \mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 89. **1.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives tendant vers $+\infty$. Montrer que si $u_n \sim v_n$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

2. Montrer que $\ln(n!) \sim n\ln(n)$.

3. En déduire le rayon de convergence et une expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(n!)z^n$ à l'aide de la fonction $g(z) = \sum_{n\geqslant 1} \ln(n)z^n$.

6.5 Elise D'Andréa + Beryl Spérélakis-Beedham

Exercice 90. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

1. Vérifier que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(4n + 2)a_{n+1} = (n + 1)a_n$.

2. Donner le rayon de convergence de f, que l'on notera R.

3. Montrer que : $\forall x \in]-R, R[, x(4 - x)f'(x) - (x + 2)f(x) + 2 = 0$.

4. En posant $u = \sqrt{\frac{4-x}{x}}$, trouver une primitive de $\frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}$ sur $]0, 4[$.

5. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{x+2}{x(4-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{4-x}$. Trouver enfin l'expression de $f(x)$.

Exercice 91. Soit $n \geqslant 2$ entier naturel, A une matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. On pose $\varphi : \begin{array}{|l} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ \quad M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)\mathrm{I}_n \end{array}$.

1. Exprimer φ^2 en fonction de φ.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit diagonalisable. Préciser ses espaces propres.

6.6 Nils Derouet

Exercice 92. Soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de I et de J puis montrer que $\mathrm{I} = J$.
2. Calculer $\mathrm{I} + J$. En déduire la valeur de I.

Exercice 93. Soit A une matrice antisymétrique de taille n, f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Soit E l'ensemble des matrices colonnes de longueur n. On utilisera le produit scalaire canonique sur E.

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$
2. (a) Montrer que $\det(f) = (-1)^n \det(f)$. Que peut-on en déduire ?
   (b) Montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.
   (c) Montrer que l'endomorphisme induit sur $\mathrm{Im}\, f$ est antisymétrique injectif.
3. On suppose maintenant $n = 3$. On note toujours f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   (a) Montrer que dans une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E, on peut écrire :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix},\ \text{où } a \in \mathbb{R}$$
   (b) Démontrer qu'il existe u dans $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout x dans $\mathbb{R}^3$, $f(x) = u \wedge x$, où $\wedge$ désigne le produit vectoriel.

6.7 Nicolas Dumitrescu-Palcau

Exercice 94. On dispose d'une urne contenant n boules blanches et n boules rouges. On effectue des tirages selon la règle suivante :

- si l'on pioche une boule rouge, on la remet dans l'urne ;
- si l'on pioche une boule blanche, on la met de côté et on rajoute une boule rouge dans l'urne.

On note la variable aléatoire X_p qui désigne le nombre de boules blanches dans l'urne au p-ième tirage, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner la loi de X_1 et X_2.
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X_p = n)$.
3. Donner, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, une relation entre $\mathbb{P}(X_{p+1} = k)$, $\mathbb{P}(X_p = k+1)$ et $\mathbb{P}(X_p = k)$.
4. Justifier que la fonction génératrice $G_p(t)$ de X_p est un polynôme.
5. Démontrer la relation
$$G_{p+1}(t) = G_p(t) + \frac{1-t}{2n} G_p'(t).$$

6. Donner une relation entre $\mathbb{E}(X_{p+1})$ et $\mathbb{E}(X_p)$. Calculer $\mathbb{E}(X_p)$. Calculer sa limite lorsque $p \to +\infty$. Interpréter.

Exercice 95. **1.** Rappeler la forme d'une matrice de Vandermonde et l'expression de son déterminant.

2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$ on pose $f_k : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{kx}$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

3. (a) Sans les calculer, montrer que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ admet trois racines distinctes dans $\mathbb{C}$, que l'on notera α, β et γ.

