N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Préparation à l'oral
PSI Pasteur 2024-2025

1 Généralités

1.1 Les différents types d'oraux de maths

Concours	Préparation	Passage	Particularités
Mines-Ponts	15'	1h	1 exo avec préparation, un sans
Centrale Maths	x	30'	1 exo
Centrale Maths-Informatique	30'	30'	Utilisation de Python
Mines-Telecom	x	30'	2 exos
CCINP	30'	30'	1 exo à préparer + 1 petit sans préparation
Navale	x	30'	1 exo
Saint-Cyr	30'	25'	Utilisation de Python
ENSEA	20'	20'	2 exos

1.2 Conseils pour l'oral

L'examinateur. L'examinateur n'est pas un colleur : son but n'est pas de vous aider dans l'apprentissage du cours ou de vous dire ce qui va/ne va pas. Son but est de vous **évaluer.** Il sera donc souvent très neutre. Ne cherchez pas à lire sur le visage de la personne qui vous interroge si ce que vous dites est juste ou faux. Extrait rapport CCINP

> L'autonomie du candidat est également évaluée. Le rôle de l'examinateur est de poser des questions avec bienveillance, conscient du stress que peut générer ce type d'épreuve, mais pas de mener l'oral à la place du candidat. En particulier, les candidats ne doivent pas rechercher l'approbation régulière de l'examinateur durant la présentation. Rappelons que les examinateurs ont le souci de rester bienveillants. Le candidat n'est pas censé réclamer des indications, en revanche l'examinateur est libre de faire des remarques utiles à la bonne poursuite de l'oral.

Écoutez donc les indications qui sont données, c'est fondamental !
Ensuite, il faut **interagir** avec l'examinateur et ne pas rester collé à son tableau, dos à l'examinateur.

Oraux sans préparation. La difficulté de l'oral sans préparation est de pouvoir réfléchir « en direct ». Extrait du rapport Mines-Ponts

> Le jury apprécie quand un candidat est capable de lister tous les théorèmes qui peuvent s'appliquer à une situation donnée (interversion limite intégrale, diagonalisabilité d'une matrice,...) avant de réfléchir à celui qui semble le plus adapté à la situation. Cette phase de réflexion ne doit cependant pas se muer en une série de propositions faites à l'examinateur afin d'obtenir sa validation. L'esprit d'initiative et la capacité des candidats à mener un raisonnement de façon autonome font partie des attendus du concours.

Oraux avec préparation. L'oral avec préparation, c'est un exercice assez différent de la colle. Sachez correctement gérer votre temps de préparation !

- **pendant la préparation**
  - essayez rapidement de voir où l'exercice veut aller, les thématiques qu'il semble aborder
  - commencez **linéairement** l'exercice, même si des concours comme CCINP autorisent le fait de sauter des questions intermédiaires (c'est moins apprécié à Centrale...)
  - vous n'êtes pas obligé·e·s de faire intégralement toutes les questions, si vous pensez qu'ensuite, à l'oral, vous arriverez à les faire en direct
  - en revanche, pour certains calculs, je vous conseille de les faire au brouillon si vous avez peur de ne pas réussir à les faire en direct
- **pendant le passage**
  - l'oral n'est pas un écrit debout ! Il ne faut surtout pas se contenter de recopier au tableau ce qu'on a fait au brouillon.
  - vous n'êtes pas obligés de faire une présentation intégrale de l'exercice que vous allez faire. Extrait du rapport de l'oral 2024 de Centrale :

    > « En début d'épreuve, la lecture, la copie quasi intégrale au tableau de l'énoncé, la présentation générale à l'oral du sujet constituent une perte de temps ; les membres du jury interrogent toujours en ayant l'énoncé de l'exercice, et les candidats sont invités à entrer d'emblée dans le vif du sujet. »

    Même son de cloche pour CCINP

    > « Répéter ou réécrire l'énoncé peut paraître une étape rassurante pour le candidat, mais attention de ne pas y passer trop de temps. En revanche, si le candidat prend le temps d'exposer au préalable les différentes étapes de son raisonnement avant de rentrer dans les détails, la qualité de la présentation s'en retrouve améliorée. »
  - n'hésitez pas à présenter de manière **synthétique** ce que vous avez présenté. Par exemple « J'ai calculé au brouillon la dérivée seconde de la fonction f, puis-je vous donner directement le résultat ? » Extrait de rapport CCINP

    > Les candidats ont intérêt à gagner en efficacité dans la présentation de ce qu'ils ont préparé pour bénéficier d'un temps de réflexion supplémentaire sur les questions qu'ils n'ont pas entièrement traitées, en s'appuyant sur les indications éventuelles de l'examinateur.

Le cas des oraux avec Python. L'outil informatique rajoute une difficulté supplémentaire, celle de la gestion du temps. Tout oral de maths avec Python est avant tout un **oral de maths**. La priorité, ce sont les mathématiques ! Il faut donc limiter son temps de passage sur python (une dizaine de minutes maximum) et prendre le temps de faire des maths pendant la préparation !

2 Concours Mines-Ponts

2.1 Paul Benoit

Exercice 1. Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ on définit $f_{a,b,c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3; t \mapsto \begin{pmatrix} be^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix}$.

Soit $F = \left\{ f_{a,b,c},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel, en donner la dimension et une base.

Correction

On note $E = (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{R}}$ (les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$). On écrit que

$$F = \left\{ t \mapsto a \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}(\varphi, \psi, \theta),$$

où

$$\varphi : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \psi : t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \\ 0 \end{pmatrix},\ \theta : t \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Donc F est le sous-espace vectoriel engendré par φ, ψ, θ. On montre qu'il est de dimension 3 en montrant que la famille précédente est libre. Soit (a,b,c) tels que $a\varphi + b\psi + c\theta = 0_E$. Alors, si b était non nul, la première coordonnée serait équivalente à be^t en $+\infty$, absurde (car elle est nulle). Donc $b = 0$. De même, en regardant en $-\infty$, $c = 0$. Et on conclut ensuite que $a = 0$. Donc (φ, ψ, θ) est libre, donc $\dim(F) = 3$.

2. Trouver $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall f \in F, f'(t) = Mf(t)$.

Correction

Soit $f \in F$. Alors on dispose de (a,b,c) tels que pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{pmatrix} be^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix}$$

On en déduit alors que

$$f'(t) = \begin{pmatrix} be^t - ce^{-t} \\ -be^t \\ -ce^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} be^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix}$$

3. M est-elle inversible ?

Correction

On remarque que $C_3 = -2C_2$ donc la matrice M n'est pas inversible.

4. Quelles sont les valeurs propres de M ? Pouvait-on s'y attendre ?

Correction

On sait déjà que 0 est valeur propre. De plus, M n'est ni la matrice nulle, ni de rang 1, donc M est de rang 2, donc $E_0(M)$ est de dimension 1.
Ensuite, on sait que la somme des valeurs propres de M vaut la trace de M, donc, ici, elle vaut $3-1-2=0$. Donc M possède deux autres valeurs propres opposées, λ et $-\lambda$.
Enfin, on remarque que $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, donc -1 est valeur propre de A. Donc 1 est valeur propre de A aussi.
On pouvait s'y attendre car une base de F est (φ, ψ, θ), et

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{0t}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \text{ vecteur propre associé à } 0,$$

$$\psi(t) = \mathrm{e}^{1\times t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \text{ vecteur propre associé à } 1,$$

$$\theta(t) = \mathrm{e}^{-1\times t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ vecteur propre associé à } -1.$$

Exercice 2. On considère $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction

On note $f(x,t) = \cos(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}$. On veut appliquer un théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre.

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \cos(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\left|\cos(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$, intégrable en $+\infty$ donc $t \mapsto \cos(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
- pour tout t dans $[0, +\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2t\sin(2xt)\mathrm{e}^{-t^2},$$
- pour tout x dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0, +\infty[$,
- pour tout t dans $[0, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R}$,
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 2t\mathrm{e}^{-t^2},$$
indépendante de x et intégrale sur $[0, +\infty[$ (car continue sur $[0, +\infty[$ et $\underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc intégrable en $+\infty$).

Donc, d'après le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par F.

Correction

Par la question précédente, on en déduit que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -2t\sin(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}dt.$$

On effectue alors une intégration par parties, en posant $u(t) = \sin(2xt)$, $u'(t) = 2x\cos(2xt)$, $v(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$, $v'(t) = -2t\mathrm{e}^{-t^2}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[\sin(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x\cos(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}dt \\ &= -2xF(x), \end{aligned}$$

donc $F'(x) + 2xF(x) = 0$.

3. En déduire l'expression de F. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction

Par la question précédente, on dispose alors de C dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$F(x) = C\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Mais $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc pour tout x dans $\mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$.

Exercice 3. Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Correction

On sait que $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car $t^2\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Correction

Notons $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Effectuons une intégration par parties, en posant $u(t) = \dfrac{1}{t}$, donc $u'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$, $v(t) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}$ donc $v'(t) = t\mathrm{e}^{-t^2}$. Ainsi, comme le crochet $u(t)v(t)$ converge bien, on a

$$R(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}dt.$$

Mais

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}dt \leqslant \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{x^2}dt = \frac{R(x)}{2x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o(R(x)).$$

Ainsi, on a

$$\frac{e^{-x^2}}{2x} \underset{x\to+\infty}{=} R(x) + o(R(x)),$$

donc

$$R(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

2.2 Eva Chaudanson

Exercice 4. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, g à valeurs dans $[0,1]$ et f décroissante. Montrer que $\int_{b-c}^{b} f \leqslant \int_a^b fg \leqslant \int_a^{a+c} f$ où $c = \int_a^b g$.
Indication : on pourra introduire une fonction d'une variable bien choisie.

Correction

On pose

$$\varphi(x) = \int_a^{a+c(x)} f - \int_a^x fg, \text{ où } c(x) = \int_a^x g.$$

Alors

$$\varphi(x) = F(a + c(x)) - F(a) - H(x) + H(a),$$

où F est une primitive de f et H est une primitive de fg. On en déduit que φ est dérivable et que pour x dans $[a,b]$,

$$\varphi'(x) = c'(x)F'(a + c(x)) - H'(x) = g(x)f(a + c(x)) - f(x)g(x).$$

Or, g est à valeurs dans $[0,1]$, donc $c(x)$ est à valeurs dans $[0, x-a]$, donc $a + c(x)$ est à valeurs dans $[a,x]$. En particulier, $f(a + c(x)) - f(x) \geqslant 0$, donc $\varphi'(x) \geqslant 0$. Donc φ croît.
Comme $\varphi(a) = 0$, on en déduit que pour tout x dans $[a,b]$, $\varphi(x) \geqslant 0$, d'où l'inégalité de droite !
On fait de même pour l'inégalité de gauche, mais en changeant le a en variable y.

Exercice 5. Soit $(E, <|>)$ un espace euclidien. Pour $X_1, \ldots, X_p$ dans E, $G(X_1, \ldots, X_p)$ désigne la matrice de coefficient $G_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle$.

1. Montrer que : G est inversible $\Longleftrightarrow (X_1, \ldots, X_p)$ est libre.

Correction

$G(x_1, \ldots, x_p) = 0$ si et seulement s'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que les colonnes de la matrice vérifient $\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_p C_p = 0$, i.e. ssi

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \lambda_1 \langle x_i, x_1 \rangle + \cdots + \lambda_p \langle x_i, x_p \rangle = 0.$$

Nommons $u = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k$. Alors $G(x_1, \ldots, x_p) = 0$ ssi pour tout i dans $[\![1,p[\![$, $\langle x_i, u \rangle = 0$ i.e., comme $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base, pour tout y de E, $\langle y, u \rangle = 0$, i.e. ssi $u = 0$, i.e. $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée. (remarquez, la double implication est plus digeste).

2. Montrer que $\mathrm{rg}(G) = \mathrm{rg}(X_1, \ldots, X_p)$.

Correction

Notons $r = \mathrm{rg}(X_1, \dots, X_p)$. Ceci signifie que l'on dispose d'une famille de r vecteurs parmi $(X_1, \dots, X_p)$ qui est libre mais que toute sous-famille de $r+1$ vecteurs est liée. Supposons sans perte de généralités que $(X_1, \dots, X_r)$ est libre. Alors

- toute sous-famille de $r+1$ éléments est liée donc, par le même argument que la question précédente, toute sous-famille de $r+1$ colonnes de G est liée,
- la famille $(X_1, \dots, X_r)$ est libre donc la famille $C_1, \dots, C_r$ des colonnes de G est libre, **car** la matrice $r \times r$ $(\langle X_i, X_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant \boxed{r}}$ est inversible.

Donc $\mathrm{rg}(G) = r$.

3. (question ajoutée) Montrer que lorsque $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ est libre, on a $G(X_1, \dots, X_p) > 0$.

Correction

Par la propriété précédente, $\det(\mathscr{G}(x_1, \dots, x_p)) = \det(M^T M) = \det(M)^2 \geqslant 0$, et même > 0 si la famille est libre.

4. (question ajoutée) On suppose le système $(X_1, \dots, X_p)$ libre. Soit z le projeté orthogonal d'un vecteur y sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_p)$. Montrer que $\|y - z\|^2 = \dfrac{G(y, X_1, \dots, X_p)}{G(X_1, X_2, \dots, X_p)}$.

Correction

Soit p la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p)$. Alors la distance cherchée est $\|y-p(y)\|$. Posons $u=y-p(y)$. Or, $p(y)=\sum_{i=1}^{p}\langle y,e_i\rangle\, e_i$. Donc $\langle p(y),e_k\rangle=\langle y,e_k\rangle$ pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, donc pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, $\langle u,e_k\rangle=0$. Donc

$$G(x_1,\dots,x_p,y)=\begin{vmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle & \cdots & \langle x_1,x_n\rangle & \langle x_1,y\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \langle x_n,x_1\rangle & \langle x_n,x_2\rangle & \cdots & \langle x_n,x_n\rangle & \langle x_n,y\rangle\\ \langle y,x_1\rangle & \langle y,x_2\rangle & \cdots & \langle y,x_n\rangle & \langle y,y\rangle\end{vmatrix}$$

Or, $\langle x_k,y\rangle=\langle x_k,p(y)\rangle$ et $\|y\|^2=\|p(y)\|^2+\|u\|^2$, d'où

$$G(x_1,\dots,x_p,y)=\begin{vmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle & \cdots & \langle x_1,x_n\rangle & \langle x_1,p(x)\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \langle x_n,x_1\rangle & \langle x_n,x_2\rangle & \cdots & \langle x_n,x_n\rangle & \langle x_n,p(x)\rangle\\ \langle p(x),x_1\rangle & \langle p(x),x_2\rangle & \cdots & \langle p(x),x_n\rangle & \|p(x)\|^2+\|u\|^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle & \cdots & \langle x_1,x_n\rangle & \langle x_1,p(x)\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \langle x_n,x_1\rangle & \langle x_n,x_2\rangle & \cdots & \langle x_n,x_n\rangle & \langle x_n,p(x)\rangle\\ \langle p(x),x_1\rangle & \langle p(x),x_2\rangle & \cdots & \langle p(x),x_n\rangle & \|p(x)\|^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle & \cdots & \langle x_1,x_n\rangle & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \langle x_n,x_1\rangle & \langle x_n,x_2\rangle & \cdots & \langle x_n,x_n\rangle & 0\\ \langle p(x),x_1\rangle & \langle p(x),x_2\rangle & \cdots & \langle p(x),x_n\rangle & \|u\|^2\end{vmatrix}.$$

Le premier des deux déterminants est nul car $p(x)\in\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p)$, et, en développant le second selon la dernière colonne, on obtient

$$G(x_1,\dots,x_p,y)=\|u\|^2\,G(x_1,\dots,x_p),$$

d'où le résultat.

2.3 Nathan Couëdel

Exercice 6. Soit $(E,<|>)$ un espace euclidien et F une partie fermée, non vide et convexe de E. Pour $x\in E$ on pose $d(x)=\inf\limits_{f\in F}\|x-f\|$ et $\Gamma(x)=\{f\in F,\|x-f\|=d(x,F)\}$.

1. Caractériser l'ensemble des x tels que $d(x)=0$.

Correction

Déjà, si $x\in F$, $d(x)=0$. Montrons la réciproque.
Soit x tel que $d(x)=0$. Alors par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on dispose de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F telle que $\|x-f_n\|\underset{n\to+\infty\to0}{\longrightarrow}$, donc $f_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}x$.
Mais comme f est fermé, $x\in F$.

2. Montrer que $\Gamma(x)$ est non vide. En déduire que d est 1-lipschitzienne.

Correction

- **Montrons que** $\Gamma(x)$ **est non vide.** Soit $x\in E$. On considère l'application $\varphi: f\mapsto\|x-f\|$. Si F était borné on pourrait directement appliquer le théorème des bornes atteintes et dire que cette application atteint un minimum sur F, ce qui signifierait que la distance de x à F est bien atteinte en un point.
  On va ruser. On considère $F'=F\cap B(x,d(x)+1)$. Alors F' est **fermé** car c'est une

intersection de deux fermés, **borné** car la boule est bornée, en **dimension finie.** Il reste à montrer que F' est **non vide**. Pour ce faire, on remarque que par définition de la borne inférieure, et comme $d(x)+1>d(x)$, on dispose de $f \in F$ tel que $\|f-x\| \leqslant d(x)+1$ donc tel que $f \in F'$.
Ainsi, F' est non vide. La fonction φ étant continue sur F', elle y est bornée et atteint ses bornes par le théorème des bornes atteintes.
Donc $\Gamma(x)$ est non vide.

- **Montrons que d est lipschitzienne.** Soient x et y dans E, soit $f \in \Gamma(x)$ et $g \in \Gamma(y)$. Alors

$$d(x)=\|x-f\|=\|x-y+y-f\| \leqslant \|x-y\|+\|y-f\| \leqslant \|x-y\|+d(y),$$

donc
$$d(x)-d(y) \leqslant \|x-y\|.$$
De même, $d(y)=\|y-g\| \leqslant \|x-y\|+\|x-g\| \leqslant \|x-y\|+d(x)$. On en déduit donc que
$$|d(x)-d(y)| \leqslant \|x-y\|,$$

ce qui est le caractère lipschitzien recherché.

3. En utilisant une identité relative à la norme, montrer que :

$$\forall (f,f') \in \Gamma(x)^2, f \neq f' \text{ et } \left\|\frac{1}{2}(f+f')-x\right\|^2 < d(x)^2.$$

Correction

C'est semi-honnête (comme souvent aux Mines), il faut penser à l'identité du parallélogramme (qui se démontre en développant tout) :

$$\|a+b\|^2+\|a-b\|^2=2\|a\|^2+2\|b\|^2.$$

Ici, on le fait avec $a=x-f$ et $b=x-f'$. Alors $\|a\|=\|b\|=d(x)$! On obtient alors

$$4d(x)^2=\|2x-(f+f')\|^2+\|f-f'\|^2<\|2x-(f+f')\|^2 \text{ car } f \neq f'.$$

On en déduit le résultat.

4. Montrer que $\Gamma(x)$ est réduit à un seul élément, que l'on notera $p(x)$.

Correction

Par la question précédente, s'il existe deux éléments f et f' distincts dans $\Gamma(x)$, alors, en notant $g=\dfrac{f+f'}{2}$, on a $g \in F$ car F est convexe et

$$\|x-g\|<d(x),$$

ce qui est absurde étant donnée la définition de d. Donc Γ est réduit à un seul élément.

5. Montrer que $p(x)$ est caractérisé par : $\forall y \in F, < x-p(x) \mid y-p(x) > \leqslant 0$.

Correction

Il**faut** faire un dessin : quand on en fait un, on voit que la convexité est fondamentale. Soit $t \in [0,1]$. Alors pour $ty + (1-t)p(x) \in F$ et

$$\|x - p(x)\|^2 \leqslant \|x - ty - (1-t)p(x)\|^2$$

On en déduit que

$$\langle x - p(x) + x - ty - (1-t)p(x), ty + (1-t)p(x) - p(x)\rangle \leqslant 0,$$

d'où

$$\langle 2x - 2p(x) + t(p(x) - y), t(y - p(x))\rangle \leqslant 0.$$

En prenant $t > 0$, on obtient

$$\langle 2x - 2p(x) + t(p(x) - y), y - p(x)\rangle \leqslant 0.$$

Puis, en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\langle 2x - 2p(x), y - p(x)\rangle \leqslant 0.$$

D'où le résultat désiré.

Exercice 7. Soit (E) l'équation différentielle : $x^2y'(x) + y(x) = x^2$.

1. Montrer que (E) n'admet pas de solution développable en série entière.

Correction

Supposons que (E) admette une solution f développable en série entière. On disposerait d'une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'un réel $r > 0$ tels que pour tout x dans $]-r, r[$,

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n.$$

Alors f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$. On calcule alors

$$\begin{aligned}
x^2f'(x) + f(x) &= x^2 \sum_{n\geqslant 0} na_nx^{n-1} + \sum_{n\geqslant 0} a_nx^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} na_nx^{n+1} + \sum_{n\geqslant 0} a_nx^n \\
&= \sum_{n\geqslant 1} (n-1)a_{n-1}x^n + a_0 + \sum_{n\geqslant 1} a_nx^n \\
&= a_0 + \sum_{n\geqslant 1} \left((n-1)a_{n-1} + a_n\right) x^n.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, si f est solution de l'équation différentielle, alors

- $a_0 = 0$,
- $((1-1)a_0 + a_1) = 0$ donc $a_1 = 0$,
- $(a_1 + a_2) = 1$ donc $a_2 = 1$,
- pour tout $n \geqslant 3$, $(n-1)a_{n-1} + a_n = 0$ donc $a_n = -(n-1)a_{n-1}$.

On en déduit par récurrence immédiate que

$$\forall n \geqslant 2,\ a_n = (-1)^n (n-1)! a_2.$$

Mais alors pour tout $n \geqslant 2$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est nul, donc l'équation différentielle n'admet pas de solution développable en série entière.

2. Résoudre l'équation différentielle sur $[0, +\infty[$.

Correction

Déjà, sur $]0, +\infty[$, L'équation différentielle se réécrit

$$y' + \frac{1}{x^2} y = 1.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est l'ensemble des $\{x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},\ C \in \mathbb{R}\}$. Pour trouver l'ensemble des solutions, on considère φ une fonction $\mathscr{C}^1$, et on note $f(x) = \varphi(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. Alors on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f' + \frac{1}{x^2} f = 1 &\Leftrightarrow \varphi'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \\ &\Leftrightarrow \exists C > 0,\ \varphi(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} dt + C \\ &\Leftrightarrow \exists C > 0 <\ f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} dt + C\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

l'intégrale étant bien définie car l'intégrande est prolongeable par continuité en 0.

3. Montrer qu'il existe une unique solution à l'équation tendant vers 0 en 0^+.

Correction

Il faut déterminer si $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} dt$ possède bien une limite finie en 0^+. On écrit que, par croissance de $t \mapsto -\frac{1}{t}$,

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} dt \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} dt = x \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Donc (par analyse-synthèse) l'unique solution tendant vers 0 en 0 est $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} dt$. (on a dû prendre $C = 0$).

2.4 Liv Craen

Exercice 8. Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ représentant un projecteur p dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On suppose P de rang r et l'on considère l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\Psi(X) = PX - XP.$$

Déterminer la trace de Ψ en fonction de n et r.

Correction

Déjà, P est un projecteur de rang r, donc on dispose de Q inversible telle que $P = QJ_rQ^{-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\Psi(X) &= QJ_rQ^{-1}X - XQJ_rQ^{-1} \\ &= QJ_rQ^{-1}XQQ^{-1} - QQ^{-1}XQJ_rQ^{-1} \\ &= Q\left(J_r(Q^{-1}XQ) - (Q^{-1}XQ)J_r\right)Q^{-1} \\ &= \alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}(X),\end{aligned}$$

où $\alpha : X \mapsto QXQ^{-1}$, $\alpha^{-1} : X \mapsto Q^{-1}XQ$ et $\varphi : X \mapsto J_rX - XJ_r$.
Mais alors, on en déduit que

$$\mathrm{Tr}(\Psi) = \mathrm{Tr}(\alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}) = \mathrm{Tr}(\alpha^{-1} \circ \alpha \circ \varphi) = \mathrm{Tr}(\varphi).$$

Il nous reste donc à déterminer la trace de φ. Pour ce faire, on va regarder sur la base canonique : soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

- si $i \leqslant r$ et $j \leqslant r$, $J_rE_{ij} = E_{ij}$ et $E_{ij}J_r = E_{ij}$ donc $\varphi(E_{ij}) = 0_n$,
- si $i \leqslant r$ et $j > r$, $J_rE_{ij} = E_{ij}$ mais $E_{ij}J_r = 0$ donc $\varphi(E_{ij}) = E_{ij}$ (cela apporte un coefficient 1 sur la diagonale,
- si $i > r$ et $j \leqslant r$, $J_rE_{ij} - E_{ij}J_r = -E_{i,j}$, ce qui apporte un coefficient -1 sur la diagonale,
- si $i > r$ et $j > r$, $J_rE_{ij} = E_{ij}J_r = 0_n$ donc $\varphi(E_{ij}) = 0$.

Ainsi, la diagonale de la matrice de φ dans la base canonique contient $r^2 + (n-r)^2$ zéros, $r(n-r)$ « 1 » et $r(n-r)$ « -1 », donc la trace de cette matrice est nulle ! Donc $\mathrm{Tr}(\Psi) = 0$.*(tout ça pour ça !)*

Exercice 9. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement monotone, telle que $f \circ f = 2f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

1. Montrer que f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Correction

Déjà, si f était strictement décroissante, on aurait $f \circ f$ croissante, absurde car $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est strictement décroissante.

Ensuite, on sait que f admet une limite ℓ en $+\infty$, cette limite étant dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
On en déduit que $f \circ f$ admet une limite $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$: si $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell' = f(\ell)$ par continuité. Si $\ell = +\infty$, $\ell' = +\infty$.
Mais alors nécessairement $\ell = +\infty$ car sinon $2f(x) - x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc $\ell' = -\infty$, ce qui serait absurde. Donc $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
De même, $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$ (par des arguments symétriques).
On en déduit, par le théorème des valeurs intermédiaires, que f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. On pose $f_0 = f$ et $f_{n+1} = f \circ f_n$. Montrer que $\dfrac{1}{n} f_n$ admet une limite, que l'on précisera.

Correction

On calcule

- $f_1 = f \circ f = 2f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$,
- $f_2 = f \circ f_1 = f \circ f \circ f = 2f \circ f - f = 4f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} - f = 3f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$,
- de manière générale,

$$f_{n+1} = f \circ f \circ f_{n-1} = 2f \circ f_{n-1} - f_{n-1} = 2f_n - f_{n-1}.$$

On fixe alors $x \in \mathbb{R}$. Alors $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$f_{n+1}(x) - 2f_n(x) + f_{n-1}(x) = 0,$$

d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$, donc on dispose de (λ, μ) tels que

$$f_n(x) = \lambda + \mu n$$

On a alors $\lambda = f_0(x) = f(x)$ et

$$\mu = f_1(x) - \lambda = 2f(x) - x - f(x) = f(x) - x.$$

Ainsi, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n} f_n(x) = \frac{1}{n} f(x) + f(x) - x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) - x.$$

3. (question ajoutée) La limite précédente est-elle uniforme ?

Correction

Il faut étudier la fonction $g_n(x) = f_n(x) - f(x) + x = \dfrac{1}{n} f(x)$, qui n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$. Donc la limite trouvée précédemment n'est pas uniforme.

2.5 Niels Descourvières

Exercice 10. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{e}^{-xt} \, \mathrm{d}t$

1. Déterminer le domaine de définition I de F.

Correction

Déjà, si $x < 0$, $\dfrac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{e}^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc l'intégrale ne converge pas.

Ensuite, si $x = 0$, $\dfrac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{e}^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\sim} t$, non intégrable en $+\infty$.

Enfin, si $x > 0$:

- $t \mapsto \dfrac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$,
- $\dfrac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{e}^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\sim} t\mathrm{e}^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, intégrable en $+\infty$ par comparaison à une intégrale de référence.

Donc F est définie sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$.

2. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur I et donner son sens de variation.

Correction

Il s'agit d'appliquer un théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre. Notons pour tout $x>0$ et $t \geqslant 0$, $f(x,t) = \dfrac{t^3}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{e}^{-xt}$. Alors

- pour tout $x>0$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux, et intégrable,
- pour tout $t \geqslant 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^4}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{e}^{-xt}.$$
- soient $0<a<b$, x dans $[a,b]$ et $t \geqslant 0$. Alors
$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| &= \frac{t^4}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{e}^{-xt}\\ &\leqslant= \frac{t^4}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{e}^{-at},\end{aligned}$$
indépendante de x et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car égal à $o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$).

Donc, par le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, donc, comme a et b ont été choisis arbitraires sur $]0,+\infty[$, $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$,
$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{t^4}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{e}^{-xt}dt < 0,$$
donc F décroît.

3. Déterminer les limites de F aux bornes de I.

Correction

En $+\infty$, on applique un théorème de convergence dominée à paramètre continu :

- pour tout $x>0$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$,
- pour tout $t \geqslant 0$, $f(x,t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
- pour tout $t \geqslant 0$ et $x>1$,
$$|f(x,t)| \leqslant \frac{t^4}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{e}^{-t},$$

intégrable et indépendante de x. Donc, par le théorème de la double limite, $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ensuite, pour la limite en 0, on veut dire que F va tendre vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}}dt = +\infty$...

Pour ce faire, on minore
$$\begin{aligned}F(x) &\geqslant \int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\\ &=_{u=xt} \frac{1}{x^4}\int_0^{+\infty} u^3\mathrm{e}^{-u}du\\ &= \frac{6}{x^4} \underset{x\to0}{\longrightarrow} +\infty,\end{aligned}$$

(le calcul s'est fait avec 3 IPP que l'on n'a pudiquement pas faites). D'où la limite désirée.

4. Calculer $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$.

Correction

On a essentiellement fait le calcul (avec 3 IPP) :

$$G(x) = \frac{6}{x^4}.$$

5. Montrer que $F(x) \sim \dfrac{6}{x^4}$ quand x tend vers $+\infty$. (On pourra majorer $|F - G|$)

Correction

Le but est de démontrer que $|F(x) - G(x)| \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$. On calcule, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
G(x) - F(x) &= \int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-xt} - \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{e}^{-xt}dt \\
&= \int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sqrt{1+t^4}-1}{\sqrt{1+t^4}}dt \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-xt}\frac{\frac{t^4}{2}}{\sqrt{1+t^4}}dt \text{ car, par concavité, } \sqrt{1+a} \leqslant 1 + \frac{a}{2} \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} \frac{t^7}{2}\mathrm{e}^{-xt}dt \\
&=_{u=xt} \frac{1}{x^8}\int_0^{+\infty}\frac{u\mathrm{e}^{-u}}{2}du \\
&\underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^4}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat désiré.

Exercice 11. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des vaiid suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On considère $U = (X_1, \ldots, X_n)$ et $M = U^\top U$.

1. Déterminer la loi de $\mathrm{rg}(M)$ et celle de $\mathrm{tr}(M)$.

Correction

C'est une chose importante, on sait que toute matrice de la forme $U^\top V$ est de rang inférieur ou égal à 1. Donc $\mathrm{rg}(M) = 0$ ou 1. Or, M est de rang 0 si et seulement si $M = 0$, i.e. si et seulement si tous les coefficients de U sont nuls. Donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{rg}(M) = 0) = \mathbb{P}(U = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_n = 0) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = 0) = (1-p)^n,$$

par indépendance. Donc $\mathrm{rg}(M)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1-p)^n$.

2. Calculer la probabilité que M soit une matrice de projection.

Correction

Deuxième chose importante sur les matrices de rang 1 : elles vérifient $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$. On le vérifie ici :

$$M^2 = U^\top \underbrace{UU^\top}_{\in\mathbb{R}} U = U^\top(UU^\top)U = (UU^\top)M = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) M.$$

Donc $M^2 = M$ si et seulement si :

(a) ou bien touts les X_i sont nuls,

(b) ou bien un seul des X_i est non nul :

$$\mathbb{P}(X_1 \neq 0, X_2 = \cdots = X_n = 0) = p(1-p)^{n-1},$$

et les événements $(\{X_i \neq 0\} \cap \{\forall j \neq i,\ X_j = 0\})_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont disjoints, donc la probabilité qu'un seul des X_i soit non nul est de $np(1-p)^{n-1}$.

D'où, au final, une probabilité de

$$(1-p)^n + np(1-p)^{n-1} = (1+(n-1)p)(1-p)^{n-1}.$$

2.6 Frédéric Hor

Exercice 12. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la suite de fonctions définie par, pour tout n dans $\mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^a}\mathrm{e}^{inx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour quelles valeurs de a la série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$? On suppose cette condition remplie dans la suite et l'on pose : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Correction

Distinguons les cas :

- si $a > 0$, alors $\left|\mathrm{e}^{-n^a}\mathrm{e}^{inx}\right| = \mathrm{e}^{-n^a} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc, par comparaison à une série de Riemann, la série numérique $\sum \mathrm{e}^{-n^a}\mathrm{e}^{inx}$ converge absolument donc converge, ce quelle que soit la valeur de x,
- si $a \leqslant 0$, alors, pour $x = 0$, $f_n(0) = \mathrm{e}^{-n^a}$, qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$, donc la série diverge grossièrement.

Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si $a > 0$. Dans ce cas, elle converge même normalement.

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $S^{(k)}(0)$.

Correction

Il s'agit d'appliquer un théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série de fonctions. On remarque que :

- pour tout k dans $\mathbb{N}$, pour tout n dans $\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ et

$$f_n^{(k)}(x) = \mathrm{e}^{-n^a}(in)^k\mathrm{e}^{inx},$$

- pour k et n entiers naturels,

$$|f_n^{(k)}(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-n^a} n^k \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n^2),$$

donc $\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty$ est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et

$$S^{(k)}(0) = \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n^a}(in)^k$$

3. En utilisant le théorème de Fubini, montrer que pour $a > 1$, S est développable en série entière en 0.

Correction

C'est une mauvaise question, car le théorème de Fubini n'est utilisé que dans le cadre de la théorie des probabilités...
On veut savoir si la série de terme général

$$\frac{S^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

converge pour x suffisamment proche de 0. Pour ce faire, on va démontrer que la famille $\left(\frac{\mathrm{e}^{-n^a}(in)^k}{k!}x^k\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. On calcule

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0}\left|\frac{\mathrm{e}^{-n^a}(in)^k}{k!}x^k\right| &= \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0}\frac{\mathrm{e}^{-n^a}n^k}{k!}|x|^k \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\mathrm{e}^{-n^a}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(|x|n)^k}{k!} \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\mathrm{e}^{-n^a+|x|n}\end{aligned}$$

Or, quel que soit x, comme $a > 1$, $\mathrm{e}^{-n^a+|x|n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n^2)$ donc $\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{e}^{-n^a+|x|n} < +\infty$.

Donc la famille $\left(\frac{\mathrm{e}^{-n^a}(in)^k}{k!}x^k\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{S^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

converge pour tout x réel, donc la série de Taylor de S converge quel que soit x, donc S est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 13. Soit p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien.

1. Montrer que $u = p - q$ est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(u) \subset [-1, 1]$.

Correction

On sait que p et q sont des projecteurs orthogonaux, donc ils sont autoadjoints (question de cours). Donc $p-q$ est aussi autoadjoint car pour tous x et y,

$$\langle (p-q)(x), y\rangle = \langle p(x)-q(x), y\rangle = \langle p(x), y\rangle - \langle q(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle - \langle x, q(y)\rangle = \langle x, (p-q)(y)\rangle .$$

Donc par le théorème spectral, $p-q$ est diagonalisable en base orthonormée. Soit désormais x un vecteur propre unitaire, λ la valeur propre associée. Alors

$$\lambda = \langle u(x), x\rangle = \langle p(x), x\rangle - \langle q(x), x\rangle .$$

Or, pour un endomorphisme symétrique s, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, on a (E) $\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle s(x), x\rangle \leqslant \lambda_n \|x\|^2$. Donc $\langle p(x), x\rangle \in [0,1]$ et $-\langle q(x), x\rangle \in [-1,0]$. Donc $\lambda \in [-1,1]$.

2. Déterminer $\operatorname{Ker}(u+\mathrm{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$.

Correction

Soit $x \in \operatorname{Ker}(u+\mathrm{Id}_E)$. Alors $p(x)-q(x) = -x$. Donc

$$-\|x\|^2 = \langle p(x), x\rangle - \langle q(x), x\rangle \geqslant 0\,\|x\|^2 - \|x\|^2 .$$

Comme on a égalité dans (E), on a $x \in \ker(p)$ et $x \in \ker(q-\mathrm{Id}_E)$. (c'est aussi fait en cours) Donc $x \in \ker(p) \cap \ker(q-\mathrm{Id}_E)$.
Réciproquement, un tel x est bien dans $\operatorname{Ker}(u+\mathrm{Id}_E)$.
Pour $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$, on trouve de la même manière $\ker(p-\mathrm{Id}_E) \cap \ker(q)$.

2.7 Fleurine Jaegler

Exercice 14. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs et, pour $n \geqslant 1$, $y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \dots + \sqrt{x_n}}}$.

Correction

On remarque que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante !

1. Étudier la convergence de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Correction

Ici $y_{n+1} = \sqrt{a+y_n}$. Soit ℓ la racine positive de l'équation $\ell^2 - \ell - a = 0$ i.e.

$$\ell = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

On remarque que $y_1 = \sqrt{a} \leqslant \ell$ et on montre par récurrence $y_n \leqslant \ell$. La suite (y_n) est croissante et majorée donc convergente.

2. Étudier la convergence de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $x_n = ab^{2^n}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

Correction

On observe que la nouvelle suite (y_n) est désormais égale à b fois la précédente, elle est donc convergente.

3. Montrer que la suite (y_n) converge si et seulement si la suite $\left(x_n^{1/2^n}\right)$ est bornée.

Correction

Si (y_n) converge vers ℓ alors $x_n^{2^{-n}} \leqslant y_n \leqslant \ell$ donc $\left(x_n^{2^{-n}}\right)$ est bornée. Si $\left(x_n^{2^{-n}}\right)$ est bornée par une certain M alors $x_n \leqslant M^{2^n}$, la suite (y_n) définie par (x_n) est alors inférieure à celle obtenue par $\left(M^{2^n}\right)$, cette dernière étant convergente, la suite (y_n) converge.

Exercice 15. Soit $A \in {}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\mathrm{rg}(A) = 2, \mathrm{tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0_n$. Montrer que A est diagonalisable.

Correction

On sait que A possède 0 comme valeur propre, et que $E_0(A)$ est de dimension $n-2$.
Le polynôme caractéristique de A s'écrit donc $\chi_A(X) = X^{n-2}(X-a)(X-b)$ avec a et b à déterminer.
Si on avait $a = b = 0$, comme, par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$, on aurait $A^n = 0$.
Donc a ou b est non nul. Mais comme $\mathrm{Tr}(A) = 0$, $0 + 0 + \cdots + 0 + a + b = 0$ donc $b = -a$.
Donc a **et** b sont non nuls et sont distincts.
Donc a et b sont deux valeurs propres distinctes de A, et leurs espaces propres associés sont des droites. Donc, comme $n - 2 + 1 + 1 = n$, on en déduit que A est diagonalisable.

2.8 Marius Le Goff

Exercice 16. Pour $n \geqslant 2$, on s'intéresse à l'équation $\mathrm{e}^x - x^n = 0$.

1. Montrer que cette équation admet exactement 2 solutions positives u_n et v_n, avec $u_n < v_n$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Soit $n \geqslant 2$. Soit $x > 0$. Alors on a l'équivalence

$$e^x - x^n = 0 \Leftrightarrow x = n \ln(x) \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}.$$

On étudie alors $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout x dans $]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2},$$

donc f' est nulle en e, strictement positive avant, strictement négative ensuite. Ainsi,

- sur $]0, e]$, f est continue, croît strictement, tend vers $-\infty$ en 0 et vaut $\frac{1}{e} > \frac{1}{n}$ en e. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, f prend une unique fois la valeur $\frac{1}{n}$ en $u_n \in]0, e]$.
- on fait de même sur $[e, +\infty[$ car $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 < \frac{1}{n}$.

D'où l'existence de u_n et de v_n, vérifiant de plus $u_n < e < v_n$.

2. (a) Montrer que u_n tend vers une limite L à déterminer.

Correction

Par la question précédente, f réalise une bijection de $]0, e]$ dans $\left]-\infty, \frac{1}{e}\right]$. Notons g la bijection réciproque associée. Alors

$$u_n = g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} g^{-1}(0) = 1,$$

par continuité de la bijection réciproque d'une fonction continue.

(b) Trouver un équivalent de $u_n - L$.

Correction

On sait que pour tout n,

$$\frac{\ln(u_n)}{u_n} = \frac{1}{n}.$$

On écrit $u_n = 1 + h_n$. Alors

$$\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + h_n)}{1 + h_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{h_n}{1},$$

donc $h_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

On pourrait même pousser le développement asymptotique...

3. Montrer que la suite (v_n) diverge.

Correction

On sait que f réalise une bijection de $[e, +\infty[$ dans $\left]0, \frac{1}{e}\right]$. On note φ la bijection associée.

Alors
$$v_n = \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
car $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 17. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $A_{i,j} = P(x+i+j-2)$. Montrer que A n'est pas inversible.

Correction

On note, pour i dans $[\![1,n]\!]$,
$$Q_i(X) = P(x+i+X-2).$$
Alors la famille $(Q_1,\dots,Q_n)$ est une famille de n vecteurs dans un espace de dimension $n-1$, donc elle est liée. Cette famille est liée : il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ vérifiant
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$
Mais alors, pour tout j, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(j) = 0_{\mathbb{R}}$, ce qui assure que, si $L_1,\dots,L_n$ sont les lignes de A, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0_{1,n}$. Ainsi, les lignes de A sont liées donc A n'est pas inversible.

2.9 Thomas Lesage

Exercice 18. On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\left(t^2+1\right)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Que vaut $f(0)$?

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\left(t^2+1\right)x^2}}{t^2+1}$ est continue sur $[0,1]$, donc $f(x)$ est bien définie.
Ensuite, si $x \in \mathbb{R}$, alors
$$f(-x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\left(t^2+1\right)(-x)^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\left(t^2+1\right)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = f(x),$$
donc f est paire.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

Correction

Il s'agit d'effectuer un théorème de dérivation des intégrales à paramètre. On note $h(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\left(t^2+1\right)x^2}}{t^2+1}$.

- pour tout x dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable.

- pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto h(x,t)$ est dérivable et
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2x\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}.$$
- soit $a > 0$. Pour tout x dans $[-a,a]$,
$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2a\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2} \leqslant 2a,$$
indépendante de x et intégrable sur $[0,1]$.

Donc, par le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, f est dérivable sur tout $[-a,a]$, donc sur $\mathbb{R}$ et pour tout x dans $\mathbb{R}$,
$$f'(x) = -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}dt.$$

3. Montrer que g est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction

Par le théorème fondamental du calcul intégral, g est une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ donc g est dérivable et pour tout x dans $\mathbb{R}$, $g'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, qui est continue, donc g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2g'(x)g(x)$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned} f'(x) = -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}dt & \\ &= -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2x^2}x\,dt \\ &=_{u=tx} -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}du \\ &= -2g'(x)g(x). \end{aligned}$$

5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - g(x)^2$.

Correction

On déduit de la question précédente, en intégrant, qu'il existe une constante C telle que pour tout x dans $\mathbb{R}$,
$$f(x) = -(g(x))^2 + C.$$
Or, $g(0) = 0$ et $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$, donc $C = \dfrac{\pi}{4}$. D'où le résultat !

6. En déduire la limite de g en $+\infty$ puis conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction

Il s'agit d'appliquer un théorème de convergence dominée à paramètre continu. On note toujours $h(x,t) = \dfrac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}dt$.

- pour tout x dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
- pour tout t dans $[0,1]$, $h(x,t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
- pour tout x dans $\mathbb{R}$ et t dans $[0,1]$,

$$|h(x,t)| \leqslant 1,$$

fonction intégrable sur $[0,1]$ **et indépendante de** x,

donc, d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 0dt = 0.$$

On en déduit que $(g(x))^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{4}$ et donc, par positivité de g, que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. On vient de calculer l'intégrale de Gauss !

Exercice 19. Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A représente une isométrie, déterminer sa nature et ses valeurs propres.

Correction

On remarque que les colonnes de A sont orthogonales et toutes de norme $\sqrt{\dfrac{1}{9}(4+4+1)} = 1$, donc A représente bien une isométrie.
Calculons le déterminant de A :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&=_{L_3\leftarrow L_3-L_1} \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} \\
&=_{L_1\leftarrow L_1+2L_2} \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

Donc A représente une isométrie directe. Donc A est une matrice de rotation. On détermine son axe. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned}
AX = X &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - z = 3x \\ -x + 2y + 2z = 3y \\ 2x + -y + 2z = 3z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \\ 2x + -y - z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ \quad -3y + 3z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \quad\quad 3y - 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ \quad\quad -y + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

On a donc déterminé l'axe de la rotation. Déterminons ensuite l'angle θ.

- On sait que $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta)$ donc $1 + 2\cos(\theta) = 2$ donc $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$, donc $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$.
- Ensuite, on prend $y \in \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^{\perp}$, par exemple $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On calcule

$$Ay = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  On calcule ensuite

$$\begin{aligned}
y \wedge Ay &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

  colinéaire à X avec un coefficient négatif, donc $\sin(\theta) \leqslant 0$.

Donc A représente la rotation par rapport à l'axe $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

2.10 Baptiste Rouard

Exercice 20. Soit $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \, dt$. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et l'on note R le rayon de convergence de cette série entière.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{2^n} \leqslant a_n \leqslant 1$. En déduire un encadrement de R.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout t dans $[0,1]$, on a l'encadrement

$$\frac{1}{2^n} \leqslant \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \leqslant 1.$$

En intégrant les inégalités, on en déduit $\dfrac{1}{2^n} \leqslant a_n \leqslant 1$. On en déduit que R est supérieur ou égal au rayon de convergence de $\sum 1.x^n$, c'est-à-dire 1, et inférieur au rayon de convergence de $\sum \dfrac{1}{2^n} x^n$, c'est-à-dire 2. Donc $1 \leqslant R \leqslant 2$.