(b) Résoudre le système $\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z & = 0 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z & = 0 \end{cases}$

6.8 Theodore Froment

Exercice 96. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-1/t} t^n \, dt$

1. Montrer que l'intégrale est bien définie et donner son signe.
2. Étudier les variations de I_n.
3. Montrer la convergence de I_n et déterminer sa limite.
4. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(n+1)\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n-1} = \mathrm{e}^{-1}$.
5. Montrer que $\mathrm{I}_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$ quand $n \to \infty$.
6. Déterminer la nature de la série $\sum \mathrm{I}_n$; de $\sum (-1)^n \mathrm{I}_n$.
7. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum \mathrm{I}_n x^n$.

Exercice 97. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = 4A^2$. On suppose que 2 et -2 sont valeurs propres de A. Montrer que A est diagonalisable.

6.9 Sabrina Guecem

Exercice 98. Soit $n \geqslant 2$. Un secrétaire téléphone à n clients. On modélise par une variable aléatoire X le nombre de clients que le secrétaire parvient à joindre avec une probabilité $p \in]0, 1[$ à chaque appel. On suppose que les appels sont indépendants entre eux.

1. Déterminer la loi de X. Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Parmi les $n - X$ clients restants, le secrétaire appelle une seconde fois. On note Y la variable modélisant le nombre de clients que le secrétaire parvient à joindre lors de cette seconde série d'appels. On note $Z = X + Y$.
   (a) À quoi correspond Z ? Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Z.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(Z = 0)$.
   (c) Montrer que $\mathbb{P}(Z = 1) = npq^{2n-2}(1 + q)$ avec $q = 1 - p$.
   (d) Soit h un entier appartenant à $[\![0, n-k]\!]$, avec k appartenant à $[\![0, n]\!]$. Calculer $\mathbb{P}(Y = h \mid X = k)$.
   (e) En déduire la loi de Z.

Exercice 99. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$.
On considère le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^\pi f(t)g(t) \, dt$.
Soit $G = \{f \in E \mid f'' + f = 0\}$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et que $G = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ avec f_1, f_2 deux fonctions à déterminer.
2. Calculer le produit scalaire de f_1 et f_2.
3. (question ajoutée) Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $x \mapsto \sin(nt)$ et $x \mapsto \cos(nt)$ sont dans $G^\perp$.
4. (question ajoutée) Démontrer que pour toute suites $(a_n)_{n\geqslant 2}$ et $(b_n)_{n\geqslant 2}$ telles que $\sum |a_n| n^2$ et $\sum |b_n| n^2$ convergent, alors la fonction
$$f : x \mapsto \sum_{n\geqslant 2} a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)$$
est définie et est dans $G^\perp$.

6.10 Frederic Hor

Exercice 100. On considère 3 points A, B et C.
Une puce se trouve à l'instant 0 en A. À chaque instant la puce se déplace sur un autre point avec équiprobabilité.
On note A_n l'événement « la puce se trouve en A à l'instant n », et $\mathbb{P}(A_n)$ la probabilité associée. De même avec $\mathbb{P}(B_n)$ et $\mathbb{P}(C_n)$.
On note J la matrice 3×3 avec que des 1, et $M = J - \mathrm{I}_3$, et
$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix}$$

1. Trouver une relation entre U_{n+1} et U_n.
2. M est-elle diagonalisable ? La diagonaliser et donner les espaces propres. En déduire M^n.
3. Déterminer un polynôme annulateur de J. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X-1)^n$ par $X(X-3)$. En déduire M^n.
4. Expression de $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(B_n)$, $\mathbb{P}(C_n)$? Limites ?

Exercice 101. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

1. Justifier la définition de la suite (u_n) et montrer qu'elle converge vers 0.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} u_n$. Montrer que la série de terme général v_n converge.

6.11 Fleurine Jaegler

Exercice 102. On définit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\, dt$.

1. Justifier la convergence de I.
2. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ \sin^3(t) = -\dfrac{1}{4}\sin(3t) + \dfrac{3}{4}\sin(t)$.
3. Montrer que $\mathrm{I} = \dfrac{3}{4} \displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\, dt$.
4. Montrer que $g(t) = \dfrac{\sin(t) - t}{t^2}$ est définie et prolongeable par continuité sur $]0, +\infty[$.
5. En déduire la valeur de I.