2. Montrer que $(2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$a_{n+1} = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} dt.$$

Effectuons une intégration par parties en intégrant 1 en t et en dérivant $\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}$ en $(n+1)t\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \left[t\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 t(n+1)t\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \\
&= 1 - (n+1)\int_0^1 t^2 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \\
&= 1 - 2(n+1)\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \\
&= 1 - 2(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n,
\end{aligned}$$

d'où la relation de récurrence désirée.

3. En déduire que : $\forall x \in]-R, R[, \left(2x - x^2\right) f'(x) + (1-x)f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Correction

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Soit $x \in]-R, R[$. Alors

$$\begin{aligned}
\left(2x - x^2\right) f'(x) + (1-x)f(x) &= (2x - x^2)\sum_{n\geqslant 0} n a_n x^{n-1} + (1-x)\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \\
&= 2\sum_{n\geqslant 0} n a_n x^n - \sum_{n\geqslant 0} n a_n x^{n+1} + \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n - \sum_{n\geqslant 0} a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n\geqslant 0} 2n a_n x^n - \sum_{n\geqslant 1} (n-1) a_{n-1} x^n + \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n - \sum_{n\geqslant 1} a_{n-1} x^n \\
&= 1 + \sum_{n\geqslant 1} \left(2n a_n - (n-1)a_{n-1} + a_n - a_{n-1}\right) x^n \\
&= 1 + \sum_{n\geqslant 1} \left((2n+1)a_n - n a_{n-1}\right) x^n \\
&= 1 + \sum_{n\geqslant 1} 1 x^n \text{ par la question précédente} \\
&= \sum_{n\geqslant 0} x^n.
\end{aligned}$$

D'où le résultat demandé.

4. Trouver ainsi une expression de $f(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.

Correction

Il s'agit alors de résoudre l'équation différentielle

$$\left(2x - x^2\right) f'(x) + (1-x)f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

L'équation homogène est

$$(2x - x^2)y'(x) + (1-x)y(x) = 0,$$

c'est-à-dire pour $x \neq 0$,

$$y'(x) + \frac{1-x}{x(2-x)}y(x) = 0.$$

Résolvons déjà sur $]0, 1]$. On sait que l'on dispose de a, b réels tels que

$$\frac{1-x}{x(2-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2}.$$

En multipliant par x et en évaluant en 0, on obtient $a = \dfrac{1}{2}$. En multipliant par $x-2$ et en évaluant en 2, on obtient $b = \dfrac{1}{2}$. Or,

$$\int^x \frac{1}{2t} + \frac{1}{2(t-2)} dt = \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(2-x).$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto C e^{-\frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(2-x)},\ C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto \frac{C}{\sqrt{x(2-x)}},\ C \in \mathbb{R}\right\}.$$

On remarque que comme $t(t-2) \geqslant 0$ sur tout $]-1, 1[$, les solutions de l'équation homogène sur $]-1, 0[$ seront de la même forme. On cherche désormais une solution de l'équation non homogène. Soit φ une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$. Alors, en notant $g(x) = \varphi(x)\dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$, on sait que g est solution de l'équation non homogène si et seulement si

$$\varphi'(x)\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} = \frac{1}{(1-x)x(2-x)},$$

donc

$$\varphi'(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{x(2-x)}},$$

On veut calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1-t)\sqrt{t(2-t)}}dt$ (qui est bien définie car la fonction est intégrable en 0). On fait le changement de variables $u = 1-t$. Alors

$$\int_0^x \frac{1}{(1-t)\sqrt{t(2-t)}}dt = -\int_1^{1-x} \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}du = \int_{1-x}^1 \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}du.$$

On note $\varphi(u) = \sqrt{1-u^2}$. Alors $\varphi'(u) = -\dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}}$. Donc

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{(1-t)\sqrt{t(2-t)}}dt &= \int_{1-x}^1 \frac{u}{u^2\sqrt{1-u^2}}du.\\ &= -\int_{1-x}^1 \frac{1}{1-\varphi(u)^2}\varphi'(u)du\\ &= \int_1^{1-x} \frac{1}{1-\varphi(u)^2}\varphi'(u)du\\ &= \int_{\varphi(1)}^{\varphi(1-x)} \frac{1}{1-s^2}ds\\ &= \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+s}{1-s}\right|\right]_{\varphi(1)}^{\varphi(1-x)}\end{aligned}$$

Or, $\varphi(1) = 0$, donc

$$\int_0^x \frac{1}{(1-t)\sqrt{t(2-t)}}dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-(1-x)^2}}{1-\sqrt{1-(1-x)^2}}\right|.$$

On en déduit que

$$g : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x(2-x)}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-(1-x)^2}}{1-\sqrt{1-(1-x)^2}}\right|$$

est une solution particulière de l'équation différentielle.
Maintenant, pour trouver f, on remarque que g est la seule solution de l'équation différentielle prolongeable par continuité en 0. En effet, quand x tend vers 0,

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x(2-x)}}\left(\ln\left|1+\sqrt{1-(1-x)^2}\right| - \ln\left|1-\sqrt{1-(1-x)^2}\right|\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2\sqrt{x(x-2)}}\left(\sqrt{1-(1-x)^2}+\sqrt{1-(1-x)^2}+o\left(\sqrt{1-(1-x)^2}\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2x}}\sqrt{1-(1-x)^2}\\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} = 1,\end{aligned}$$

donc g est prolongeable par continuité en 0. Toutes les autres solutions de l'équation différentielle sur $]0,1[$ diffèrent de g de $\dfrac{C}{\sqrt{x(2-x)}}$, non prolongeable par continuité en 0. On en déduit donc que $f=g$.

5. Trouver une autre expression de $f(x)$ en montrant que : $\forall x \in]-1,1[$,

$$f(x)=\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(1+t^2)\,x}{2}\right)^n \mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{1}{1-\frac{(1+t^2)x}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

et en calculant cette intégrale.

Correction

On remarque que pour tout x de $]-1,1[$,

$$f(x)=\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n x^n dt.$$

On note, à x fixé, $\varphi_n(t)=\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n x^n$. On veut montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \varphi_n(t)dt = \int_0^1\sum_{n\geqslant 0}\varphi_n(t)dt$. On va appliquer le théorème d'intégration terme à terme :

- pour tout n dans $\mathbb{N}$, φ_n est continue,
- pour tout n dans $\mathbb{N}$, φ_n est intégrable sur I,
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1|\varphi_n(t)|dt \leqslant \sum_{n\geqslant 0}|x|^n<+\infty$,

donc, par le théorème d'intégration terme à terme,

$$\begin{aligned}
f(x)&=\int_0^1\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n x^n dt.\\
&=\int_0^1\frac{1}{1-\frac{(1+t^2)x}{2}}dt\\
&=\int_0^1\frac{2}{x}\frac{1}{\frac{2}{x}-1-t^2}dt\\
&=\frac{2}{x}\int_0^1\frac{dt}{a^2-t^2}dt \text{ où } a=\sqrt{\frac{2}{x}-1}\geqslant 1\\
&=\frac{2}{x}\frac{1}{2a}\left[\ln\left|\frac{a+t}{a-t}\right|\right]_0^1\\
&=\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\ln\left|\frac{a+1}{a-1}\right|\\
&=\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\ln\left|\frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{2-x}-1}\right|.
\end{aligned}$$

Exercice 21. Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E.

1. Montrer que $F\subset\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Correction

Soit x dans F. Soit $y \in F^\perp$. Alors $\langle x, y\rangle = 0$ donc $x \in (F^\perp)^\perp$.

2. Pour $E = \mathbf{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ et $F = \{P \in E, P(1) = P'(1) = 0\}$, déterminer $F^\perp$ et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Correction

On ne demande pas de vérifier que l'on a un produit scalaire ici.

Déterminons $F^\perp$. Soit Q dans $F^\perp$. Alors pour tout P dans F, $\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt = 0$. Considérons $Q(X) = (X-1)^2P(X)$. Alors $Q(1) = Q'(1) = 0$ car 1 est racine au moins double de Q. On en déduit que

$$\int_0^1 (t-1)^2 P(t)^2 dt = 0,$$

donc, comme $t \mapsto (t-1)^2P(t)^2$ est une fonction continue, positive, d'intégrale nulle, on en déduit que : $\forall t \in [0,1],\ (t-1)^2P(t)^2 = 0$. En particulier, P s'annule une infinité de fois (sur $[0,1[$) donc P est le polynôme nul.
Donc $F^\perp = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Ainsi, $(F^\perp)^\perp = E$.

3. Retour au cas général : donner une condition suffisante pour que $F = \left(F^\perp\right)^\perp$.

Correction

C'est du cours encore : il suffit que F soit de dimension finie. Si c'est le cas, on prend $(f_1, \ldots, f_p)$ une base orthonormée de F, et alors on a montré que $F \oplus (F^\perp) = E$, la somme étant orthogonale. Donc $F = (F^\perp)^\perp$.

2.11 Adrien Valette

(Exercice 10)

Exercice 22. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B.
On note $\mathbb{R}_{p-1}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]\}$.

1. Montrer que $B^2 = B$.

Correction

La suite $(A^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ étant extraite de $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$, elle converge vers la même limite, donc $A^{2k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} B$.
Mais

$$A^{2k} = (A^k) \times (A^k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} B \times B,$$

par **continuité du produit matriciel**, qui est **bilinéaire en dimension finie.**
Par **unicité de la limite**, on en déduit que $B^2 = B$.

2. On suppose désormais que A est diagonalisable avec p valeurs propres. En considérant une division euclidienne, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \in \mathbb{R}_{p-1}[A]$.

Correction

Comme A est diagonalisable avec p valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, on sait que A est annulée par $P(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$, qui est de degré p. Soit $k \in \mathbb{N}$. Effectuons la division euclidienne de X^k par P :

$$X^k = PQ + R, \text{ où } R \in \mathbb{R}_{p-1}[X].$$

En évaluant en A, on en déduit que

$$A^k = P(A)Q(A) + R(A) = R(A) \in \mathbb{R}_{p-1}[A].$$

D'où le résultat.

3. (ajouté) Démontrer que $B \in \mathbb{R}_{p-1}[A]$.

Correction

Comme $\mathbb{R}_{p-1}[A] = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, A, \dots, A^{p-1})$, $\mathbb{R}_{p-1}[A]$ est un **sous-espace vectoriel de dimension finie** de $\mathbb{R}[X]$, donc $\mathbb{R}_{p-1}[A]$ est **fermé.** Comme $A^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} B$ et, pour tout k, $A^k \in \mathbb{R}_{p-1}[A]$, on en déduit que $B \in \mathbb{R}_{p-1}[A]$.

2.12 Exos en plus (RMS, BEOS)

Exercice 23. Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E.

1. Soit (u_n) une suite qui converge dans (E, N_1). On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes. Montrer que (u_n) converge dans (E, N_2).

Correction

Comme N_1 et N_2 sont équivalentes, on dispose de α et β constantes positives telles que pour tout x dans E, $\alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$. Ainsi, si l'on note ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour la norme N_1, on sait que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$N_2(u_n - \ell) \leqslant \beta N_1(u_n - \ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_2.

2. On suppose que pour toute suite (u_n), on a : (u_n) converge dans (E, N_1) si et seulement si (u_n) converge dans (E, N_2). Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

Correction

Raisonnons par contraposée. Si N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, alors :

- ou bien pour tout $\alpha > 0$, il existe x dans E tel que $\alpha N_1(x) > N_2(x)$,
- ou bien pour tout $\beta > 0$, il existe x dans E tel que $N_2(x) > \beta N_1(x)$.

Supposons que la première proposition soit vérifiée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prenons $\alpha = \dfrac{1}{n}$. Alors on dispose de u_n dans E tel que $\dfrac{1}{n}N_1(u_n) > N_2(u_n)$, i.e. $N_1(u_n) > nN_2(u_n)$. Considérons alors $v_n = \dfrac{u_n}{\sqrt{n}N_2(u_n)}$. Alors

- $N_2(v_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$

- $N_1(v_n) > \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour N_2 mais pas pour N_1.
On ferait de même si la seconde proposition était vérifiée.
On en déduit le résultat demandé par contraposée.

3. On prend $E = \mathbb{R}[X]$, $a \in \mathbb{R}$ et $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t$. Montrer que, si $a, b \in [0,1]$, N_a et N_b sont équivalentes.

Correction

Soient a et b dans $[0,1]$, disons $a < b$. Alors on remarque que

$$\begin{aligned} N_b(P) &= |P(b)| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \left|P(a) + \int_a^b P'(t)dt\right| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant |P(a)| + \int_a^b |P'(t)|dt + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant |P(a)| + 2\int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2N_a(P). \end{aligned}$$

On ferait de Même dans l'autre sens et on aurait $N_a(P) \leqslant 2N_b(P)$.

4. Soit, pour $n \in \mathbb{N}, P_n = \dfrac{X^n}{2^n}$. Trouver les valeurs de a telles que (P_n) converge pour N_a et déterminer alors la limite.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

On va distinguer plusieurs cas :

- Si $|a| < 2$, alors
$$N_a(P_n) = \frac{|a|^n}{2^n} + \int_0^1 \frac{n}{2^n} t^{n-1} dt = \frac{|a|^n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc (P_n) converge pour N_a, et sa limite est nulle.
- Si $|a| > 2$, le même raisonnement que précédemment montre que $N_a(P_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc, comme une suite convergente est bornée, (P_n) ne converge pas pour N_a.
- Si $a = 2$, alors
$$N_a(P_n) = 1 + \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$
donc $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On remarque alors que
$$N_a(P_n - 1) = 0 + \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc (P_n) converge pour N_a, vers 1.
- Si $a = -2$, alors quel que soit Q dans $\mathbb{R}[X]$, on a
$$N_a(P_n - Q) \geqslant |P_n(-2) - Q(-2)| = |(-1)^n - Q(-2)|,$$
qui ne tend pas vers 0. Donc (P_n) ne converge pas pour N_a.

5. En déduire que N_a et N_b ne sont pas équivalentes si $0 \leqslant a < b$ et $b > 1$.

Correction

Si $0 \leqslant a < b$ et $b > 1$, on pose $P_n(X) = \frac{1}{b^n}$. Alors, par le même raisonnement que précédemment (valide car $\frac{1}{b^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, voilà pourquoi on avait besoin de $b > 1$), $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 pour N_b mais vers 0 pour N_a, ce qui montre que les deux normes ne sont pas équivalentes.

3 Concours Centrale-Supélec – Maths 1

3.1 Paul Benoit

Exercice 24. **1.** Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ puis celle de $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{n\ln(n)^{(1-\alpha)}}$.

Correction

Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$. Alors f est définie et décroissante sur $[2,+\infty[$, donc pour tout $n \geqslant 2$,
$$\frac{1}{n\ln(n)} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t\ln(t)} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)).$$
Or, la suite $(\ln(\ln(n)))_{n\geqslant 2}$ diverge donc la série de terme général $(\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)))_{n\geqslant 2}$ diverge. Ainsi, la série de terme général $\left(\dfrac{1}{n\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ diverge.
On conclut en disant que pour $\alpha > 0$, $1-\alpha < 1$ donc
$$\frac{1}{n\ln(n)^{1-\alpha}} \geqslant \frac{1}{n\ln(n)},$$
donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $\left(\dfrac{1}{n\ln(n)^{1-\alpha}}\right)_{n\geqslant 2}$ diverge.

Soit Φ une application décroissante et continue de $[n_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \Phi(n)$ diverge.

2. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \Phi(n)x^n$.

Correction

Déjà, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \Phi(n)$ diverge, donc le rayon de convergence de la série entière est inférieur ou égal à 1.
Ensuite, par décroissance de Φ, $\Phi(n) \leqslant \Phi(n_0)$ pour tout $n \geqslant n_0$. On en déduit que le rayon de convergence de la série est supérieur ou égal à celui de la série entière $\sum \Phi(n_0)x^n$, qui vaut 1.
Finalement, le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \Phi(n)x^n$ vaut 1.

3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \Phi(n)x^n \underset{x\to 1^-}{\to} +\infty$. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \Phi(n)x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \int_{n_0}^{+\infty} \Phi(t)x^t \mathrm{d}t$.

Correction

On n'a malheureusement aucun résultat nous permettant de dire directement que $S(x) = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \Phi(n)x^n \underset{x\to 1^-}{\to} +\infty$. On va donc revenir à la définition. Soit $M > 0$. Soit N tel que

$\sum_{n=n_0}^{N} \Phi(n) \geqslant 2M$ (un tel N existe par divergence de $\sum \Phi(n)$.
Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [1-\varepsilon, 1]$, $x^N \geqslant \frac{1}{2}$. Alors pour tout $n \leqslant N$, $x^n \geqslant x^N \geqslant \frac{1}{2}$.
Alors pour tout $x \in [1-\varepsilon, 1]$,

$$S(x) \geqslant \sum_{n=n_0}^{N} \Phi(n)x^n \geqslant \sum_{n=n_0}^{N} \Phi(n) - \frac{1}{2}\frac{1}{N-n_0+1} \sum_{n=n_0}^{N} \Phi(n) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{n=n_0}^{N} \Phi(n) = M.$$

D'où $S(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} +\infty$.
Ensuite, on va effectuer une comparaison série-intégrale pour montrer l'équivalent désiré.
Soit $n \geqslant n_0 + 1$. Alors par décroissance de $t \mapsto \Phi(t)x^t$, on a

$$\int_n^{n+1} \Phi(t)x^t dt \leqslant \Phi(n)x^n \leqslant \int_{n-1}^{n} \Phi(t)x^t dt,$$

d'où

$$\int_{n_0}^{+\infty} \Phi(t)x^t dt \leqslant S(x),$$

et

$$S(x) - \Phi(n_0)x^{n_0} \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} \Phi(t)x^t dt.$$

En divisant par $S(x)$,

$$1 - \frac{\Phi(n_0)x^{n_0}}{S(x)} \leqslant \frac{1}{S(x)} \int_{n_0}^{+\infty} \Phi(t)x^t dt \leqslant 1.$$

Comme $\Phi(n_0)x^{n_0} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \Phi(n_0) \in \mathbb{R}$ et $S(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit que

$$\frac{1}{S(x)} \int_{n_0}^{+\infty} \Phi(t)x^t dt \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1,$$

ce qui est exactement l'équivalent recherché.

3.2 Eva Chaudanson

Exercice 25. **1.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un C-espace vectoriel E de dimension n. On suppose que u possède exactement 2 valeurs propres distinctes, λ_1 et λ_2. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il existe deux projecteurs p_1 et p_2 tels que $u = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ et $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}_E$.

Correction

Si u est diagonalisable, on dispose d'une base $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice de u est diagonale. Quitte à réordonner les vecteurs, on peut écrire

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{n_1} & (0) \\ (0) & \lambda_2 \mathrm{I}_{n_2} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n_1} & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} (0) & (0) \\ (0) & \mathrm{I}_{n_2} \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_1) + \lambda_2 \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_2),$$

où p_1 et p_2 sont, étant données leur matrices, des projecteurs tels que $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}_E$.
S'il existe deux projecteurs p_1 et p_2 tels que $u = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ et $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}_E$, alors on montre que u est diagonalisable. Le plus simple est de montrer que $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$

annule u :

$$\begin{aligned}(u-\lambda_1\mathrm{Id}_E)\circ(u-\lambda_2\mathrm{Id}_E) &= (\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2-\lambda_1\mathrm{Id}_E)\circ(\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2-\lambda_2\mathrm{Id}_E)\\ &= (\lambda_2-\lambda_1)p_2\circ(\lambda_1-\lambda_2)p_1\\ &= -(\lambda_1-\lambda_2)^2 p_2\circ p_1\\ &= -(\lambda_1-\lambda_2)^2 p_2\circ(\mathrm{Id}_E-p_2)\\ &= 0_{\mathscr{L}(E)},\end{aligned}$$

donc u est annulé par un polynôme scindé à racines simples, donc est diagonalisable.

2. Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$. Montrer que $A=\begin{pmatrix} a+b & a & \cdots & a\\ a & a+b & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & \cdots & a+b\end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Correction

Je ne sais pas quel est le lien avec la question précédente... On écrit que $A=aJ+b\mathrm{I}_n$, J est diagonalisable (on l'a fait 3 fois en cours), donc $J=PDP^{-1}$, donc $A=P(aD+b\mathrm{I}_n)P^{-1}$ est diagonalisable.

3.3 Nathan Couëdel

Exercice 26. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ on pose $a_{i,j}=\langle e_i,e_j\rangle$; et l'on considère $A_{\mathcal{B}}=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n}$.

1. Montrer que : $\forall X\in\mathbb{R}^n,\forall X\in\mathbb{R}^n$, $\langle X,Y\rangle=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(X)^\top A_{\mathcal{B}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Y)$.

Correction

Soient (X,Y) dans $\mathbb{R}^n$. On écrit $X=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ et $Y=\sum_{i=1}^n y_ie_i$. Alors

$$\begin{aligned}\langle X,Y\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_ie_i,\sum_{j=1}^n y_je_j\right\rangle\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j\langle e_i,e_j\rangle\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_ja_{ij}\\ &= \sum_{i=1}^n x_i\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j\\ &= \sum_{i=1}^n x_i[AY]_i\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(X)^\top A\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Y).\end{aligned}$$

2. Soit $\mathcal{C}$ une autre base de $\mathbb{R}^n$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$. Montrer que : $A_{\mathcal{C}}=$

$P^\top A_{\mathcal{B}} P$.

Correction

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors en notant $(E_1,\dots,E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et en notant $\mathcal{C} = (c_1,\dots,c_n)$,

$$[A_{\mathcal{C}}]_{ij} = E_i^\top A_{\mathcal{C}} E_j = \langle c_i, c_j \rangle .$$

Or,

$$\begin{aligned}\langle c_i, c_j\rangle &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_i)^\top A_{\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_j)\\ &= (P\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(c_i))^\top A_{\mathcal{B}} P \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(c_j)\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(c_i)^\top P^\top A_{\mathcal{B}} P \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(c_j)\\ &= E_i^\top P^\top A_{\mathcal{B}} P E_j\\ &= [P^\top A_{\mathcal{B}} P]_P ij,\end{aligned}$$

d'où l'égalité entre les deux matrices, par égalité sur les coefficients.

3. En distinguant les cas $n = 2$ et $n \geqslant 3$, montrer que $\mathrm{Tr}(A_{\mathcal{B}}) > 0$ et $\det(A_{\mathcal{B}}) > 0$.

Correction

Pour la trace, pas besoin de disjonction :

$$\mathrm{Tr}(A_{\mathcal{B}}) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2 > 0,$$

car aucun des e_i n'est nul. Ensuite, pour $n = 2$,

$$\det(A_{\mathcal{B}}) = \|e_1\|^2 \|e_2\|^2 - \langle e_1, e_2\rangle^2 > 0,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui est stricte étant donnée que e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires.
Si $n \geqslant 3$, on prend une base orthonormée $(f_1,\dots,f_n) = \mathcal{E}$ de E. Alors $A_{\mathcal{E}} = \mathrm{I}_n$, et donc on dispose de P inversible telle que $A_{\mathcal{B}} = P^\top P$. Ainsi, $\det(A_{\mathcal{B}}) = \det(P^\top P) = \det(P^\top)\det(P) = \det(P)^2 > 0$.

4. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 2$, $(A_{\mathcal{B}})^p$ est définie positive.

Correction

Déjà, $A_{\mathcal{B}}$ est bien symétrique, c'est important de le dire.
Ensuite, on a vu dans la question précédente qu'il existe P inversible telle que $A_{\mathcal{B}} = P^\top P$.
Soit $U \in \mathbb{R}^n$. Alors $U^\top A_{\mathcal{B}} U = (PU)^\top PU = \|PU\|^2 \geqslant 0$. De plus, $\|PU\| > 0$ si $U \neq 0$ car P est inversible. Donc $A_{\mathcal{B}}$ est symétrique définie positive.
Comme $A_{\mathcal{B}}$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable. En notant $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ ses valeurs propres (strictement positives car $A_{\mathcal{B}}$ est définie positive), alors pour tout p dans $\mathbb{N}$, $A_{\mathcal{B}}^p$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont $(\lambda_1^p,\dots,\lambda_n^p)$ qui sont aussi strictement positives. Donc $A_{\mathcal{B}}$ est bien définie positive.

3.4 Liv Craen et Théophile Cirier

Exercice 27. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. On note $q=1-p$ et pour $n,k\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$ et $k\geqslant 1$, on pose : $A_n=(X_1<\cdots<X_n)\,,u_n=P\left(A_n\right),B_{n,k}=(X_1=k,X_1<\cdots<X_n)\,,v_{n,k}=P\left(B_{n,k}\right)$. Enfin pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $\pi_n=\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\left(1-q^j\right)$.

1. Calculer $P\left(X_1=X_2\right)$ et $P\left(X_1<X_2\right)$.

Correction

Comme $\{(X_1=n),n\in\mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1=X_2)&=\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X_1=X_2,X_1=n)\\&=\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X_2=n,X_1=n)\\&=\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X_1=n)\mathbb{P}(X_2=n)\text{ par indépendance}\\&=\sum_{n\geqslant 1}p^2q^{2n-2}\\&=p^2\sum_{n\geqslant 1}(q^2)^{n-1}\\&\boxed{=p^2\frac{1}{1-q^2}.}\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1<X_2)&=\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X_1<X_2,X_1=n)\\&=\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X_2>n,X_1=n)\\&=\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X_1=n)\mathbb{P}(X_2>n)\text{ par indépendance}\\&=\sum_{n\geqslant 1}pq^{n-1}q^n\\&=pq\sum_{n\geqslant 1}(q^2)^{n-1}\\&\boxed{=\frac{pq}{1-q^2}.}\end{aligned}$$

2. Pour $n\geqslant 3$ et $k\in\mathbb{N}^*$, montrer que : $v_{n,k}=pq^{k-1}\displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty}v_{n-1,j}$.

Correction

On fixe $n\geqslant 3$ et $k\in\mathbb{N}^*$. Alors, comme $\{(X_2=j),j\in\mathbb{N}^*\}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
v_{n,k} &= \mathbb{P}\left(X_1 = k, X_1 < \cdots < X_n\right) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k, X_1 < \cdots < X_n, X_2 = j) \\
&= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 < X_3 < \cdots < X_n, X_2 = j) \\
&= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 < X_3 < \cdots < X_n, X_2 = j) \\
&= \sum_{j=k+1}^{+\infty} pq^{k-1}\mathbb{P}(X_2 < X_3 < \cdots < X_n, X_2 = j).
\end{aligned}$$

Or, par indépendance et caractère identiquement distribué des (X_i),

$$\mathbb{P}(X_2 < X_3 < \cdots < X_n, X_2 = j) = \mathbb{P}(X_1 < X_2 < \cdots < X_{n-1}, X_1 = j) = v_{n-1,j}.$$

Donc

$$v_{n,k} = pq^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j}.$$

3. En déduire que, pour $n \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{n,k} = \dfrac{1}{\pi_{n-1}} \left(pq^{k-1}\right)^n q^{\alpha_n}$ où α_n est un entier à préciser

Correction

Là, c'est intéressant, on va procéder par analyse-synthèse ! Si on écrit que $v_{n,k} = \dfrac{1}{\pi_{n-1}} \left(pq^{k-1}\right)^n q^{\alpha_n}$. Alors on remarque que

$$\begin{aligned}
pq^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j} &= pq^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{1}{\pi_{n-2}} \left(pq^{j-1}\right)^{n-1} q^{\alpha_{n-1}} \\
&= pq^{k-1} \frac{1}{\pi_{n-2}} p^{n-1} q^{\alpha_{n-1}} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \left(q^{n-1}\right)^{j-1} \\
&= pq^{k-1} \frac{1}{\pi_{n-2}} p^{n-1} q^{\alpha_{n-1}} (q^{n-1})^k \frac{1}{1 - q^{n-1}} \\
&= p^n q^{k-1+kn-k} q^{\alpha_{n-1}} \frac{1}{\pi_{n-1}} \\
&= p^n q^{kn-1} q^{\alpha_{n-1}} \frac{1}{\pi_{n-1}} \\
&= p^n q^{(k-1)n+n-1} q^{\alpha_{n-1}} \frac{1}{\pi_{n-1}} \\
&= p^n (q^{k-1})^n q^{\alpha_{n-1}+n-1} \frac{1}{\pi_{n-1}}
\end{aligned}$$

Ici, on voit que l'on a $\alpha_n = \alpha_{n-1} + n - 1$. Donc $\alpha_n = C + \dfrac{n(n-1)}{2}$, où C est à déterminer.

Or,

$$\begin{aligned}
v_{2,k} &= \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 > X_1)\\
&= \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 > k)\\
&= pq^{k-1}q^k\\
&= pq^{2k-1}\\
&= (pq^{k-1})^2\frac{1}{p}q = (pq^{k-1})^2 q^1\frac{1}{\pi_1},
\end{aligned}$$

donc $\alpha_2 = 1$. Ainsi, $\alpha_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$. On démontre le résultat par récurrence sur n ensuite.

4. Établir enfin que, pour $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{1}{\pi_n}p^{\beta_n}q^{\gamma_n}$ où β_n et γ_n sont des entiers que l'on précisera.

Correction

On conclut en disant que, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
u_n &= \mathbb{P}(X_1 < \cdots < X_n)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1 = k, X_1 < X_2 < \cdots < X_n)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\pi_{n-1}}\left(pq^{k-1}\right)^n q^{\alpha_n} \qquad = \frac{1}{\pi_{n-1}}p^n q^{\alpha_n}\sum_{k=1}^{+\infty}(q^n)^{k-1}\\
&= \frac{1}{\pi_{n-1}}p^n q^{\alpha_n}\frac{1}{1-q^n}\\
&= \frac{1}{\pi_n}p^n q^{\alpha_n},
\end{aligned}$$

d'où le résultat en posant $\beta_n = n$ et $\gamma_n = \alpha_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

5. (question qui n'était pas dans la planche, en mode Centrale Maths II) Vérifier le résultat avec python.

Correction

On propose

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def A(n,p):
    i = 1
    x = rd.geometric(p)
    y = rd.geometric(p)
    while i<n and x<y:
        x,y = y,rd.geometric(p)
        i+=1
    return i==n

def pi(p,n):
```

```
    q = 1-p
    res = 1
    for i in range(1,n+1):
        res*= (1-q**i)
    return res

def estim(n,p,N):
    q = 1-p
    res = 0
    for _ in range(N):
        res+=A(n,p)
    return res/N,(1/pi(p,n))*(p**n)*(q**(n*(n-1)/2))
```

Et on trouve

```
>>> estim(2,0.3,100000)
(0.41274, 0.4117647058823528 7)

>>> estim(3,0.3,100000)
(0.0934, 0.09213000268600584)