Exercice 103. Soit

$$M(a,b,c)=\begin{pmatrix} a & 0 & c\\ 0 & b & 0\\ c & 0 & a\end{pmatrix}.$$

où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer les valeurs propres de $M(a,b,c)$.
2. Calculer le déterminant de $M(a,b,c)$.
3. Si le déterminant est nul, déterminer le noyau et l'image de la matrice.
4. $M(a,b,c)$ est-elle diagonalisable ?

6.12 Victoire Jalenques

Exercice 104. On considère N boules numérotées de 1 à N, avec $N\geqslant 2$.
On note X_i la variable aléatoire correspondant à la valeur de la boule tirée au i-ième tirage avec remise. Les variables $X_1,\dots,X_n$ sont supposées indépendantes.
On note $M_n=\max(X_1,\dots,X_n)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(M_n\leqslant k)$ et en déduire la loi de M_n.
2. (a) Montrer que
$$\mathbb{E}(M_n)=\sum_{k=0}^{N-1}\mathbb{P}(M_n>k).$$
   (b) Donner la limite de $\mathbb{E}(M_n)$ quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

Exercice 105. Soient A et B deux matrices, et P un polynôme.

1. Montrer que si $P(A)=0$, alors toute valeur propre de A est racine de P.
2. Soit $U\neq 0$ telle que $AU=UB$. Montrer que $P(A)U=UP(B)$.
3. Montrer que $\mathrm{Sp}(A)\cap\mathrm{Sp}(B)\neq\emptyset$.

6.13 Aurélien Simone

Exercice 106. Le but est de trouver les fonctions $f\in\mathscr{C}^2$ telles que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\qquad f(x)f(y)=\int_{x-y}^{x+y}f(t)dt,$$

qu'on notera (E).

1. Selon la valeur de $c\in\mathbb{R}$, déterminer les solutions de l'équation $y''-cy=0$.
2. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $F(x,y)=\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,dt$. Calculer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.
3. Soit $f\in\mathscr{C}^2$ solution de (E)
   (a) Calculer $f(0)$
   (b) Calculer $f''(x)f(y)-f''(y)f(x)$
   (c) Déterminer alors la forme de f.
4. Conclure.

Exercice 107. Soit $(A,B,P)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\times\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\times\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $AP=PB$. On écrit $P=P_1+\mathrm{i}P_2$ avec $(P_1,P_2)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\times\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'on pose : $Q(x)=\det(P_1+xP_2)$.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $A(P_1+xP_2)=(P_1+xP_2)B$.
2. Montrer qu'il existe $x_0\in\mathbb{R}$ tel que : $Q(x_0)\neq 0$.
3. En déduire qu'il existe $P_0\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que : $AP_0=P_0B$. Qu'a-t-on démontré ?

6.14 Etienne Sponton

Exercice 108. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}\,dt$.

1. Justifier l'existence de f sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.
5. Montrer que $\forall x > 0 \quad f'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$, puis calculer $f(x)$.
6. Soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$. Exprimer I en fonction de $f(0)$ et calculer I.

Exercice 109. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda X$.

1. Exprimer $\overline{X^\top}X$ avec les coordonnées de X.
2. Calculer de deux manières différentes $\overline{(AX)^\top}(AX)$. Que peut-on dire de λ ?

6.15 Adrien Valette

Exercice 110. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 aussi.
2. Montrer que si f est diagonalisable alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.
3. Soit λ une valeur propre non nulle de f^2 et μ une racine carrée complexe de λ. Montrer que : $\mathrm{Ker}\left(f^2 - \lambda\,\mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Ker}\left(f - \mu\,\mathrm{Id}_E\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(f + \mu \mathrm{Id}_E\right)$.
4. Montrer que si f^2 est diagonalisable et inversible, alors f est diagonalisable et inversible.
5. Montrer que si f^2 est diagonalisable, f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.

Exercice 111. Sans préparation. Soit $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)\,e^{-t}}{t}\,dt$.

1. Montrer que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Donner alors φ' et en déduire φ à l'aide des fonctions usuelles.

6.16 Exos en plus (RMS, BEOS)

Exercice 112. On note pour $n \in \mathbb{N}^* x \mapsto f_n(x) = \dfrac{1}{x}\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n - 1\right)$ et $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

1. Citer le théorème de convergence dominée.
2. Justifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la définition de I_n.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \times k!}$.

Exercice 113. On considère $f : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto x^2 y + y(\ln(y))^2$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Déterminer les extrema locaux et globaux de f.

Exercice 114. Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et (S) le système différentiel $X' = AX$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Expliciter P et D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. On note $U = P^{-1}X$. Déterminer le système différentiel vérifié par U et le résoudre. Déterminer alors les solutions de (S).
4. Soit (S') le système différentiel $X'' = AX$. Déterminer les solutions réelles de (S').
5. Soit E l'ensemble des solutions réelles bornées de (S'). Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

7 ENSEA

7.1 Nicolas Dumitrescu-Palcau

Exercice 115. On pose, pour tout n entier naturel, la suite $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{2+t^2}\,dt$ ainsi que la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Donner le rayon de convergence de a_n.
2. Pour tout $|x| < R$, donner une autre expression de f.

Exercice 116. φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P(1-X)$.

1. L'application φ est-elle injective ? Bijective ?
2. Donner les éléments propres de φ.

7.2 Thomas Faure

Exercice 117. On pose :

$$w = \exp(2i\pi/7) \quad ; \quad S = w + w^2 + w^3 \quad ; \quad T = w^4 + w^5 + w^6$$

Calculer $S+T$, ST, puis S et T.

Exercice 118. On dispose d'une urne de $2n$ boules avec n boules numérotées de 1 à n et n boules numérotées 0. On prélève une poignée de n boules. Soit k un entier dans $[\![1, n]\!]$.
On pose :

$$U_k = \begin{cases} 1 & \text{si la boule } k \text{ est piochée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de U_k, son espérance.
2. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(U_i, U_j)$ pour $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$.
3. On pose $N = U_1 + \cdots + U_n$. Que signifie N et donner son espérance.
4. Déterminer la variance de N.

8 Navale

8.1 Aurélien Simone

Exercice 119. Pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt \text{ et } u(P) = \int_0^1 (X+t)^n P(t)\,dt.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique.

2. Justifier l'existence d'une base orthonormée $P_0, P_1, \dots, P_n$ constituée de vecteurs propres de u.

3. Soient $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de u. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x) P_k(y).$$

9 ENS Paris-Saclay

9.1 Liv Craen

Exercice 120. Soit E l'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{N}$. On définit $F : E \to E$ par :
Pour $u \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F(u)_n = u_{n+1}$$

1. Montrer que F est linéaire.

2. Est-elle injective ? Surjective ?

3. Construire G endomorphisme linéaire de E tel que $F \circ G = \mathrm{Id}_E$.

4. Que vaut $G \circ F$?

5. Conclure.

On note désormais E l'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{Z}$. On définit $H : E \to E$ par :
Pour $u \in E$, et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$H(u)_n = u_{n+1} + u_{n-1}$$

6. Montrer que H est linéaire. Est-elle injective ?

7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $u \in \ker(H - \mathrm{Id}_E)$. Trouver $M_\lambda \in M_2(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = M_\lambda^k \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

8. Pour $|\lambda| \neq 2$, montrer que M_λ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres.

9. Existe-t-il des suites de $\ker(H - \lambda \mathrm{Id}_E)$ périodiques ? Les caractériser.

10. Étudier le cas $|\lambda| = 2$.

Exercices classés par catégorie Les (T) signifient que l'exercice est transverse, donc qu'il mélange plusieurs thématiques bien distinctes.