>>> estim(5,0.4,100000)
(0.00041, 0.0003843205394579759)
```

Ce sont des résultats cohérents !

3.5 Élise D'Andréa

Exercice 28. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne canonique.
On considère l'équation (1) : $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ où Φ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ et A une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On admet le théorème : pour tout $(t_0, X_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, il existe une unique solution de (1) vérifiant $\Phi(t0) = X_0$.

1. Vérifier ce résultat avec $t_0 = 0$ lorsque :
   (a) A est constante avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Correction

On étudie le système

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ -x(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec la condition $\Phi(t_0) = X_0$.
Analyse. Soit une solution du système. On sait déjà que l'on dispose de $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $z(t) = c$.
Ensuite, $x'(t) = y(t)$ donc $x''(t) = y'(t) = -x(t)$, donc on dispose de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x(t) = a\cos(t)+b\sin(t)$. On en déduit alors que $y(t) = x'(t) = -a\sin(t)+b\cos(t)$.
Ainsi, on dispose de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) + b\sin(t) \\ -a\sin(t) + b\cos(t) \\ c \end{pmatrix}.$$

De plus, $\Phi(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, donc $c = z_0$ et (a, b) est solution du système

$$\begin{cases} a\cos(t_0) + b\sin(t_0) = x_0 \\ -a\sin(t_0) + b\cos(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t_0) & -\sin(t_0) \\ \sin(t_0) & \cos(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

D'où l'unicité de la solution. **Synthèse.** En posant a, b, c comme ci-dessus et $\Phi(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) + b\sin(t) \\ -a\sin(t) + b\cos(t) \\ c \end{pmatrix}$, on vérifie bien que Φ est solution de l'équation différentielle avec la bonne condition initiale.

(b) $A(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{2t}{1+t^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Correction

Analyse. Soit Φ une solution de $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ telle que $\Phi(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

Alors pour tout t,

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}x(t) \\ y'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}y(t) \\ z'(t) = 0 \end{cases}$$

Donc on dispose de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que pour tout t,

$$\begin{cases} x(t) = ae^{\ln(1+t^2)} = a\ln(1+t^2)y(t) \quad = be^{\operatorname{Arctan}(t)} \\ z'(t) = c \end{cases}$$

Là encore, (a, b, c) sont déterminés de manière unique et la **synthèse** s'effectue sans difficulté.

2. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- Pour toute solution Φ de (1), $\|\Phi\|$ est constante.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est antisymétrique.

Correction

Supposons d'abord que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $A(t)$ est antisymétrique. Soit Φ une solution de (1). Notons $f(t) = \|\Phi(t)\|^2$. Alors f est dérivable. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$f'(t) = 2\langle \Phi(t), \Phi'(t) \rangle = 2\langle \Phi(t), A(t)\Phi(t) \rangle = 2\Phi(t)^\top A(t)\Phi(t).$$

Mais $f'(t)$ est un réel, donc

$$f'(t) = f'(t)^\top = 2\Phi(t)^\top A^\top (\Phi(t)^\top)^\top = -2\Phi(t)^\top A\Phi(t) = -f'(t),$$

donc $f'(t) = 0$, et ce quel que soit $t \in \mathbb{R}$. On en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}$, i.e. Φ est de norme constante.
Réciproquement, supposons que toute solution Φ de (1) soit de norme constante. Par le même calcul que précédemment, on obtient que pour toute solution Φ, tout t dans $\mathbb{R}$,

$$\langle \Phi(t), A(t_0)\Phi(t)\rangle = 0.$$

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Soit $X \in \mathbb{R}^3$ et Φ l'unique solution de (1) vérifiant $\Phi(t_0) = X$. Alors la relation précédente nous indique que $\langle X, A(t_0)X\rangle = 0$ et ce pour tout X.
Soient alors X et Y deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\langle X + Y, A(t_0) \times (X + Y)\rangle = 0,$$

soit, en développant et en simplifiant ce qui doit être simplifié,

$$\langle X, A(t_0)Y\rangle = -\langle Y, A(t_0)X\rangle .$$

D'où, en prenant $X = e_i$ et $Y = e_j$ (base canonique de $\mathbb{R}^3$),

$$[A(t_0)]_{ij} = \langle e_i, A(t_0)e_j\rangle = -\langle e_j, A(t_0)e_i\rangle = -[A(t_0)]_{ji},$$

ce qui signifie exactement que $A(t_0)$ est antisymétrique.

3.6 Nils Dérouet

Exercice 29. Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ on pose $u_{n,p}(x) = (-1)^p \dfrac{(2p + 2)^n}{(2p + 1)!} \dfrac{x^n}{n!}$.

1. Déterminer les réels x pour lesquels la famille $(u_{n,p}(x))_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$|u_{n,p}(x)| = \frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!}\frac{|x|^n}{n!}.$$

On en déduit alors, en faisant des calculs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$,

$$\sum_{n\geqslant 0} |u_{n,p}(x)| = \frac{1}{(2p+1)!}\mathrm{e}^{|x|(2p+2)}.$$

Et

$$\begin{aligned}\sum_{p\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0} |u_{n,p}(x)| &= \sum_{p\geqslant 0}\frac{1}{(2p+1)!}\mathrm{e}^{|x|(2p+2)}\\ &= \mathrm{e}^{|}x|\sum_{p\geqslant 0}\frac{(\mathrm{e}^{|x|})^{2p+1}}{(2p+1)!}\\ &= \mathrm{e}^{|x|}\mathrm{sh}(\mathrm{e}^{|x|}) < +\infty,\end{aligned}$$

la famille $(u_{n,p}(x))_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

2. Donner le rayon de convergence et la valeur de $u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n\, x^n}{n!}$ où $a_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!}$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la question précédente, la famille $(u_{n,p}(x))_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, donc

$$\begin{aligned}u(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n x^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}(x)\\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}(x) \text{ par sommabilité.}\\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\mathrm{e}^{(2p+2)x}\frac{1}{(2p+1)!}\\ &= \mathrm{e}^x\sin(\mathrm{e}^x).\end{aligned}$$

3. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}u(t)\mathrm{d}t$ est bien définie.

Correction

On remarque que $\mathrm{e}^{-t}u(t) = \sin(\mathrm{e}^t)$. Or, en notant $\varphi(t) = \mathrm{e}^t$, φ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$, strictement croissante. Comme

$$\sin(\mathrm{e}^t) = \frac{\mathrm{e}^t\sin(\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t} = \frac{\sin(\varphi(t))}{\varphi(t)}\varphi'(t),$$

le théorème de changement de variables assure que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}u(t)\mathrm{d}t$ a la même nature que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt,$$

qui est bien définie (fait en cours, faire une IPP).

4. (question ajoutée) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}u(t)$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

Correction

Non, elle ne l'est pas car $t \mapsto \dfrac{|\sin(t)|}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ (déjà fait en cours).

3.7 Niels Descourvières

Exercice 30. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi : $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = 1/2$. On pose $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\Psi(\lambda) = \ln(\mathrm{ch}(\lambda))$.

1. Soit Z une variable aléatoire telle que pour tout $\lambda > 0$, $\mathrm{e}^{\lambda Z}$ soit d'espérance finie. Montrer que : $\forall \lambda > 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(Z \geqslant t) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda Z})$.

Correction

Soit $\lambda > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \geqslant t) &= \mathbb{P}(\lambda Z \geqslant \lambda t) \text{ car } \lambda > 0\\ &= \mathbb{P}(\mathrm{e}^{\lambda Z} \geqslant \mathrm{e}^{\lambda t}) \text{ par croissance de la fonction exponentielle}\\ &\leqslant \frac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda Z})}{\mathrm{e}^{\lambda t}},\end{aligned}$$

ce qui est exactement la relation cherchée.

2. Montrer que $\mathbb{P}(S_n \geqslant 0) \geqslant 1/2$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $Y_k = -X_k$. Alors $Y_k \sim X_k$, donc $T_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = -S_n$ suit la même loi que S_n.
Ainsi,

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant 0) = \mathbb{P}(T_n \geqslant 0) = \mathbb{P}(S_n \leqslant 0) = 1 - \mathbb{P}(S_n > 0) \geqslant 1 - \mathbb{P}(S_n \geqslant 0),$$

car $\mathbb{P}(S_n \geqslant 0) \geqslant \mathbb{P}(S_n > 0)$. On en déduit que

$$2\mathbb{P}(S_n \geqslant 0) \geqslant 1, \text{ donc que } \mathbb{P}(S_n \geqslant 0) \geqslant \frac{1}{2}.$$

3. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{n}\ln(\mathbb{P}(Sn \geqslant t)) \leqslant \inf\{\Psi(\lambda) - \lambda t,\ \lambda \geqslant 0\}$.

Correction

Soit $t \in \mathbb{R}$. On sait que pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant t) = \mathbb{P}(nS_n \geqslant nt) \leqslant e^{-\lambda nt}\mathbb{E}(e^{\lambda nS_n}).$$

Or,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{\lambda nS_n}) &= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{\lambda X_k}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{\lambda X_k}\right) \text{ par indépendance mutuelle de } (X_1, \ldots, X_n).\end{aligned}$$

Or,

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X_k}) = \frac{e^{-\lambda} + e^{\lambda}}{2} = \operatorname{ch}(\lambda).$$

Ainsi, on en déduit que

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant t) \leqslant e^{-\lambda nt}\operatorname{ch}(\lambda)^n,$$

d'où

$$\ln(\mathbb{P}(S_n \geqslant t)) \leqslant -\lambda nt + n\ln(\operatorname{ch}(\lambda)),$$

d'où le résultat désiré en divisant tout par n.

3.8 Oriane Gicquiaux

Exercice 31. Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$. Pour $f \in E$ et $x \in]0,1]$ on pose $T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$; et l'on pose $T(f)(0) = f(0)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? Surjectif ?

Correction

La linéarité de T est claire (à vérifier quand même à l'oral). Soit $f \in E$. Alors,

$$T(f) : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

En notant F une primitive de f, on a, pour tout x dans $[0,1]$,

$$T(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x},$$

qui est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 par $F'(0) = f(0)$. Donc $T(f) \in E$, T est bien un endomorphisme.

Étude du noyau de T. Soit f telle que $T(f)(x) = 0$ pour tout x. Alors pour tout x de $]0,1]$, $\int_0^x f(t)dt = 0$. Soit, en dérivant cette expression, pour tout x de $]0,1]$, $f(x) = 0$. Donc f est nulle. Donc T est injectif.

T **n'est pas surjectif.** En effet, tous les éléments de $\mathfrak{Im}(T)$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$. Donc T n'est pas surjectif.

2. On se donne f et g dans E et l'on pose $F(x) = x\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t - \left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)$.

(a) Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$ et mettre F' sous la forme d'une intégrale.

Correction

Par définition, $x \mapsto \int_0^x \varphi(t)dt$ est $\mathscr{C}^1$ dès lors que φ est continue. Donc F est $\mathscr{C}^1$ et pour tout x dans $]0,1]$,

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \int_0^x f(t)g(t)dt + xf(x)g(x) - f(x)\int_0^x g(t)dt - g(x)\int_0^x f(t)dt \\
&= \int_0^x f(t)g(t) + f(x)g(x) - f(x)g(t) - g(x)f(t)dt \\
&= \int_0^x (f(t)-f(x))(g(t)-g(x))dt.
\end{aligned}$$

(b) Montrer que si f et g sont de même monotonie, alors $T(fg)(x) \geqslant T(f)(x)T(g)(x)$.

Correction

Si f et g ont même monotonie, pour $t \in [0,x]$, $(f(t)-f(x))(g(t)-g(x))$ garde un signe constant.
Donc F' est positive, donc F croît. Comme $F(0) = 0$, on en déduit que F est positive sur $[0,1]$, d'où l'inégalité désirée.

(c) (question ajoutée) Quand a-t-on égalité dans l'inégalité précédente (en supposant toujours f et g monotones) ?

Correction

S'il y a égalité, cela signifie que F est constante égale à 0. Cela signifie en particulier que $F(1) = 0$, donc que

$$\int_0^x (f(t)-f(1))(g(t)-g(1))dt = 0$$

Mais $t \mapsto (f(t)-f(1))(g(t)-g(1))$ est continue, de signe constant, d'intégrale nulle, donc elle est constante égale à 0 sur $[0,1]$. Donc f et g sont constantes.
Réciproquement, si f et g sont constantes, il y a bien égalité.

3. (question ajoutée) Déterminer les éléments propres de T.

Correction

On a déjà regardé $\ker(T)$.
Analyse. Soit λ une valeur propre non nulle de T, φ un vecteur propre associé. Alors

$$T(\varphi) = \lambda\varphi,$$

donc φ est dérivable sur $]0,1]$ et pour tout $x \in]0,1]$,

$$\int_0^x \varphi(t)dt = \lambda x\varphi(x).$$

En dérivant, on obtient
$$\varphi(x) = \lambda\varphi(x) + \lambda x\varphi'(x),$$
soit
$$\varphi'(x) + \frac{1-\frac{1}{\lambda}}{x}\varphi(x) = 0,$$
donc on dispose de C tel que pour tout $x \in]0,1]$,
$$\varphi(x) = C\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)\ln(x)} = Cx^{\frac{1}{\lambda}-1},$$
fonction qui n'est prolongeable par continuité que si $\dfrac{1}{\lambda} - 1 \geqslant 0$, i.e. $0 < \lambda \leqslant 1$

Synthèse. Soit $\lambda \in]0,1]$. Alors λ est valeur propre de T, de sous-espace propre associé $\mathrm{Vect}\left(x \mapsto x^{\frac{1}{\lambda}-1}\right)$.

3.9 Maxence Herbelin

Exercice 32. Soit E l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}_+$dans $\mathbb{R}_+$ pour lesquelles existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x^\alpha f(x)$ tende vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.

Correction

On montre que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
Déjà, la fonction nulle θ vérifie bien que $x^{42}\theta(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\theta \in E$.
Soient ensuite f et g dans E, λ et μ dans $\mathbb{R}$. On dispose de réels strictement positifs α et β tels que $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $x^\beta g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En prenant $\gamma = \min(\alpha,\beta)$, on obtient
$$x^\gamma(\lambda f(x) + \mu g(x)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
d'où le résultat : E est un espace vectoriel.

Dans la suite on se donne $f \in E$.

2. Montrer que $g : x \mapsto \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} f(t)\mathrm{d}t$ est correctement définie et vérifie : $g'(x) - g(x) = f(x)$.

Correction

Déjà, on sait que l'on dispose de $\alpha > 0$ tel que $f(t) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$. Donc $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}f(t)$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}f(t)\mathrm{d}t$ est correctement définie et est dérivable, de dérivée $-\mathrm{e}^{-x}f(x)$. Ainsi, g est dérivable et pour tout x dans $\mathbb{R}$,
$$g'(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}f(t)\mathrm{d}t - \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}f(x) = g(x) - f(x).$$

3. Soit $f_0 = f$ puis, par récurrence, $f_{n+1} = f \circ f_n$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Correction

3.10 Frédéric Hor

Exercice 33. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que M^2 est diagonalisable et M inversible. Montrer que M est diagonalisable.

Correction

Comme M^2 est diagonalisable, elle est annulée par le polynôme

$$P = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i),$$

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ est le spectre de M^2. Comme M est inversible, M^2 aussi, donc 0 n'est pas valeur propre de M^2. Donc $\prod_{i=1}^{r}(M^2 - \lambda_i \mathrm{I}_n) = 0_n$, donc le polynôme $\prod_{i=1}^{r}(X^2 - \lambda_i)$ annule M. Notons, pour tout i, δ_i une racine de λ_i. On sait que comme $\lambda_i \neq 0$, $\delta_i \neq -\delta_i$ et que si $i \neq j$, $\delta_i \neq \pm\delta_j$, donc

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{r}(X^2 - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{r}(X - \delta_i)(X + \delta_i)$$

est un polynôme scindé à racines simples qui annule M. Donc M est diagonalisable.

2. On suppose qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $Q(M)$ diagonalisable et $Q'(M)$ inversible. On se propose de montrer que M est diagonalisable.

(a) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tel que $P \circ Q(M) = 0_n$.

Correction

Comme $Q(M)$ est diagonalisable, elle est annulée par un polynôme scindé à racines simples, donc il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(Q(M)) = 0_n$, i.e. $P \circ Q(M) = 0_n$.

(b) Soit $\beta_1, \ldots, \beta_k$ les racines de P. En considérant les polynômes $(Q(X) - \beta_1), \ldots, (Q(X) - \beta_n)$, montrer que toute valeur propre de M est racine simple de $P \circ Q$. Conclure.

Correction

Soit λ une valeur propre de M. Comme $P \circ Q$ annule M, on en déduit que

$$\prod_{i=1}^{k}(Q(\lambda) - \beta_i) = 0,$$

donc on dispose de j tel que $Q(\lambda) = \beta_j$. Ce j est par ailleurs unique car P est scindé à racines simples. Donc la multiplicité de λ dans $P \circ Q$ est égale à la multiplicité de λ dans $Q(X) - \beta_i$.
Or, $Q'(\lambda) \neq 0$. En effet, $Q'(A)$ est inversible, donc λ n'est pas racine de Q' (sinon on aurait Q factorisable par $X - \lambda$ et donc $Q'(A) = (A - \lambda \mathrm{I}_n)B$, non inversible).
Donc λ est racine simple de $Q(X) - \beta_j$, donc de $P \circ Q$.
On en déduit que

$$P \circ Q = R \times \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (X - \lambda),$$

où R est un polynôme qui n'admet aucun λ de $\mathrm{Sp}(M)$ comme racine. Donc $R(M)$ est inversible. Mais $P \circ Q(M) = 0_n$ donc

$$\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (M - \lambda \mathrm{I}_n) = 0_n, \text{ donc } M \text{ est diagonalisable.}$$

3.11 Fleurine Jaegler

Exercice 34. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$.

1. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$ et $a > 0$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{2M_0}{a} + \dfrac{aM_2}{2}$. En déduire : $M_1^2 \leqslant 4M_0M_2$.

Correction

Soit x dans $\mathbb{R}$, $a > 0$. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, on sait que

$$|f(x+a) - f(x) - af'(x)| \leqslant \frac{M_2 a^2}{2}$$

donc

$$a|f'(x)| \leqslant \frac{M_2 a^2}{2} + |f(x+a) - f(x)| \leqslant \frac{M_2 a^2}{2} + 2M_0,$$

d'où

$$|f'(x)| \leqslant \frac{aM_2}{2} + \frac{2M_0}{a},$$

et, en prenant $a = \sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$,

$$|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2},$$

d'où le résultat désiré.

2. On suppose qu'il existe deux réels K_1 et R tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, M_{2n} \leqslant K_1 (2n)! R^{2n}$. Montrer qu'alors il existe un réel K_2 tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, M_{2n+1} \leqslant K_2(2n+1)! R^{2n+1}$. En déduire que f est développable en série entière.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors par la question précédente,

$$\begin{aligned} M_{2n+1} &\leqslant 2\sqrt{M_{2n} M_{2n+2}} \\ &\leqslant 2\sqrt{K_1 (2n)! R^{2n} K_1 (2n+2)! R^{2n+2}} \\ &\leqslant 2K_1 (2n)! \sqrt{(2n+1)(2n+2)} R^{2n+1}. \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1,$$

donc la suite $\left(\dfrac{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}{2n+1} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc est bornée par $C > 0$. Donc

$$M_{2n+1} \leqslant 2K_1 C (2n+1)! R^{2n+1},$$

ce qui est exactement le résultat attendu. On en déduit que l'on dispose de K_3 tel que pour tout n dans $\mathbb{N}$,
$$M_n \leqslant K_3 n! R^n.$$
D'où
$$\left|\frac{f^n(0)}{n!}\right| \leqslant K_3 R^n,$$
de rayon de convergence égal à $\frac{1}{R}$, donc pour $|x| < \frac{1}{R}$, la série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge absolument, d'où le caractère développable en série entière de f.

3. (question ajoutée) La réciproque est-elle vraie ?

Correction

La réciproque n'est absolument pas vraie, car exp est développable en série entière mais aucune de ses dérivées n'est majorée au voisinage de 0.

3.12 Marius Le Goff

Exercice 35. **1.** On veut montrer la relation suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{ch}(t)} \mathrm{d}t = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

(a) Justifiez la convergence de l'intégrale.

Correction

La fonction $t \mapsto \mathrm{ch}(t)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $t \mapsto \frac{t}{\mathrm{ch}(t)}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
De plus,
$$t^2 \frac{t}{\mathrm{ch}(t)} = t^2 \frac{2t}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2t^3}{\mathrm{e}^t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc $\frac{t}{\mathrm{ch}(t)} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, intégrable en $+\infty$, donc l'intégrale converge bien.

(b) Montrer que pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\frac{t}{\mathrm{ch}(t)} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t \mathrm{e}^{-(2n+1)t}$.

Correction

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{t}{\mathrm{ch}(t)} &= \frac{2t}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \\
&= \frac{2t\mathrm{e}^{-t}}{1 + \mathrm{e}^{-2t}} \\
&= 2t\mathrm{e}^{-t} \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \mathrm{e}^{-2nt} \text{ car } \mathrm{e}^{-2t} \in]0,1[\\
&= 2 \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n t\mathrm{e}^{-(2n+1)t}.
\end{aligned}$$

Pour $t = 0$, les deux quantités sont nulles donc la formule a aussi un sens.

(c) Conclure.

Correction

On pose, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto 2(-1)^n t\mathrm{e}^{-(2n+1)t}$. Alors

- $\sum f_n$ converge simplement,
- pour tout n dans $\mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = 2 \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-(2n+1)t}.$$

On fait alors une intégration par parties, en dérivant $u : t \mapsto t$ et en intégrant $v' : t \mapsto \mathrm{e}^{-(2n+1)t}$. Cette intégration par parties est possible car le crochet $\left[-t\frac{\mathrm{e}^{-(2n+1)t}}{2n+1}\right]_0^{+\infty}$ converge. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt &= \left[-2t\frac{\mathrm{e}^{-(2n+1)t}}{2n+1}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{2n+1} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2n+1)t} dt \\
&= 0 + \frac{2}{2n+1} \left[-\frac{\mathrm{e}^{-(2n+1)t}}{2n+1}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{2}{(2n+1)^2},
\end{aligned}$$

terme général d'une série convergente, par comparaison à une série de Riemann.

Donc, par le théorème d'intégration terme à terme,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{ch}(t)} dt &= \sum_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \\
&= \sum_{n \geqslant 0} 2(-1)^n \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-(2n+1)t} dt \\
&= \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{2}{(2n+1)^2} \text{ par le calcul précédent.}
\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

2. On veut montrer la relation suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$.

(a) Justifiez la convergence de l'intégrale.

Correction

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{1+e^t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et

$$\left|\frac{\cos(t)}{1+e^t}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t},$$

fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc, par comparaison, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale converge.

(b) Établir la relation attendue.

On pourra montrer que pour $t>0$, $\dfrac{\cos(t)}{1+\mathrm{e}^t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-nt}\cos(t)$.

Correction

Soit t dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{\cos(t)}{1+\mathrm{e}^t} &= \frac{\cos(t)}{\mathrm{e}^t}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{e}^{-(n+1)t}\cos(t)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-nt}\cos(t)\end{aligned}$$

En revanche, la série ne converge pas en $t=0$.
Ensuite, on remarque que le théorème d'intégration terme à terme risque de difficilement s'appliquer : on majore $|\mathrm{e}^{-nt}\cos(t)|$ par e^{-nt}, d'intégrale en $\dfrac{1}{n}$, terme général d'une série divergente.
On va alors appliquer un théorème de convergence dominée sur les sommes partielles. Notons, pour tout N dans $\mathbb{N}$, pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$S_N(t) = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-nt}\cos(t) = \cos(t)\mathrm{e}^{-t}\frac{1+(-1)^N\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^t}.$$

Alors

- pour tout N, $t\mapsto S_N$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
- pour tout N dans $\mathbb{N}$ et t dans $\mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}|S_N(t)| &= \left|\cos(t)\mathrm{e}^{-t}\frac{1+(-1)^N\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^t}\right|\\ &\leqslant |\cos(t)|\mathrm{e}^{-t},\end{aligned}$$

  fonction intégrable et **indépendante de** N,

donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_{\mathbb{R}_+}\mathscr{S}_N(t)dt \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}_+}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-nt}\cos(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+}f(t)dt.$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathscr{S}_N(t)dt = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-nt}\cos(t)dt$$

Soit désormais n dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-nt}\cos(t)dt &= \mathfrak{Re}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{it}dt\right)\\ &= \mathfrak{Re}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{-(n-i)t}}{-n+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{n-i}\right)\\ &= \mathfrak{Re}\left(\frac{n+i}{n^2+1}\right)\\ &= \frac{n}{1+n^2},\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathscr{S}_N(t)dt = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{n}{1+n^2},$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{1+n^2} = \int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+\mathrm{e}^t}dt.$$

3.13 Tristan Mehnert

Exercice 36. On se donne $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et l'on considère $U = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

1. Soit $R \in \mathbf{R}[X]$. Calculer $R(V)$ et $R(U)$.

Correction

On note $R(X) = \sum_{k=0}^{d} r_k X^k$. Or, par produit par blocs, on remarque que pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$V^k = \begin{pmatrix} A^k & 0_n \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}, \text{ donc } R(V) = \sum_{k=0}^{d} r_k V^k = \begin{pmatrix} R(A) & 0_n \\ 0_n & R(A) \end{pmatrix}.$$

Ensuite, par produit par blocs,

$$U^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2A^2 \\ 0_n & A^2 \end{pmatrix}, \ U^3 = \begin{pmatrix} A^3 & 3A^3 \\ 0_n & A^3 \end{pmatrix}, \text{ donc (rec. immédiate) } U^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$$

Donc

$$R(U) = \begin{pmatrix} R(A) & \sum_{k=0}^{d} kA^k \\ 0_n & R(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(A) & AR'(A) \\ 0_n & R(A) \end{pmatrix}.$$

2. On suppose que U et V sont semblables et que A est diagonalisable.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme P scindé à racines simples vérifiant $AP'(A) = 0_n$.

Correction

On sait que A est diagonalisable, donc elle est annulée par un polynôme scindé à racines simples P. Donc $P(A) = 0_n$, donc $P(U) = 0_{2n}$. Mais comme on a supposé U et V semblables, on en déduit que $P(V) = 0_{2n}$, d'où $AP'(A) = 0_n$.

(b) Montrer que $A = 0_n$.

Correction

Comme $P(A) = 0$, les valeurs propres de A sont incluses dans les racines du polynôme P. On écrit $P(X) = \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)$.

Mais si on écrit $P'(X) = \prod_{i=1}^{d-1} (X - \mu_i)$ (avec les μ_i **éventuellement** complexes ; un peu d'analyse et de théorème de Rolle nous permettent de nous convaincre que les racines de P' sont en fait réelles), on sait, comme les racines de P sont simples, que les racines de P' ne sont pas racines de P donc ne sont pas valeurs propres de A. Ainsi, pour tout i, $A - \mu_i \mathrm{I}_n$ est inversible, donc

$$P'(A) = \prod_{i=1}^{d-1} (A - \mu_i \mathrm{I}_n) \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Donc, comme $P'(A)$ est inversible et $AP'(A) = 0_n$, on en déduit que $A = 0_n$.

3.14 Maxime Nouvel

Exercice 37. Soit $A \in S_3(\mathbb{R})$. Pour toute colonne non nulle $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ on pose $q(X) = \dfrac{X^\top AX}{X^\top X}$.

1. Énoncer le théorème spectral pour les matrices symétriques réelles.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Si A est une matrice symétrique réelle, il existe D diagonale et P orthogonale telles que $A = PDP^\top$.

2. Soit $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ les valeurs propres de A, distinctes ou non.
Montrer que $\lambda_3 = \max\{q(X), X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{3,1}\}\}$. Énoncer une propriété similaire pour λ_1.

Correction

Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres pour A. Alors, si $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, alors

$$\begin{aligned}
X^\top AX &= \langle X, AX\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{3} x_i e_i, A\sum_{i=1}^{3} x_i e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \sum_{i=1}^{3} x_i \lambda_i e_i \right\rangle \\
&= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 \\
&\leqslant \lambda_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \lambda_3 \|X\|^2 = \lambda_3 X^\top X,
\end{aligned}$$

d'où $q(X) \leqslant \lambda_3$. De plus, l'égalité est atteinte pour un vecteur propre.
De même,

$$\lambda_1 = \min\{q(X), X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{3,1}\}\}.$$

3. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des plans vectoriels de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Pour $P \in \mathscr{P}$, justifier l'existence de $\max\left\{X^\top AX, X \in P, \|X\| = 1\right\}$, puis montrer que :

$$\lambda_2 = \min\left\{\max\left\{X^\top AX, X \in P, \|X\| = 1\right\}, P \in \mathscr{P}\right\}.$$

Correction

On fixe $P \in \mathscr{P}$. L'application $\varphi : X \mapsto X^\top AX$ est continue car quadratique en X (polynomiale en les coefficients de X), à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{B} = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \|X\| = 1\}$ est un fermé borné en dimension finie, donc, d'après le théorème des bornes atteintes, φ admet un maximum sur $\mathscr{B}$.
Ensuite, soit $P \in \mathscr{P}$ et $Q = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. Alors, par la formule de Grassmann, $\dim P \cap Q = \dim(P) + \dim(Q) - \dim(P + Q) \geqslant 2 + 2 - 3 = 1$, donc on dispose de $X \in P \cap Q$, non nul. Alors $Y = \dfrac{X}{\|X\|}$ est dans P et dans $\mathscr{B}$, et $X^\top AX \geqslant \lambda_2$.
On en déduit que

$$\lambda_2 \leqslant \min\left\{\max\left\{X^\top AX, X \in P, \|X\| = 1\right\}, P \in \mathscr{P}\right\}.$$

Mais en prenant $P = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, on a l'égalité.

3.15 Baptiste Rouard

Exercice 38. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$dans $\mathbb{R}$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)^2 \, \mathrm{d}t$. On suppose que $f(x)F(x)$ tend vers 3 quand x tend vers l'infini.

1. Montrer que $f(x)$ admet une limite finie en $+\infty$ et préciser cette limite.

Correction

On remarque que F est croissante car $f(t)^2$ est positive. Ainsi, F possède une limite dans $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Donc f possède une limite (éventuellement nulle) ℓ.
Si ℓ était non nulle, alors $f(x)^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 0$, donc $f(x)^2$ ne serait pas intégrable, ce qui assure que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $f(x)F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, absurde.
Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Soit une fonction continue de $\mathbb{R}_+$dans $\mathbb{R}$.
Montrer que si $g(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers l'infini, alors $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ tend aussi vers ℓ.

Correction

Cas $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tel que pour tout $x \geqslant M$, $|g(x)| \leqslant \varepsilon$. Alors pour $x \geqslant M$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{1}{x}\int_0^M |g(t)|\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_M^x |g(t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{x}\int_0^M |g(t)|\mathrm{d}t + \frac{(x-M)\varepsilon}{x}.\end{aligned}$$

Mais $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^M |g(t)|\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc on dispose de M' tel que pour $x \geqslant M'$, $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^M |g(t)|\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour $x \geqslant \max(M, M')$,

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui assure que $\displaystyle\left|\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Cas ℓ quelconque. En prenant $h(t) = g(t) - \ell$, alors $h(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$$\frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où

$$\frac{1}{x}\int_0^x g(t) - \ell dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc

$$\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

3. Trouver un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers l'infini.

Correction

Au brouillon, on peut se demander s'il est possible que f soit équivalent à $\dfrac{C}{x^\alpha}$. Avec un peu de chance (et une proposition supplémentaire), on aurait $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} C\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t^{2\alpha}} = \frac{C}{1-2\alpha}x^{1-2\alpha}$. On aurait alors

$$f(x)F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{C^2}{1-2\alpha}x^{1-3\alpha},$$

ce qui donne 3 en prenant $\alpha = \dfrac{1}{3}$ et $C = 1$.
Démontrons ce résultat. On sait que

$$f(x)F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 3,$$

donc

$$f(x)^2F(x)^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 9,$$

d'où

$$F'(x)F(x)^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 9,$$

soit, par la question précédente,

$$\frac{1}{x}\int_0^x F'(t)F(t)^2dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 9,$$

d'où

$$\frac{1}{x}\left(\frac{F(x)^3}{3} - \frac{F(0)^3}{3}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 9,$$

donc

$$\frac{1}{x}F(x)^3 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 27,$$

d'où

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 3\sqrt[3]{x},$$

donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{F(x)} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

4. *Il y avait une quatrième question.*

3.16 Aurélien Simone

Exercice 39. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \dfrac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^n v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} v_k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1+u_k-1}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1+u_k}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_k)} - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_{k-1})} - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_k)} \\ &= \boxed{1 - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}} \text{ par télescopage.}\end{aligned}$$

2. Montrer que si (u_n) est à termes positifs, alors la série de terme général v_n est convergente.

Correction

Si (u_n) est à termes positifs, on remarque que la suite $\left(\dfrac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, et décroissante car $1+u_n \geqslant 1$ pour tout n. Par le théorème de la limite monotone, elle converge, donc $\sum_{k=0}^{n} v_k$ converge. aussi, c'est-à-dire que la série est convergente.

3. Montrer que si la série de terme général u_n est absolument convergente, alors la série de terme général v_n est absolument convergente.

Correction

On suppose ici que $\sum |u_n|$ converge. *On aimerait pouvoir dire quelque chose comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{C}$, mais, pour ce faire, il faut démontrer que le dénominateur converge !*

Notons, pour n dans $\mathbb{N}$, $p_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$. Comme $\sum |u_n|$ converge, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $1+u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc, à partir d'un certain rang, $1+u_k > 0$. Quitte à sauter les premiers indices, on suppose que ce rang est 0. Ainsi, on obtient

$$\ln(p_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k).$$

Or, comme $u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\ln(1+u_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} u_k$, qui est le terme général d'une série absolument convergente. On en déduit que la série de terme général $\ln(1+u_k)$ converge absolument, donc on dispose de $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(p_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\ell}$.
Ainsi,

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{\ell},$$

et comme $\sum u_n$ converge absolument, $\sum v_n$ aussi.

3.17 Étienne Sponton

Exercice 40. Soit f un endomorphisme d'un C-espace vectoriel E de dimension n. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $r_k = \text{rg}\left(f^k\right)$.

1. Montrer que la suite (r_k) est décroissante et stationnaire.

Correction

On remarque que si $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$ (car si $y = f^{k+1}(x)$, alors $y = f^k(f(x))$). Ainsi, (r_k) est une suite d'entiers positifs décroissante. Minorée par 0, elle converge. Elle est donc stationnaire (si elle ne l'était pas, elle diminuerait de 1 une infinité de fois, ce qui est absurde).

2. En considérant $g_k : \left| \begin{array}{c} f^k(E) \to f^{k+1}(E) \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$, montrer que la suite $(r_k - r_{k+1})$ est décroissante.

Correction

Suivons l'indication et considérons une telle application linéaire. En appliquant le théorème du rang à g, on obtient

$$\mathrm{rg}(g_k) + \dim(\ker(g)) = \dim(f^k(E)) = r_k.$$

Mais $\mathrm{rg}(g_k) = \dim(f(f^k(E)) = \dim(f^{k+1}(E)) = r_{k+1}$. Ainsi,

$$r_k - r_{k+1} = \dim(\ker(g_k)).$$

Mais

$$\ker(g_k) = \{y \in f^k(E),\ f(y) = 0\} = f^k(E) \cap \ker(f).$$

Comme $f^k(E)$ décroît (pour l'inclusion), $f^k(E) \cap \ker(f)$ aussi, donc $\dim(\ker(g_k))$ aussi, donc $(r_k - r_{k+1})$ aussi !

3.18 Adrien Valette

Exercice 41. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre 1/2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$.

1. Pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$, on considère $Z_i = \mathrm{e}^{\lambda(X_i - 1/2)}$. Calculer l'espérance de Z_i.

Correction

Par la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(Z_i) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda(0-1/2)} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda(1-1/2)} = \mathrm{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$, calculer $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))}\right)$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$. Alors

$$\begin{aligned} S_n - \mathbb{E}(S_n) &= \sum_{i=1}^n X_i - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{\lambda \sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{1}{2}\right)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{\lambda\left(X_i - \frac{1}{2}\right)}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{\lambda\left(X_i - \frac{1}{2}\right)}\right) \text{ par indépendance} \\ &= \text{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \text{ par la question précédente.} \end{aligned}$$

3. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $f_t : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}; \lambda \mapsto \lambda t - \ln(\text{ch}(\lambda/2))$.
Montrer que : $\forall \lambda > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant nt) \leqslant e^{-nf_t(\lambda)}$.

Correction

Soit $\lambda > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant nt) &= \mathbb{P}(\lambda((S_n - \mathbb{E}(S_n)) \geqslant \lambda nt) \text{ car } \lambda > 0 \\ &= \mathbb{P}\left(e^{\lambda((S_n - \mathbb{E}(S_n))} \geqslant e^{\lambda nt}\right) \text{ par croissance de l'exponentielle..} \end{aligned}$$

Or, la variable aléatoire $e^{\lambda((S_n - \mathbb{E}(S_n))}$ est positive et admet une espérance donc, par l'inégalité de Markov,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant nt) &\leqslant \frac{\mathbb{E}\left(e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))}\right)}{e^{\lambda nt}} \\ &\leqslant \frac{\text{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n}{e^{\lambda nt}} \\ &\leqslant e^{-n\left(\lambda t - \ln\left(\text{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)\right)} = e^{-nf_t(\lambda)}. \end{aligned}$$

4. Pour $t \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, on pose $\mathrm{I}(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)\ln(1-2t) - \left(t + \frac{1}{2}\right)\ln(2t+1)$. Montrer que $\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant nt) \leqslant e^{n\mathrm{I}(t)}$.

Correction

Étudions la fonction f_t décrite ci-dessus. f_t est dérivable et pour tout $\lambda > 0$,

$$f_t'(\lambda) = t - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)} = t - \frac{1}{2}\mathrm{th}\left(\frac{\lambda}{2}\right),$$

même si la fonction th en tant que telle n'est pas au programme de PCSI donc pas à celui de PSI (mais l'expression avec des exponentielles suffira). Par croissance stricte de th, et comme th varie entre -1 et 1, on sait que f_t' sera strictement positive puis strictement négative. On cherche alors le point d'annulation de f_t'. Soit $\lambda > 0$ On a les équivalences

$$\begin{aligned} t - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)} &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)} = 2t \\ &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}} = 2t \end{aligned}$$

Notons $x = \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}}$. Alors on a toujours les équivalences

$$\begin{aligned} t - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)} &\Leftrightarrow \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = 2t \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 2t(x^2+1) \\ &\Leftrightarrow x^2(1-2t) = 1+2t \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}} \text{ car } 1+2t > 0 \text{ et } 1-2t > 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}} = \sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}} \\ &\Leftrightarrow \lambda = 2\ln\left(\sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}}\right). \end{aligned}$$

On a donc bien un point d'annulation, avant lequel f_t' est strictement positive et après lequel elle est strictement négative. Donc f_t admet un maximum en cette valeur, maximum qui vaut

$$\begin{aligned} \lambda t - \ln\left(\mathrm{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right) &= 2t\ln\left(\sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}}\right) - \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}}{2}\right) \\ &= t\ln\left(\frac{1+2t}{1-2t}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-2t}{1+2t}}\right). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-2t}{1+2t}} &= \frac{1}{2}\frac{1+2t+1-2t}{\sqrt{(1+2t)(1-2t)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+2t)(1-2t)}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda t - \ln\left(\mathrm{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right) &= t\ln\left(\frac{1+2t}{1-2t}\right) + \ln\left(\sqrt{(1+2t)(1-2t)}\right) \\ &= \left(t + \frac{1}{2}\right)\ln(1+2t) + \left(\frac{1}{2} - t\right)\ln(1-2t). \end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

5. Comparer l'inégalité précédente avec celle de Bienaymé-Tchebycheff.

Correction

L'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff permet d'affirmer que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant nt) &\leqslant \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant nt)\\ &\leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2t^2}\\ &\leqslant \frac{n}{4n^2t^2} \text{ car on connaît la variance d'une binomiale.}\\ &\leqslant \frac{1}{4nt^2}.\end{aligned}$$

La dépendance en n est clairement meilleure dans l'estimation précédente.

3.19 Exos en plus (RMS, BEOS)

Exercice 42. Soit (P_n) la suite à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 2, P_1 = X$ et, pour $n \geqslant 2$, $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.

1. Déterminer le degré de P_n. Étudier la parité de P_n.

Correction

On démontre par récurrence double sur n que le degré de P_n vaut n et que P_n est de la parité de n.
Déjà, $\deg(P_0) = 0$, P_0 est pair, $\deg(P_1) = 1$ et P_1 est impair, donc l'initialisation est vérifiée.
Soit ensuite n dans $\mathbb{N}$ tel que $\deg(P_n) = n$ et $\deg(P_{n+1}) = n + 1$. Alors

$$P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

Alors $\deg(XP_{n+1}) = n + 2$ et $\deg(P_n) = n$ donc $\deg(P_{n+2}) = n + 2$.
Supposons, sans perte de généralité, que n soit pair. Alors P_n est pair par hypothèse de récurrence. De plus, P_{n+1} est impair donc il ne contient que des monômes de degré impair. Par conséquent $XP_{n+1}(X)$ ne contient que des monômes de degré pair, donc est pair. Donc P_{n+2} est pair.
On fait de même si n est impair.
L'hérédité est ainsi établie, et le résultat s'en déduit.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

Correction

On démontre aussi le résultat par récurrence double. L'initialisation est claire.
Pour l'hérédité, soit n tel que la propriété soit vraie aux rangs n et $n + 1$. Alors, pour

$z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned}
P_{n+2}\left(z+\frac{1}{z}\right) &= \left(z+\frac{1}{z}\right) P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right) - P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)\\
&= \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) + -\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)\\
&= z^{n+2}+\frac{1}{z^n}+z^n+\frac{1}{z^{n+2}}-z^n-\frac{1}{z^n}\\
&= z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}},
\end{aligned}$$

d'où l'hérédité et le résultat.

3. Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction

Soit n fixé dans $\mathbb{N}^*$. Déterminons les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $z+\dfrac{1}{z}$ soit racine de P_n. Comme

$$P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n+\frac{1}{z^n},$$

on a les équivalences

$$\begin{aligned}
P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = 0 &\Leftrightarrow z^n+\frac{1}{z^n} = 0\\
&\Leftrightarrow z^n = -\frac{1}{z^n}\\
&\Leftrightarrow z^{2n} = -1 = \mathrm{e}^{i\pi}\\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n-1]\!],\ z = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2n}}\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{2n}} = \mathrm{e}^{i\pi\frac{2k+1}{2n}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, si $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, $\mathrm{e}^{i\pi\frac{2k+1}{2n}} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\pi\frac{2k+1}{2n}}}$ est racine de P_n. Mais

$$\mathrm{e}^{i\pi\frac{2k+1}{2n}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{i\pi\frac{2k+1}{2n}}} = 2\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right).$$

Or, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{2k+1}{2n}\pi \in [0, \pi]$, intervalle sur lequel cos est injectif. On sait donc que les $\left(2\cos\left(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right)\right)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ sont n racines **réelles** et **distinctes** de P_n, qui est de degré n. On a donc trouvé toutes les racines de P_n, qui est bien scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

4 Concours Centrale-Supélec – Maths 2

4.1 Nathan Couedel

Exercice 43.
D'après un écrit très célèbre Centrale 1989.
On s'intéresse aux suites (U_n) où U_0 et U_1 sont positifs et vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+2} = \frac{1}{2}\left(U_{n+1}^2 + U_n^2\right)$$

1. Déterminer l'éventuelle limite de (U_n). Montrer que si trois termes consécutifs sont égaux, alors la suite (U_n) est constante.

Correction

Supposons que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors :

- ou bien $\ell = +\infty$ (ℓ est nécessairement positif car $U_{n+1}^2 + U_n^2 \geqslant 0$ pour tout n)
- ou bien $\ell \in \mathbb{R}$, et alors, par unicité de la limite, $\ell = \ell^2$, donc $\ell = 0$ ou 1.

Si l'on dispose de n_0 tel que $U_{n_0+1} = U_{n_0}$, alors $U_{n_0+2} = U_{n_0}$ d'où, par récurrence immédiate, pour tout $n \geqslant n_0$, $U_n = U_{n_0}$.

2. **[Py]** Calculer les premiers termes de la suite (U_n) pour différentes valeurs de U_0 et U_1. Que peut-on en déduire ? Pour les suites telles que $U_n \to +\infty$, s'intéresser à la suite définie par :

$$V_n = \frac{\ln\left(\frac{U_n}{2}\right)}{2^n}$$

Correction

On propose

```python
import numpy as np

def suite(u0,u1,n):
    res = [u0,u1]
    for i in range(2,n+1):
        res.append((res[-1]**2+res[-2]**2)/2)
    return res[-1]
```

On remarque que parfois, la suite tend vers $+\infty$ (souvent), mais pas toujours. Les choses ne sont pas VRAIMENT pas claires. Et on a l'impression que V_n converge.

3. Comparer les signes de $U_{n+1} - U_n$ et $U_n - U_{n-2}$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n^2 + U_{n-1}^2}{2} - \frac{U_{n-1}^2 + U_{n-2}^2}{2} = \frac{U_n^2 - U_{n-2}^2}{2},$$

donc $U_{n+1} - U_n$ et $U_n - U_{n-2}$ sont de même signe.

4. On suppose désormais $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non constante. Montrer que si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $U_{n_0+1} \geqslant U_{n_0}$ et $U_{n_0+1} \geqslant U_{n_0-1}$, alors la suite $(U_n)_{n\geqslant n_0+1}$ est strictement croissante.
On admet que si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $U_{n+1} \leqslant U_n$ et $U_{n+1} \leqslant U_{n-1}$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.

Correction

Supposons que l'on dispose de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $U_{n_0+1} \leqslant U_{n_0}$ et $U_{n_0} \leqslant U_{n_0-1}$. Alors par la question précédente, comme $U_{n_0+1} \geqslant U_{n_0-1}$, $U_{n_0+2} \geqslant U_{n_0+1}$. De plus, si on avait égalité, on aurait aussi $U_{n_0+1} = U_{n_0-1}$, donc $U_{n_0+1} = U_{n_0} = U_{n_0-1}$, donc trois termes consécutifs égaux, donc serait constante, absurde. Donc $U_{n_0+2} > U_{n_0+1}$ et, par récurrence, on démontre la stricte croissance de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Supposons que quel que soit N dans $\mathbb{N}$, la suite $(U_n)_{n\geqslant N}$ ne soit pas strictement monotone. Montrer que $U_0 \neq U_1$ et que si $U_0 < U_1$, alors $U_0 < U_2 < U_3 < U_1$ (vérifier si l'inégalité est stricte ou non). En déduire que la suite (U_n) converge vers 1.

Correction

Si $U_0 = U_1$, alors

- si $U_1 \leqslant U_2$, $U_0 \leqslant U_1 \leqslant U_2$ donc $(U_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante,
- si $U_1 \geqslant U_2$, $U_0 \geqslant U_1 \geqslant U_2$ donc $(U_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement déccroissante,

donc $U_0 \neq U_1$.
Si $U_0 < U_1$, comme $(U_n)_{n\geqslant 2}$ n'est pas strictement monotone, on a nécessairement $U_2 < U_1$. De plus, comme $(U_n)_{n\geqslant 3}$ n'est pas strictement monotone, on a nécessairement $U_3 > U_2$. De plus, $U_2 - U_0$ est du même signe que $U_3 - U_2$, c'est-à-dire positif. Donc $U_0 < U_2 < U_1$ et $U_3 > U_2$. Mais si $U_3 > U_1$, alors $U_4 > U_3 > U_2$, donc $(U_n)_{n\geqslant 4}$ serait strictement croissante, absurde, d'où

$$U_0 < U_2 < U_3 < U_1.$$

On montre ensuite par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$U_0 < U_2 < \cdots < U_{2n} < U_{2n+1} < U_{2n-1} < \cdots < U_1. \qquad (\mathcal{H}_n)$$

L'initialisation a été faite.
Pour l'**hérédité**, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ est vraie.
Déjà, $U_{2n} < U_{2n+1}$ donc nécessairement, $U_{2n+2} < U_{2n+1}$ (sinon $(U_k)_{k\geqslant 2n+2}$ serait strictement croissante) et $U_{2n+3} > U_{2n+2}$.
Mais si on avait $U_{2n+2} < U_{2n}$, alors on aurait $U_{2n+1} < U_{2n}$, ce qui est faux. Donc $U_{2n+2} > U_{2n}$. De même, $U_{2n+3} < U_{2n+1}$. D'où l'hérédité et le résultat.
Ainsi, $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ croît et est majorée par U_1 et $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et est minorée par U_0. Donc, par le théorème de la limite monotone, $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$.
Mais $U_{2n+2} = \dfrac{U_{2n+1}^2 + U_{2n}^2}{2}$ donc

$$\ell = \frac{\ell'^2 + \ell^2}{2} \text{ et, de même, } \ell' = \frac{\ell^2 + \ell'^2}{2},$$

donc $\ell = \ell'$, donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > U_2 > 0$ donc $\ell = 1$.

6. (question ajoutée) Établir, pour une suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ non constante appartenant à S, l'équivalence des propriétés suivantes :
(a) Il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que $U_N \geqslant 1$ et $U_{N+1} \geqslant 1$.

(b) La suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.

(c) La suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

Correction

- Supposons qu'il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que $U_N \geqslant 1$ et $U_{N+1} \geqslant 1$. Si on n'avait aucun N tel que $(U_n)_{n\geqslant N}$ soit strictement monotone. Alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait vers 1, avec $(U_{2n})_{n\geqslant N/2}$ majorée par 1, ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse.
- Supposons que la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ soit strictement croissante à partir d'un certain rang. Alors $U_{n+2} > U_n^2$. pour tout $n \geqslant N$. On montre alors qu'on a au moins un n tel que $U_n > 1$ (sinon on n'a pas la stricte croissance), et que donc $U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- La dernière implication est absolument évidente.

4.2 Liv Craen

Exercice 44. Soit la fonction :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}\,dt$$

et la série :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

1. (a) Tracer F sur l'intervalle $[-1, 1]$.

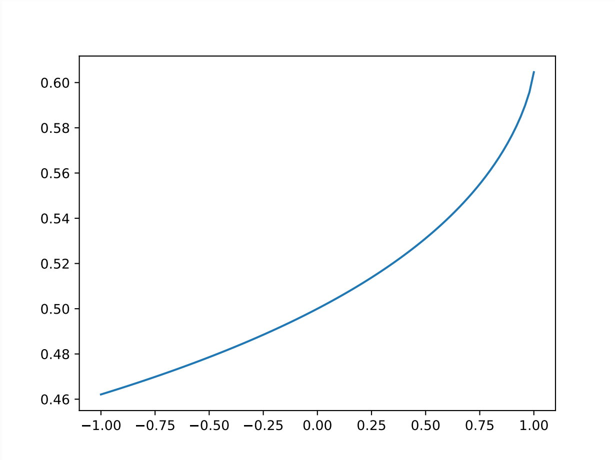
Correction

On propose

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integr

def F(x):
    def f(t):
        return (1-t)/(1-x*t**3)
    return integr.quad(f,0,1)[0]

X = np.linspace(-1,1,100)
Y = [F(x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

On trouve

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com



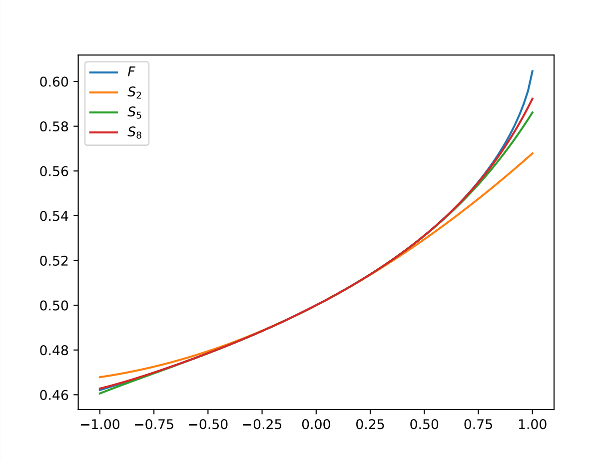
(b) Tracer S_2, S_5, S_8, et superposer les courbes (chaque S_i étant la somme partielle d'ordre i de la série S). Que peut-on conjecturer ?

Correction

On propose

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integr

def F(x):
    def f(t):
        return (1-t)/(1-x*t**3)
    return integr.quad(f,0,1)[0]

X = np.linspace(-1,1,100)
Y = [F(x) for x in X]
plt.plot(X,Y,label="$F$")

def S(n,x):
    res = 0
    for i in range(0,n+1):
        res += x**i/((3*i+1)*(3*i+2))
    return res

X = np.linspace(-1,1,100)
for k in [2,5,8]:
    Y = [S(k,x) for x in X]
    s = "$S_{"+str(k)+"}$"
    plt.plot(X,Y,label=s)

plt.legend()
plt.show()
```

et on trouve



On a l'impression que $S(x) = F(x)$.

2. (a) Montrer que F est bien définie sur $[-1, 1]$.

Correction

Soit $x \in [-1, 1]$, fixé, et $f(x, t) = \dfrac{1-t}{1-xt^3}$. Alors

- si $x = 1$, alors
$$f(x, t) = \frac{1-t}{1-t^3} = \frac{1}{1+t+t^2},$$
qui est continue sur $[0, 1]$, donc $F(1)$ est bien définie.
- si $x \neq 1$, alors $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$, donc F est définie.

(b) Montrer que F est continue sur $[-1, 1]$.

Correction

Il s'agit d'appliquer un théorème de continuité des intégrales à paramètre. On sait que :

- pour tout x dans $[-1, 1]$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$,
- pour tout t dans $[0, 1]$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[-1, 1]$,
- soit x dans $[-1, 1]$ et t dans $[0, 1]$. Alors $1 - t \geqslant 0$, et $xt^3 \leqslant t^3$ donc $1 - xt^3 \geqslant 1 - t^3$, donc
$$0 \leqslant f(x, t) \leqslant \frac{1-t}{1-t^3} \leqslant \frac{1}{1+t+t^2},$$
indépendante de x, continue et intégrable sur $[0, 1]$.

Donc, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, F est continue sur $[0, 1]$.

3. Démontrer la conjecture faite en 1.(a).

Correction

Soit $x \in [-1, 1]$. Alors pour tout t dans $[0, 1[$,
$$\frac{1-t}{1-xt^3} = (1-t)\sum_{n\geqslant 0} x^n t^{3n} = \sum_{n\geqslant 0}(t^{3n} - t^{3n+1})x^n.$$

On note alors $\varphi_n(t) = (t^{3n} - t^{3n+1})x^n$. On sait que

- pour tout n, φ_n est continue donc intégrable sur $[0,1]$,
- $\sum \varphi_n$ converge simplement sur $[0,1[$, vers $t \mapsto f(x,t)$, continue sur $[0,1]$.
- si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |\varphi_n(t)|dt &= \int_0^1 (t^{3n} - t^{3n+1})|x|^n \\ &= |x|^n \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2}\right) \\ &= \frac{|x|^n}{(3n+1)(3n+2)} \\ &\leqslant \frac{1}{(3n+1)(3n+2)},\end{aligned}$$

terme général d'une série convergente.

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 f(x,t)dt = \sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 (t^{3n} - t^{3n+1})x^n = S(x).$$

4. Calculer $F(1)$ et $F(-1)$.

Correction

On sait que

$$\begin{aligned}F(1) &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}F(-1) &= \int_0^1 \frac{1-t}{1+t^3}dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-t}{(1+t)(1-t+t^2)}dt.\end{aligned}$$

Or, on « sait » que l'on dispose de (a,b,c) réels tels que

$$\frac{1-X}{1+X^3} = \frac{a}{1+X} + \frac{bX+c}{1-X+X^2}.$$

En multipliant par $1+X$ et en évaluant en -1, on trouve $a = \dfrac{2}{3}$. On trouve ensuite b en multipliant par X et en regardant une limite en $+\infty$: $a+b=0$ donc $b = -\dfrac{2}{3}$. Enfin, on trouve c en évaluant en 0 : $1 = a+c$ donc $c = 1-a = \dfrac{1}{3}$. Finalement,

$$\begin{aligned} F(-1) &= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2t-1}{1-t+t^2} \\ &= \frac{2}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\left[\ln(1-t+t^2)\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\ln(2). \end{aligned}$$

5. (a) Montrer que F est dérivable sur $]-1,1[$.

Correction

On sait que $F = S$ sur $[-1,1]$. Or, une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence, donc F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

(b) F est-elle dérivable en 1 ?

Correction

On va montrer, plus facilement, que S n'est pas dérivable en 1. On sait que pour tout x dans $]-1,1[$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= S'(x) \\ &= \sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{(3n+1)(3n+2)} x^{n-1}. \end{aligned}$$

On sait que $\dfrac{n}{(3n+1)(3n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{9n}$, donc la série de terme général $\dfrac{n}{(3n+1)(3n+2)}$ diverge. Soit $M>0$ et N tel que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(3n+1)(3n+2)} \geqslant 2M.$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout x dans $[1-\varepsilon, 1]$, $x^N \geqslant \dfrac{1}{2}$. Alors pour x dans $[1-\varepsilon,1]$,

$$F'(x) = S'(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{nx^n}{(3n+1)(3n+2)} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{2(3n+1)(3n+2)} \geqslant M,$$

donc $S'(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} +\infty$.
Par le théorème de la limite de la dérivée, on sait que

$$\frac{S(x)-S(1)}{x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} +\infty,$$

ce qui assure la non dérivabilité de S (ou de F) en 1.

4.3 Niels Derouet

Exercice 45. On possède N cases. On y fait tomber successivement n boules qui ont une probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans une case donnée. La variable aléatoire T_n correspond au nombre de cases non vides au n-ième lancer.

1. Créer une fonction `remplir(n, N)` qui renvoie une liste contenant N éléments donnant le nombre de boules dans chaque case après n lancers. Créer une fonction `nonvides(n, N)` qui renvoie le nombre de cases non vides après n lancers. Que se passe-t-il quand n augmente ? Tester pour $N = 10$.

Correction

On propose

```python
import numpy.random as rd

def remplir(n,N):
    L = [0 for i in range(N)]
    for _ in range(n):
        x = rd.randint(0,N)
        L[x]+=1
    return L

def nonvides(n,N):
    L = remplir(n,N)
    res = 0
    for x in L:
        if x ==0:
            res+=1
    return res
```

Naturellement, quand n augmente, `nonvides` renvoie très souvent N.

2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T_n en fonction de n et N. Donner la loi de T_1 et de T_2.

Correction

Dans tout l'énoncé, on note X_i la case de la i-ème boule. X_i suit clairement une loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$ et les X_i sont très clairement indépendantes.
Il peut y avoir au minimum 1 case non vide (on a mis au moins une boule dans une case) et il peut y avoir au maximum $\min(n, N-1)$ cases vides (dans que $n < N$, il y a un nombre minimal de cases qui restent vides).
T_1 est la variable déterministe égale à 1 (après avoir mis une boule, il y a nécessairement une case non vide).
T_2 est à valeurs dans $\{1, 2\}$. On sait que

$$\mathbb{P}(T_2 = 1) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N},$$

donc

$$\mathbb{P}(T_2 = 2) = 1 - \frac{1}{N}.$$

3. Trouver $P(T_n = 1)$, $P(T_n = 2)$ et $P(T_n = n)$ en distinguant les cas $n \leqslant N$ et $n > N$.

Correction

Grâce aux variables astucieusement introduites précédemment, on peut calculer ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n = 1) &= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 1) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^n} \text{ par indépendance} \\ &= \frac{1}{N^{n-1}}.\end{aligned}$$

Ensuite, pour $\mathbb{P}(T_n = 2)$ (et $n \geqslant 2$), on va dénombrer. On sait qu'il y a N^n configurations de boules possibles. Choisir une configuration qui laisse 2 cases non vides, c'est choisir deux cases, soit $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$, puis choisir un nombre de boules dans la première case (n choix, de 1 à n). D'où

$$\frac{N(N-1)}{2} \times n \text{ configurations laissant 2 cases non vides.}$$

D'où

$$\mathbb{P}(T_n = 2) = \frac{nN(N-1)}{2N^n} = \frac{n(N-1)}{2N^{n-1}},$$

ce qui, remarquons-le, est cohérent avec le cas $n = 2$.
Enfin,

- si $n > N$, il ne peut pas y avoir n cases non vides : $\mathbb{P}(T_n = n) = 0$,
- si $n \leqslant N$, choisir une configuration qui laisse n cases non vides, c'est mettre chaque boule dans une case différente, donc choisir une première case (N choix) puis une seconde différente de la première ($N-1$ choix), etc. d'où

$$\mathbb{P}(T_n = n) = \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n} = \frac{N!}{(N-n)!N^n}.$$

4. On fixe $n > 2$. Montrer que :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \mathbb{P}(T_n = k)\frac{k}{N} + \mathbb{P}(T_n = k-1)\frac{N-k+1}{N}$$

pour des valeurs de k bien choisies.