Catégorie	**Exercices**
Complexes et polynômes	42, 117
Algèbre linéaire de sup	8, 55, 11, 17, 40, 57, 79, 83, 95, 107
Réduction	1 (T), 15, 22 (T), 25, 33, 36, 48, 65, 66, 68, 72, 74, 76, 80, 84, 97, 100 (T), 103, 105, 110, 116, 91, 120 (T), 114 (T)
Algèbre bilinéaire de sup	21, 59, 61, 99
Endomorphismes des espaces euclidiens	5, 13, 19, 26, 37, 50, 62, 87, 93, 109, 119
Analyse de sup	4, 9 (T), 14, 16, 31, 32 (T), 38, 43, 58 (T), 75, 78, 120 (T)
Séries	39, 46, 53, 101
Intégration	3, 67, 71, 92, 102
Suites de fonctions	9 (T), 32 (T), 85, 27
Séries de fonctions	120 (T), 56, 60, 63, 82
Séries Entières	12, 20, 24, 29, 34, 70, 73 (T), 89, 90, 96 (T), 115
Suites d'intégrales	35, 73 (T), 96 (T), 112
Intégrales à paramètres	2, 10, 18, 44, 108, 77, 111
Équations différentielles	1 (T), 7, 106, 114 (T)
Normes	23, 88
Topologie	6, 22 (T)
Calcul diff	28, 58 (T), 120 (T), 113
Exo transverse d'analyse	9, 32, 49, 58, 73, 96
Probabilités finies	69, 98, 100 (T), 118
Probabilités discrètes	27, 30, 45, 47, 51, 52, 54, 64, 81, 86, 94, 104
Exo transverse général	1, 22, 120, 100, 114

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exercices... déjà dans les feuilles de TD !

- l'exercice 2 est l'exercice **14** de la feuille de TD 9.
- l'exercice 8 est l'exercice **9** de la feuille de TD 3.
- l'exercice 10 est l'exercice **12** de la feuille de TD 9.
- l'exercice 11 est l'exercice **8** de la feuille de TD 3.
- l'exercice 12 est l'exercice **10** de la feuille de TD 10.
- l'exercice 15 est l'exercice **25** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 17 est l'exercice **15** de la feuille de TD 3.
- l'exercice 18 est l'exercice **11** de la feuille de TD 9.
- l'exercice 21 est l'exercice **10** de la feuille de TD 4.
- l'exercice 23 est l'exercice **4** de la feuille de TD 5.
- l'exercice 25 est l'exercice **13** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 27 est l'exercice **13** de la feuille de TD 6.
- l'exercice 33 est l'exercice **28** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 35 est l'exercice **5** de la feuille de TD 9.
- l'exercice 36 est l'exercice **29** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 39 est l'exercice **7** de la feuille de TD 2.
- l'exercice 40 est l'exercice **4** de la feuille de TD 3.
- l'exercice 47 est l'exercice **10** de la feuille de TD 12.
- l'exercice 72 est l'exercice **15** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 62 est l'exercice **14** de la feuille de TD 13.
- l'exercice 68 ressemble énormément à l'exercice **6** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 61 ressemble énormément à l'exercice **1** de la feuille de TD 4.
- l'exercice 54 est l'exercice **9** de la feuille de TD 6.
- l'exercice 80 est l'exercice **6** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 66 est l'exercice **4** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 64 est l'exercice **11** de la feuille de TD 6.
- l'exercice 59 est l'exercice **3** de la feuille de TD 4.
- l'exercice 105 est l'exercice **27** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 95 est l'exercice **17** de la feuille de TD 4.
- l'exercice 90 est l'exercice **6** de la feuille de TD 10.
- l'exercice 83 est l'exercice **2** de la feuille de TD 4.
- l'exercice 84 est l'exercice **1** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 85 est l'exercice **2** de la feuille de TD 7.
- l'exercice 97 est l'exercice **17** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 107 est l'exercice **16** de la feuille de TD 3.
- l'exercice 108 est l'exercice **8** de la feuille de TD 9.
- l'exercice 88 ressemble énormément à l'exercice **4** de la feuille de TD 6.
- l'exercice 110 ressemble énormément à l'exercice **27** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 113 est l'exercice **18** de la feuille de TD 15.