Correction

Soit $k \in [\![2, \min(n, N)]\!]$, de sorte que k et $k-1$ soient bien des valeurs prises par T_n. Alors, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \mathbb{P}(T_n = k)\mathbb{P}_{T_n=k}(T_{n+1} = k) + \mathbb{P}(T_n = k-1)\mathbb{P}_{T_n=k-1}(T_{n+1} = k),$$

les autres probabilités conditionnelles étant nulles. Mais

$$\mathbb{P}_{T_n=k}(T_{n+1} = k) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in \{X_1, \dots, X_n\}) = \frac{k}{N},$$

et

$$\mathbb{P}_{T_n=k-1}(T_{n+1} = k) = \mathbb{P}(X_{n+1} \notin \{X_1, \dots, X_n\}) = 1 - \frac{k-1}{N} = \frac{N-k+1}{N},$$

d'où la relation demandée.
Remarque. En fait, la formule fonctionne aussi pour $k = 1$ et $k = \min(n+1, N)$. L'une des deux probabilités conditionnelles devient juste potentiellement nulle.

5. Soit $G_n(x)$ la génératrice de T_n. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$G_{n+1}(x) = \frac{x}{N}\left(NG_n(x) + (1-x)G'_n(x)\right)$$

Correction

On déduit de la formule précédente que

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_{n+1} = k)x^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k)\frac{k}{N}x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k-1)\frac{N-k+1}{N}x^k \\
&= \frac{x}{N}\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k)kx^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k)\frac{N-k}{N}x^{k+1} \\
&= \frac{x}{N}G'_n(x) + xG_n(x) - \frac{x^2}{N}G'_n(x) \\
&= \frac{x}{N}\left(NG_n(x) + (1-x)G'_n(x)\right).
\end{aligned}$$

6. (rajoutée) En déduire l'espérance de T_n. Vérifier ce résultat en python. Interpréter la limite de cette quantité quand n tend vers $+\infty$.

Correction

Les variables aléatoires sont toutes finies, elles admettent espérance et variance. On dérive la relation précédente :

$$G'_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\left(NG_n(x) + (1-x)G'_n(x)\right) + \frac{x}{N}(NG'_n(x) - G'_n(x) + (1-x)G''_n(x)),$$

et on évalue en 1 pour obtenir

$$\mathbb{E}(T_{n+1}) = 1 + \frac{(N-1)}{N}\mathbb{E}(T_n).$$

On note $u_n = \mathbb{E}(T_n)$. Alors (u_n) est arithmético-géométrique, le point fixe de la relation de récurrence vérifie

$$x = 1 + \frac{N-1}{N}x,$$

i.e. $x = N$. Ainsi,

$$u_n = N + \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}(u_1 - N) = N - \frac{(N-1)^n}{N^{n-1}} = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).$$

On retrouve la limite trouvée avec les simulations. En python, on peut faire

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

```python
def esp(n,N):
    res = 0
    for _ in range(10000):
        res += nonvides(n,N)
    return res/10000

def suite(n,N):
    return N*(1-(1-1/N)**n)
```

4.4 Niels Descourvières

Exercice 46. On considère la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$U_n = \frac{1}{64^n}\left(\frac{1}{6n+1} + \frac{3}{2(6n+2)} + \frac{1}{4(6n+3)} - \frac{1}{8(6n+5)}\right)$$

1. (a) Montrer que la série de terme général U_n converge. On note $S = \sum U_n$.

Correction

On remarque que

$$|U_n| \leqslant \frac{4}{64^n},$$

terme général d'une série convergente. Donc $\sum U_n$ converge absolument, donc converge.

(b) Donner, à l'aide de python, une estimation de la valeur de S. Que dire de la convergence de S ?

Correction

On propose

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def U(n):
    return (1/64**n)*(1/(6*n+1) + 3/(2*(6*n+2)) + 1/(4*(6*n+3))-1/(8*(6*n+5))

def S(n):
    res = 0
    for i in range(n+1):
        res += U(i)
    return res
```

Quand on teste

```python
>>> S(5)
1.8137993642331873

>>> S(10)
1.8137993642342178

>>> S(100)
1.8137993642342178
```

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

on a l'impression d'une convergence **extrêmement** rapide.

(c) On pose :

$$\mathrm{I} = \int_0^{1/2} \frac{1+3x+x^2-2x^4}{1-x^6}\, dx$$

Justifier la convergence de I. Donner une estimation de $2\mathrm{I}$. Quelle relation peut-on conjecturer entre I et S ?

Correction

La fonction $x \mapsto \dfrac{1+3x+x^2-2x^4}{1-x^6}$ est continue sur $[0, 1/2]$, I converge donc. Ensuite, on tape

```python
def f(x):
    return (1 + 3*x + x**2 - 2*x**4)/(1 - x**6)

print(integr.quad(f,0,1/2)[0])
```

On conjecture que $S = 2\mathrm{I}$.

2. On note :

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x+x^2}\, dx, \quad \mathrm{I}_2 = \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x+x^2}\, dx, \quad \mathrm{I}_3 = \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x^2}\, dx$$

(a) Calculer I_1, I_2, I_3.

Correction

On calcule

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 &= \int_0^{1/2} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} dx \\
&= \int_0^{1/2} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^{1/2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(0 + \operatorname{Arctan}(1/\sqrt{3})\right) \\
&= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_2 &= \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x+x^2} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{2x-1}{1-x+x^2} dx + \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x+x^2} dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln(1-x+x^2)\right]_0^{1/2} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \\
&= \frac{\ln(3/4)}{2} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \\
&= \frac{\ln(3)}{2} - \ln(2) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_3 &= \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x^2} dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{-2x}{1-x^2} dx \\
&= -\frac{1}{2}[\ln(1-x^2)]_0^{1/2} \\
&= -\frac{1}{2}\ln(3/4).
\end{aligned}$$

(b) Déterminer $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que :

$$\alpha \mathrm{I}_1 + \beta \mathrm{I}_2 + \gamma \mathrm{I}_3 = \frac{\pi}{a\sqrt{b}}$$

Correction

Avec les calculs précédents, on remarque que

$$\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Mais ce n'est pas ce que l'on souhaite, car il faut α, β, γ non nuls et dans $\mathbb{N}^*$... on remarque donc que

$$\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

3. (a) Développer $(1-x^2)(1-x+x^2)(1+x+x^2)$.

Correction

Un développement donne $1 - x^6$.

(b) En déduire un polynôme $P(x)$ tel que :

$$\frac{\pi}{a\sqrt{b}} = \int_0^{1/2} \frac{P(x)}{1-x^6} dx$$

Correction

On sait que

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{a\sqrt{b}} &= \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3\\ &= \int_0^{1/2} \frac{1+x}{1-x+x^2} + \frac{x}{1-x^2}\,dx\\ &= \int_0^{1/2} \frac{1-x^2+x-x^3+x-x^2+x^3}{(1-x^2)(1-x+x^2)}\,dx\\ &= \int_0^{1/2} \frac{1+2x-2x^2}{(1-x^2)(1-x+x^2)}\,dx\\ &= \int_0^{1/2} \frac{(1+2x-2x^2)(1+x+x^2)}{1-x^6}\,dx\\ &= \int_0^{1/2} \frac{1+3x+x^2-2x^4}{1-x^6}\,dx = \mathrm{I}.\end{aligned}$$

(c) Calculer la somme :

$$\sum_{n\geqslant 0} U_n$$

Correction

On montre alors que $\sum_{n\geqslant 0} U_n = \mathrm{I}$. On écrit que

$$\mathrm{I} = \int_0^{1/2} \sum_{n\geqslant 0} x^{6n} + 3x^{6n+1} + x^{6n+2} - 2x^{6n+4}\,dx$$

Or, la somme de séries entières $\sum_{n\geqslant 0} x^{6n} + 3x^{6n+1} + x^{6n+2} - 2x^{6n+4}$ converge normalement sur $[0, 1/2]$ d'où la possibilité d'intervertir somme et intégrale :

$$\mathrm{I} = \sum_{n\geqslant 0} \int_0^{1/2} x^{6n} + 3x^{6n+1} + x^{6n+2} - 2x^{6n+4}\,dx = \frac{1}{2}S.$$

Donc $S = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

4.5 Fleurine Jaegler

Exercice 47. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 dans lesquelles sont répartis $2n$ jetons numérotés de 1 à $2n$. L'urne U_1 contient initialement r jetons ($0 \leqslant r \leqslant n$). On tire au hasard un numéro de jeton : s'il est dans U_1 on le place dans U_2 et inversement. On note X_p la variable aléatoire donnant le nombre de jetons contenu dans U_1 après p tirages.

1. Réaliser une fonction `jeu(n,r,p)` qui renvoie X_p.

Correction

On propose la fonction suivante

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def jeu(n,r,p):
    U1 = list(range(1,r+1))
    U2 = list(range(r+1,2*n+1))
    for i in range(p):
        x = rd.randint(1,2*n+1)
        if x in U1:
            U1.remove(x)
            U2.append(x)
        else:
            U2.remove(x)
            U1.append(x)
    return len(U1)
```

2. Pour $n = 9$ et $r = 4$, donner une estimation de l'espérance de X_p pour $p \in [\![100, 200]\!]$.

Correction

On propose la fonction suivante

```python
def estim(n,r,p,N):
    res = 0
    for _ in range(N):
        res += jeu(n,r,p)
    return res/N
```

On remarque que

```python
>>> estim(9,4,100,1000)
9.208

>>> estim(9,4,200,1000)
8.902
```

On a l'impression d'une convergence de $\mathbb{E}(X_p)$ vers n quand p tend vers $+\infty$.

3. Tracer, pour différentes valeurs de n et r, l'espérance de X_p en fonction de p pour $p \in [\![0, 4n]\!]$. Que peut-on conjecturer ?

Correction

On teste

```python
n=9
r=3
N = 1000
X = list(range(1,4*n))
Y = [estim(n,r,p,N) for p in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

Quelles que soient les valeurs testées, on a un joli graphe qui semble dire qu'il va y avoir convergence vers n, **quelle que soit la valeur de r.**

4. Déterminer l'espérance de X_1.

Correction

Les valeurs possibles prises par X_1 sont $r+1$ (si on a tiré une boule dans U_2) et $r-1$ (si on a tiré une boule dans U_1). Ainsi,

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{r}{2n}(r-1) + \frac{2n-r}{2n}(r+1) = \frac{r^2 - r + 2nr + 2n - r^2 - r}{2n} = (1+r) - \frac{r}{n}.$$

5. Pour $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, montrer que : $\mathbb{P}(X_{p+1} = k) = \dfrac{2n-k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k-1) + \dfrac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k+1)$.
Que peut-on dire pour $k = 0$ et $k = 2n$?

Correction

Soit $k \in [\![1, 2n-1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{p+1} = k) &= \sum_{i=0}^{2n} \mathbb{P}(X_{p+1} = k, X_p = i) \\ &= \mathbb{P}(X_{p+1} = k, X_p = k-1) + \mathbb{P}(X_{p+1} = k, X_p = k+1)\end{aligned}$$

car pour que $X_{p+1} = k$, il faut qu'il y ait $k-1$ ou $k+1$ boules dans l'urne 1. Mais alors,

$$\mathbb{P}_{X_p = k-1}(X_{p+1} = k) = \frac{2n - (k-1)}{2n},$$

car pour que $X_{p+1} = k$ en sachant que $X_p = k-1$, il faut avoir tiré une boule de l'autre urne. De même,

$$\mathbb{P}_{X_p = k+1}(X_{p+1} = k) = \frac{k+1}{2n},$$

d'où, par la définition d'une probabilité conditionnelle,

$$\mathbb{P}(X_{p+1} = k) = \frac{2n-k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k-1) + \frac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k+1).$$

En revanche,

$$\mathbb{P}(X_{p+1} = 0) = \mathbb{P}_{X_p = 1}(X_{p+1} = 0)\mathbb{P}(X_p = 1) = \frac{1}{2n}\mathbb{P}(X_p = 1)$$

et

$$\mathbb{P}(X_{p+1} = 2n) = \mathbb{P}_{X_p = 2n-1}(X_{p+1} = 2n)\mathbb{P}(X_p = 2n-1) = \frac{1}{2n}\mathbb{P}(X_p = 2n-1).$$

6. Montrer que : $G_{X_{p+1}}(s) = sG_{X_p}(s) + \dfrac{1-s^2}{2n}G'_{X_p}(s)$.

Correction

Soit $t \in [-1, 1]$. Alors

$$\begin{aligned}
G_{X_{p+1}}(t) &= \mathbb{P}(X_{p+1} = 0) + \sum_{k=1}^{2n-1} \mathbb{P}(X_{p+1} = k)t^k + \mathbb{P}(X_{p+1} = 2n)t^{2n} \\
&= \frac{1}{2n}\mathbb{P}(X_p = 1) + \sum_{k=1}^{2n-1} \left(\frac{2n-k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k-1) + \frac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k+1) \right) t^k + \frac{1}{2n}\mathbb{P}(X_p = 2n-1)t^{2n} \\
&= \frac{1}{2n}\mathbb{P}(X_p = 1) + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{2n-k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k-1)t^k + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k+1)t^k + \frac{1}{2n}\mathbb{P}(X_p = 2n-1)t^{2n} \\
&= \frac{1}{2n}\mathbb{P}(X_p = 1) + \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{2n-k}{2n}\mathbb{P}(X_p = k)t^{k+1} + \sum_{k=2}^{2n} \frac{k}{2n}\mathbb{P}(X_p = k)t^{k-1} + \frac{1}{2n}\mathbb{P}(X_p = 2n-1)t^{2n} \\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{2n-k}{2n}\mathbb{P}(X_p = k)t^{k+1} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{2n}\mathbb{P}(X_p = k)t^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \frac{2n-k}{2n}\mathbb{P}(X_p = k)t^{k+1} + \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{2n}\mathbb{P}(X_p = k)t^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}(X_p = k)t^{k+1} + \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n} k\mathbb{P}(X_p = k)(t^{k+1} - t^{k-1}) \\
&= tG_{X_p}(t) + \frac{1}{2n}(t^2 - 1)\sum_{k=1}^{2n} k\mathbb{P}(X_p = k)t^{k-1} \\
&= tG_{X_p}(t) + \frac{1 - t^2}{2n}G'_{X_p}(t).
\end{aligned}$$

7. Calculer l'espérance de X_p et prouver la conjecture établie en 3).

Correction

On admet que X_p admet une espérance et une variance, c'est-à-dire que G_{X_p} est deux fois dérivable sur $[-1,1]$. On a alors, pour t dans $[-1,1]$,

$$G'_{X_{p+1}}(t) = G_{X_p}(t) + tG'_{X_p}(t) - \frac{t}{n}G'_{X_p}(t) + \frac{1-t^2}{2n}G''_{X_p}(t),$$

donc, en évaluant en 1,

$$\mathbb{E}(X_{p+1}) = 1 + \mathbb{E}(X_p) - \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_p) = 1 + \frac{n-1}{n}\mathbb{E}(X_p).$$

On a donc, si on note $u_p = \mathbb{E}(X_p)$, u_p qui est une suite arithmético-géométrique, de relation de récurrence

$$u_{p+1} = 1 + \frac{n-1}{n}u_p,$$

de point fixe $\omega = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\omega$, i.e. $\omega = n$. On a alors, pour tout p dans $\mathbb{N}$,

$$u_p - \omega = \left(\frac{n-1}{n}\right)^p (u_0 - \omega) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $u_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} n$.

4.6 Marius le Goff

Exercice 48. Définition : On dit qu'une matrice A de taille $n \times n$ est **à spectre diagonal** si son polynôme caractéristique est scindé et que les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de A, avec la même multiplicité. Autrement dit, le polynôme caractéristique est :

$$\prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$$

où a_{ii} sont les éléments diagonaux de la matrice A.
Soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ à spectre diagonal et $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Justifiez que toutes les matrices de $\mathcal{E}_n$ sont trigonalisables.

Correction

Soit $A \in \mathcal{E}_n$. Alors χ_A est scindé, donc A est trigonalisable.

2. Écrire une fonction `polydiag(A)` qui renvoie les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice A, c'est-à-dire le produit :

$$\prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$$

Voici six matrices à analyser. Pour chaque matrice, calculez son polynôme caractéristique avec Python et vérifiez si elle appartient à $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_3$ en fonction de sa taille :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Correction

Là, il faut utiliser le module `Polynomial`. On propose

```
from numpy.polynomial import Polynomial
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
import numpy.random as rd
X = Polynomial([0,1])

def polydiag(A):
    res = X**0
    n = len(A)
    for i in range(n):
        res*= (X-A[i,i])
    return res

def polcar(A):
    return Polynomial(np.poly(A)[::-1])
```

Et on trouve que A_1 et A_5 sont à diagonale propre.

3. Caractériser $\mathcal{E}_2$.

Correction

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Analyse. Si $A \in \mathcal{E}_2$, alors on remarque que

$$\chi_A(x) = (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc$$

On souhaite que a et d soient racines de χ_A, c'est-à-dire que $bc = 0$. Donc b ou c est nul.

Réciproquement, si $bc = 0$, alors A est triangulaire et appartient bien à $\mathcal{E}_2$.

4. Donner une matrice 4×4 de $\mathcal{E}_4$ avec 13 coefficients réels non nuls.

Correction

Par la question 2, on sait que A_5 est dans $\mathcal{E}_3$. Alors en posant la matrice définie par blocs

$$A' = \begin{pmatrix} A_5 & 0_{3,1} \\ 0_{1,3} & 0 \end{pmatrix},$$

par déterminant par blocs, $\chi_{A'}(x) = x\chi_A(x)$, donc A' est bien dans $\mathcal{E}_4$.

5. On définit la matrice M de la manière suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Montrer que si A et C sont à spectre diagonal, alors M aussi.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

C'est complètement immédiat par calcul par blocs.

6. Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}_n$.

(a) Montrer que M^2 est diagonalisable puis que $M^2 = 0$.

Correction

On sait que M^2 est symétrique car $(M^2)^\top = M^\top M^\top = (-M) \times (-M) = M^2$; de plus, M^2 est à coefficients dans $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable. Mais les valeurs propres (complexes) de M^2 sont les carrés des valeurs propres de M, donc sont toutes nulles. Donc $M^2 = 0$.

(b) Exprimer $\mathrm{Tr}(M^2)$ en fonction des coefficients de M. En déduire que $M = 0$.

Correction

On sait que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(M^2) &= \sum_{i=1}^{n} [M^2]_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [M]_{ij}[M]_{ji} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} [M]_{ij}^2.
\end{aligned}$$

Mais comme $\mathrm{Tr}(M^2) = 0$, on en déduit que $\sum_{i=1}^{n} [M]_{ij}^2 = 0$ donc que M est nulle.

7. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F tel que $F \subset \mathcal{E}_n$?

Correction

Déjà, on sait que si F est un sous-espace vectoriel inclus dans $\mathcal{E}_n$, alors $F \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$, donc F est en somme directe avec $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, donc $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Réciproquement, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel inclus dans $\mathcal{E}_n$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

4.7 Maxime Nouvel

Exercice 49. Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}$.

1. Montrer que S est bien définie, périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Correction

On note, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\varphi_n(x) = \dfrac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}$. Alors pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \frac{1}{(2n+1)^3},$$

qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum \|\varphi_n\|_\infty$ est une série convergente, donc la série de fonctions $\sum \varphi_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. La continuité de S découle donc de la continuité de chaque φ_n, de même pour la périodicité.

2. Déterminer (théoriquement ou à l'aide de python) un entier N tel que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|S(x) - S_N(x)| \leqslant 10^{-3}.$$

Correction

Ce n'est pas complètement évident, car nous n'avons pas accès à la somme S. En revanche, on sait, par comparaison à une intégrale, que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant N+1} \frac{1}{(2n+1)^3} &\leqslant \sum_{n\geqslant N+1} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{(2t+1)^3} dt \\
&= \int_N^{+\infty} \frac{dt}{(2t+1)^3} \\
&= \left[-\frac{(2t+1)^{-2}}{4}\right]_N^{+\infty} \\
&= \frac{1}{4(2N+1)^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de choisir N tel que

$$(2N+1)^2 \geqslant 250,$$

soit $N \geqslant \dfrac{5\sqrt{10}-1}{2}$. $N = 8$ fonctionne très bien.

On définit le problème suivant :

$$\forall x \in [0, \pi], \forall t \in]0, +\infty[, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = S(x) \text{ pour tout } x, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

3. Vérifier que $u(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)e^{-(2n+1)^2 t}}{(2n+1)^3}$ est une solution du problème.

Correction

Il faut démontrer que pour tout x, $t \mapsto u(x, t)$ est $\mathscr{C}^1$ et que pour tout t, $x \mapsto u(x, t)$ est $\mathscr{C}^2$.

- soit $t \in]0, +\infty[$. On note $\psi_n(x) = \dfrac{\sin((2n+1)x)e^{-(2n+1)^2 t}}{(2n+1)^3}$. Alors
  — $\sum \psi_n$ converge simplement sur $[0, \pi]$,

— ψ_n est clairement $\mathscr{C}^2$, de dérivées

$$\psi_n'(x) = (2n+1)\frac{\cos((2n+1)x)\mathrm{e}^{-(2n+1)^2 t}}{(2n+1)^3} = \frac{\cos((2n+1)x)\mathrm{e}^{-(2n+1)^2 t}}{(2n+1)^2}$$

$$\psi_n''(x) = -\frac{\sin((2n+1)x)\mathrm{e}^{-(2n+1)^2 t}}{2n+1}$$

— pour tout x dans $[0, \pi]$,

$$|\psi_n''(x)| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-(2n+1)^2 t}}{2n+1},$$

donc $\|\psi_n\| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-(2n+1)^2 t}}{2n+1}$, terme général d'une série convergente, donc $\sum \psi_n$ converge normalement.

Donc $x \mapsto u(x,t)$ est $\mathscr{C}^2$, et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin((2n+1)x)\mathrm{e}^{-(2n+1)^2 t}}{2n+1}.$$

- soit $x \in [0, 2\pi]$, fixé. Soit $a > 0$. On note $\theta_n(t) = \dfrac{\sin((2n+1)x)\mathrm{e}^{-(2n+1)^2 t}}{(2n+1)^3}$ et on remarque que

$$\theta_n'(t) = -\frac{\sin((2n+1)x)\mathrm{e}^{-(2n+1)^2 t}}{2n+1}.$$

Alors

— pour tout t dans $[a, +\infty[$, $\sum \theta_n$ converge simplement,

— pour tout t dans $[a, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|\theta_n(t)| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-(2n+1)^2 a}}{2n+1},$$

indépendant de t, donc $\|\theta_n\|_\infty^{[a,+\infty[} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-(2n+1)^2 a}}{2n+1}$, terme général d'une série convergente, donc $\sum \varphi_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, donc uniformément.

Ainsi, $t \mapsto u(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ donc est $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n\geqslant 0} -\frac{\sin((2n+1)x)\mathrm{e}^{-(2n+1)^2 t}}{2n+1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

- les conditions au bord sont simples à vérifier : on a bien $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ pour tout t.

4. Tracer la fonction qui à x associe $u(x,t)$ pour t fixé. On prendra $t = 1$ et $t = 2$.

Correction

On propose

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

```

def u(x,t):
    res = 0
    for k in range(9):
        p = 2*k+1
        res += np.sin(p*x)*np.exp(-p**2*t)/p**3
    return res

t = 1
X = np.linspace(0,2*np.pi)
Y = [u(x,t) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

On obtient des sinusoïdes, bon...

5. En considérant, pour w solution du problème,

$$\int_0^{\pi} w(x,t)^2 \, dx,$$

déduire l'unicité du problème.

Correction

Soient u et v deux solutions du problème. En notant $w = v - u$, w est solution du problème mais avec $S(x) = 0$.

Notons $G(t) = \displaystyle\int_0^\pi w(x,t)^2 dx$. Montrons que G est dérivable et calculons sa dérivée. Soient $0 < a < b$.

- pour tout t dans $[a, b]$, $x \mapsto w(x,t)^2$ est continue (par morceaux), intégrable sur $[0, \pi]$,
- pour tout x dans $[0, \pi]$, $t \mapsto w(x,t)^2$ est dérivable sur $[a, +\infty[$, de dérivée
$$2w(x,t)\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)$$
- la fonction u est $\mathscr{C}^1$ sur le **fermé borné** $[0, \pi] \times [a, b]$ donc, par le théorème des bornes atteintes, elle y est bornée par $M > 0$, indépendant de x et de t, et intégrable sur $[0, \pi]$.

Donc, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, G est dérivable sur $[a, b]$ pour tous $0 < a < b$, donc sur $]0, +\infty[$, et pour tout $t > 0$
$$G'(t) = \int_0^\pi 2w(x,t)\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = \int_0^\pi 2w(x,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t).$$
Par intégration par parties, et nullité en $x = 0$ et $x = 2\pi$,
$$G'(t) = -2\int_0^\pi \left(\frac{\partial w}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx \leqslant 0.$$
Donc G décroît. Mais $G(0) = 0$ (car $w(x, 0) = 0$ pour tout x) et G est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc G est constante égale à 0, ce qui signifie que pour tout t dans $\mathbb{R}_+$,
$$\int_0^\pi w(x,t)^2 dt = 0,$$
donc, comme $x \mapsto w(x,t)^2$ est continue, positive, d'intégrale nulle, on en déduit que pour tout t dans $\mathbb{R}_+$ et pour tout x dans $[0, \pi]$, $w(x,t) = 0$, i.e. $u(x,t) = v(x,t)$.
On en déduit l'unicité du problème.

6. (question ajoutée) Étudier la limite de la solution du problème lorsque t tend vers $+\infty$.

Correction

Il suffit d'appliquer un théorème de double limite, bien plus simple que tout ce qui a été vu précédemment !

4.8 Maxence Herbelin

Exercice 50. On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On définit
$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{k+1} = \dfrac{1}{2}A_k(\mathrm{I}_n + (A_k^\top A_k)^{-1}) \end{cases}$$
Uniquement la question 1 se traite en Python.

1. (a) Diagonaliser $A^\top A$. Trouver B tel que $A^\top A = B^2$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

On propose

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.linalg as alg

A = np.array([[1,2,3],[-1,1,1],[1,0,2]])
M = np.dot(np.transpose(A),A)

vp,P = alg.eigh(M)
```

On sait alors que $A = PDP^\top$ où $D = \mathrm{diag}(\mathtt{vp})$. On sait alors que si on pose

$$B = P\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})P^\top,$$

on a $A = B^2$. Ici, on écrit donc

```
B = np.dot(np.dot(P,np.diag(np.sqrt(vp))),np.transpose(P))
```

(b) Déterminer $A_5^\top A$ et $A_6^\top A$. Que conjecturez-vous ?

Correction

On propose

```
def suite(A,k):
    res = np.copy(A)
    n = len(A)
    for i in range(k):
        res = (1/2)*np.dot(res,np.eye(n)+alg.inv(np.dot(np.transpose(res),res
    return res
```

On trouve

```
>>> np.dot(np.transpose(suite(A,6)),A)
array([[ 1.522058   , -0.03823412,  0.82575879],
       [-0.03823412,  1.77182152,  1.36351995],
       [ 0.82575879,  1.36351995,  3.38510499]])

>>> np.dot(np.transpose(suite(A,7)),A)
array([[ 1.522058   , -0.03823412,  0.82575879],
       [-0.03823412,  1.77182152,  1.36351995],
       [ 0.82575879,  1.36351995,  3.38510499]])
```

La suite $(A_k^\top A)_{k\in\mathbb{N}}$ semble converger vers une matrice symétrique.

2. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On note $M = A^\top A$.

(a) Montrer qu'il existe un $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = B^2$.

Correction

La matrice $A^\top A$ est symétrique réelle et, de plus, pour $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\left\langle A^\top AX, X\right\rangle = \|AX\|^2 \geqslant 0,$$

Donc $A^\top A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus, $A^\top A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, donc $A^\top A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Par le théorème spectral, on dispose de P orthogonale, de $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$ telles que $A = PDP^\top$. En posant $B = P\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P^\top$, on a le résultat.

(b) En considérant $Q = AB^{-1}$, montrer qu'il existe un couple $(Q, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = QS$.

Correction

On pose $Q = AB^{-1}$ et on montre que $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On calcule

$$\begin{aligned} Q^\top Q &= (B^{-1})^\top A^\top A B^{-1} \\ &= B^{-1}B^2B^{-1} \\ &= \mathrm{I}_n \end{aligned}$$

Donc $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $A = QB$ et $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

3. On montre l'unicité du couple :

(a) Montrer que la matrice B de la question 2.a (et donc S) peut être choisie comme étant un polynôme en M.

Correction

On note $\mu_1, \dots, \mu_p$ les racines **distinctes** de M. En prenant R le polynôme interpolateur de Lagrange vérifiant $R(\mu_i) = \sqrt{\mu_i}$, on a $B = R(M)$.

(b) Soit (Q_1, S_1) un autre couple satisfaisant $A = Q_1S_1$. Calculer S_1^2, et conclure.

Correction

On calcule

$$S_1^2 = S_1^\top S_1 = A^\top Q_1 Q_1^\top A = A^\top A = M.$$

L'unicité de S_1, puis de Q_1, vient alors de l'unicité de la racine carrée d'une matrice symétrique définie positive vue en cours.

4. Convergence de la suite :

(a) Montrer que pour tout k, $A_k^\top A_k$ est inversible,

Correction

On montre le résultat par récurrence immédiate.

(b) On note (Q_k, S_k) l'unique couple de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A_k = Q_kS_k$. Montrer que la suite $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante et que $S_{k+1} = \dfrac{1}{2}(S_k + S_k^{-1})$.

Correction

On sait que

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \frac{1}{2}A_k(\mathrm{I}_n + (A_k^\top A_k)^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}Q_kS_k(\mathrm{I}_n + S_k^{-2}). \end{aligned}$$

Mais $\frac{1}{2}S_k(\mathrm{I}_n + S_k^{-2})$ est symétrique définie positive, et Q_k est orthogonale, d'où, par unicité, $Q_{k+1} = Q_k$, et

$$S_{k+1} = \frac{1}{2}S_k(\mathrm{I}_n + S_k^{-2}) = \frac{1}{2}(S_k + S_k^{-1}).$$

(c) En déduire que $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Q$, où Q est le Q de la question 2.b

Correction

On remarque que les S_k sont toutes diagonalisables dans la même base ! Si on note $(\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)})$ les valeurs propres de S_k, on a

$$\lambda_i^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\lambda_i^{(k)} + \frac{1}{\lambda_i^{(k)}}\right).$$

On étudie alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) = f(u_n)$. On remarque que $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$, donc f décroît sur $]0,1]$ et croît sur $[1,+\infty[$. Mais si $x \in]0,1]$, $f(x) > 1$ alors que si $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant 1$ donc finalement, $u_n \in [1,+\infty[$ à partir du rang 1.
Enfin, on remarque que sur $[1,+\infty[$, $f(x) - x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right) \leqslant 0$, donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ décroît. Minorée par 1, elle converge vers le seul point fixe de f, 1.

4.9 Baptiste Rouard

Exercice 51. On considère un candidat qui doit se rendre sur un lieu de convocation. Pour cela, il dispose de 2 chemins, le chemin A et le chemin B. Il prend le chemin A avec une probabilité $p \in]0,1[$. On note T la variable aléatoire égale au temps de trajet du candidat. Le temps de trajet du chemin, en minutes, A (respectivement B) suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$ (respectivement $b > 0$).

1. Justifier que $T(\Omega) = \mathbb{N}$.

Correction

Une variable de Poisson est à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'où $T(\Omega) = \mathbb{N}$.

2. (a) Écrire une fonction prenant comme argument p, a et b et renvoyant la valeur de T.

Correction

On propose

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulT(p,a,b):
    x = rd.binomial(1,p)
    if x==1:
        return rd.poisson(a)
```

```python
    else:
        return rd.poisson(b)
```

(b) On pose $a = 5$ et $b = 10$. Donner les valeurs moyennes de T pour $N = 500$ simulations pour $p \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$.

Correction

On propose

```python
a = 5
b = 10
N = 500

def estimoy(p,a,b):
    res = 0
    for _ in range(N):
        res += simulT(p,a,b)
    return res/N

for p in [1/4,1/2,3/4]:
    print(estimoy(p,a,b))
```

On trouve

```
>>> (executing cell "" (line 1 of "exo09031-python.py"))
6.18
7.386
8.76
```

(c) Comment peut-on approcher la valeur de $\mathbb{E}(T)$? À quel résultat du cours pensez-vous ? Sous quelles hypothèses ?

Correction

La question précédente permet d'approcher la valeur de $\mathbb{E}(T)$, en vertu de la loi faible des grands nombres (qui est utilisable si T admet une variance).

3. Déterminer la loi de T en fonction de p, a et b. Donner sa fonction génératrice, et calculer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$ si elles existent.

Correction

On note X la variable de Bernoulli correspondant au chemin choisi. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T = n) &= \mathbb{P}_{X=0}(T = n)\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}_{X=1}(T = n)\mathbb{P}(X = 1) \\
&= (1 - p)\frac{e^{-b}b^n}{n!} + p\frac{e^{-a}a^n}{n!}.
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour $t \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} G_T(t) &= \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(T=n)t^n \\ &= (1-p)e^{-b}e^{bt} + pe^{-a}e^{at} \\ &= (1-p)e^{b(t-1)} + pe^{a(t-1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, on voit que G_T est infiniment dérivable en 1, donc T admet une espérance et une variance. Déjà,

$$\mathbb{E}(T) = G_T'(1) = b(1-p) + ap.$$

Ensuite, on sait que

$$G_T''(1) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T),$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(T) &= G_T''(1) + \mathbb{E}(T) - \mathbb{E}(T)^2 \\ &= b^2(1-p) + a^2p + b(1-p) + ap - (b(1-p)+ap)^2 \end{aligned}$$

4. On reprend les mêmes valeurs que dans la question 2., avec $p = 1/2$ On souhaite obtenir dans 95% des cas, un écart maximum de 30 secondes entre la valeur moyenne pour N simulations et l'espérance de T. Déterminer N afin de respecter cette exigence. Trouver ce N à l'aide de Python. *Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*

Correction

On note $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_n$, (T_n) étant une suite de vaiid telles que $T_i \sim T$. On sait que $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{\mathbb{V}(T)}{n}$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, que

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(T)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(T)}{n\varepsilon^2}.$$

On veut choisir n tel que

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(T)| \geqslant 1/2\right) \leqslant \frac{5}{100}.$$

Il suffit donc de choisir n tel que

$$\frac{4\mathbb{V}(T)}{n} \leqslant \frac{5}{100},$$

donc

$$n \geqslant 80\mathbb{V}(T).$$

Avec python, on trouve $n = 1100$.

5. On considère maintenant que ce candidat rejoint une amie. Cette amie reste au lieu de rendez-vous pendant une durée qui suit une loi de Poisson de paramètre $c > 0$. On note R la variable aléatoire égale à 1 si les 2 amis se rencontrent et 0 sinon (l'amie est déjà partie).

6. (a) Définir une fonction prenant en argument p, a, b et c et renvoyant la valeur de R.

Correction

On propose

```
def simulR(p,a,b,c):
    T = simulT(p,a,b)
    U = rd.poisson(c)
    return T<U
```

(b) Déterminer la loi de R.

Correction

On note U la variable du temps d'attente de l'amie. R est à valeurs dans $\{0,1\}$. Ensuite, si on note $q = \mathbb{P}(R=1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
q &= \mathbb{P}(R=1)\\
&= \mathbb{P}(T \leqslant U)\\
&= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(T=n, T\leqslant U)\\
&= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(T=n, n\leqslant U)\\
&= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(T=n)\mathbb{P}(n\leqslant U) \text{ par indépendance}\\
&= \sum_{n\geqslant 0} \left((1-p)\frac{\mathrm{e}^{-b}b^n}{n!} + p\frac{\mathrm{e}^{-a}a^n}{n!}\right) \sum_{k\geqslant n} \mathrm{e}^{-c}\frac{c^k}{k!}.
\end{aligned}$$

(c) Exprimer son espérance et sa variance.

Correction

Si on note q le paramètre de R,

$$\mathbb{E}(R) = q \text{ et } \mathbb{V}(R) = q(1-q).$$

(d) Vérifier les résultats avec python.

Correction

On propose

```
from math import factorial,exp
N = 10000
def estimoyR(p,a,b,c):
    res = 0
    for _ in range(N):
        res += simulR(p,a,b,c)
    return res/N

def somm(p,a,b,c):
```

```
    res = 0
    for n in range(100):
        for k in range(n,100):
            res+=((1-p)*exp(-b)*b**n/factorial(n)+
            p*exp(-a)*a**n/factorial(n))*exp(-c)*c**k/factorial(k)
    return res
```

Les résultats sont cohérents.

4.10 Aurélien Simone

Exercice 52. Deux amis se donnent rendez-vous. On modélise par X et Y le temps de retard respectif des deux amis. On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes. On définit $T = |X - Y|$.

1. Que représente T ?

Correction

T représente le temps qu'attendra l'un des deux amis.

2. En Python, écrivez une fonction `rdv` qui prend en argument le nombre de simulations et renvoie n simulations de T pour les quatre cas suivants :

- X, Y uniformes dans $[\![0, 14]\!]$
- $X + 1, Y + 1$ géométriques de paramètre $p \in]0, 1[$
- $X + 1$ géométrique p et Y poisson de paramètre λ
- X, Y de Poisson de paramètre λ

Pour les simulations, on prendre $p = 1/3$ et $\lambda = 10$.

3. À l'aide de Python, tracez une estimation de $P(T = k)$ en fonction de k (on se limitera à $k \leqslant 40$) et estimez l'espérance de T pour les quatre cas.

Correction

Il s'agit de faire beaucoup d'expériences et de moyenner. On propose pour les deux questions python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def retard(X,Y):
    return abs(X-Y)

N = 1000
p = 1/3
lam = 10

## deux uniformes

L = [0 for _ in range(41)]
res = 0

for _ in range(N):
    x = retard(rd.randint(0,15),rd.randint(0,15))
    if x<=40:
```

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

```
        L[x]+=1
    res+=x

L = [x/N for x in L]
res = res/N

plt.plot(range(41),L,'-o')
plt.show()

## deux géométriques

L = [0 for _ in range(41)]
res = 0

for _ in range(N):
    x = retard(rd.geometric(p),rd.geometric(p))
    if x<=40:
        L[x]+=1
    res+=x

L = [x/N for x in L]
res = res/N

plt.plot(range(41),L,'-o')
plt.show()

## géométrique et poisson

L = [0 for _ in range(41)]
res = 0

for _ in range(N):
    x = retard(rd.geometric(p),rd.poisson(lam))
    if x<=40:
        L[x]+=1
    res+=x

L = [x/N for x in L]
res = res/N

plt.plot(range(41),L,'-o')
plt.show()

## deux poisson

L = [0 for _ in range(41)]
res = 0

for _ in range(N):
    x = retard(rd.poisson(lam),rd.poisson(lam))
    if x<=40:
        L[x]+=1
    res+=x

L = [x/N for x in L]
res = res/N

```

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

```python
plt.plot(range(41),L,'-o')
plt.show()
```

4. Montrer que $P(T = 0) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X = j)P(Y = j)$ et donner la formule permettant de déterminer $P(T = k)$.

Correction

On remarque que, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=0) &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(T=0, Y=n)\\ &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(|X-Y|=0, Y=n)\\ &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(|X-n|=0, Y=n)\\ &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X=n, Y=n)\\ &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=n) \text{ par indépendance}\end{aligned}$$

Ensuite, par le même raisonnement,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=k) &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(T=k, Y=n)\\ &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(|X-Y|=k, Y=n)\\ &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(|X-n|=k, Y=n)\\ &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X=n-k \sqcup X=n+k, Y=n)\\ &= \sum_{n\geqslant 0} \left(\mathbb{P}(X=n-k)+\mathbb{P}(X=n+k)\right)\mathbb{P}(Y=n) \text{ par indépendance}\end{aligned}$$

5. Déterminez la loi de T pour les deux premiers cas.

Correction

Traitons les deux cas :

- **cas uniforme.** On remarque que T est à valeurs dans $[\![0, 14]\!]$, que $\mathbb{P}(T = 0) = \dfrac{1}{15}$

et que pour $k \in [\![1, 14]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T = k) &= \sum_{n=0}^{14} \left(\mathbb{P}(X = n - k) + \mathbb{P}(X = n + k)\right) \mathbb{P}(Y = n) \\
&= \frac{1}{15} \sum_{n=0}^{14} \mathbb{P}(X = n - k) + \mathbb{P}(X = n + k) \\
&= \frac{1}{15} \left[\sum_{n=k}^{14} \mathbb{P}(X = n - k) + \sum_{n=0}^{14-k} \mathbb{P}(X = n + k)\right] \\
&= \frac{1}{15} \left[\frac{14 - k + 1}{15} + \frac{14 - k + 1}{15}\right] \\
&= \frac{30 - 2k}{225}
\end{aligned}$$

- **cas de deux géométriques de paramètre** p**.** On note $q = 1 - p$. On remarque que T est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et que

$$\mathbb{P}(T = 0) = p^2 \sum_{n \geqslant 1} q^{2k-2} = \frac{p^2}{1 - q^2} = \frac{p}{2 - p}.$$

Puis, si $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T = k) &= \sum_{n \geqslant 1} \left(\mathbb{P}(X = n - k) + \mathbb{P}(X = n + k)\right) \mathbb{P}(Y = n) \\
&= \sum_{n \geqslant k} \mathbb{P}(X = n - k)\mathbb{P}(Y = n) + \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(X = n + k)\mathbb{P}(Y = n) \\
&= \sum_{n \geqslant k+1} pq^{n-k-1}pq^{n-1} + \sum_{n \geqslant 1} pq^{n+k-1}pq^{n-1} \\
&= p^2q^k \sum_{n \geqslant k+1} (q^2)^{n-k-1} + p^2q^k \sum_{n \geqslant 1} (q^2)^{n-1} \\
&= p^2q^k \frac{1}{1 - q^2} + p^2q^k \frac{2}{1 - q^2} \\
&= \frac{2pq^k}{2 - p}
\end{aligned}$$

6. Montrer que T admet une espérance finie si X et Y admettent une espérance finie.

Correction

Si X et Y admettent une espérance finie, comme $|T| \leqslant |X| + |Y|$, on en déduit que T admet une espérance finie.

7. Calculez l'espérance de T pour les deux premiers cas.

Correction

On sépare les deux cas :

- **dans le cas uniforme,**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{k=1}^{14} k\mathbb{P}(T=k) \\
&= \sum_{k=1}^{14} k\frac{30-2k}{225} \\
&= \frac{2}{15}\sum_{k=1}^{14} k - \frac{2}{225}\sum_{k=1}^{14} k^2 \\
&= \frac{2}{15}\frac{14\times 15}{2} - \frac{2}{15^2}\frac{14\times 15\times 29}{6} \\
&= 14 - \frac{28\times 29}{6\times 15} \\
&= 14 - \frac{406}{45} \\
&= \frac{224}{45}
\end{aligned}$$

- **dans le cas géométrique,**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{k\geqslant 1} k\mathbb{P}(T=k) \\
&= \sum_{k\geqslant 1} k\frac{2pq^k}{2-p} \\
&= \frac{2pq}{2-p}\sum_{k\geqslant 1} kq^{k-1} \\
&= \frac{2pq}{2-p}\frac{1}{(1-q)^2} \\
&= \frac{2(1-p)}{p(2-p)}
\end{aligned}$$

8. (Question ajoutée) On admet que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, alors $\mathbb{E}(T) = \sqrt{\lambda+\mu}$. Calculer $\mathbb{V}(T)$ et montrer qu'elle est minimale lorsque $\lambda = \mu$.

Correction

On sait que

$$\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2 = \mathbb{E}(T^2) - \lambda - \mu.$$

Or,

$$\mathbb{E}(T^2) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \text{ par indépendance}$$

Mais

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \lambda + \lambda^2$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T^2) &= \lambda + \lambda^2 + \mu + \mu^2 - 2\lambda\mu \\ &= \lambda + \mu + (\lambda - \mu)^2,\end{aligned}$$

minimal lorsque $\lambda = \mu$.

4.11 Étienne Sponton

Exercice 53. Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

1. Montrer la convergence de la somme de la suite et donner une approximation à 10^{-6} près.
2. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} U_k = \ln(2).$$
3. On veut réorganiser la suite sous le nom de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en prenant à la suite deux termes positifs et un terme négatif :
$$V : \left\{1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{4}, \dots\right\}.$$
4. Écrire la fonction $V(n)$ et donner $V(250)$, $V(251)$, et $V(252)$.
5. Soit t_n la somme partielle des suites (V_n). Donner une valeur approchée de t_{250}, t_{251}, et t_{252}.
6. Faire le rapport $\dfrac{s_n}{t_n}$ et trouver une conjecture.
7. Prouver la conjecture.
8. Considérons une généralisation de la suite (V_n) sous la forme suivante : on prend p termes positifs et q termes négatifs dans la suite. Trouver la limite de cette suite généralisée.

Correction

C'est le DM1... exercice non corrigé !

5 Concours Mines-Telecom

5.1 Théophile Cirier

Exercice 54. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p.

1. Calculer $P(X_i > k)$ et $P(X_i \leqslant k)$.

Correction

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_i > k) &= \sum_{j>k} \mathbb{P}(X_i = j) \\ &= \sum_{j \geqslant k+1} pq^{j-1} \\ &= pq^k \frac{1}{1-q} = q^k.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X_i \leqslant k) = 1 - \mathbb{P}(X_i > k) = 1 - q^k$.

2. Soit $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

(a) Calculer $P(Y > k)$ puis $P(Y \leqslant k)$ et $P(Y = k)$.

Correction

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > k) &= \mathbb{P}(\min(X_1, \ldots, X_n) > k) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > k \text{ et } X_2 > k \text{ et } \ldots \text{ et } X_n > k) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > k) \text{ par indépendance.} \\ &= \prod_{i=1}^{n} q^k \boxed{= q^{nk}}\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(Y \leqslant k) = 1 - q^{nk}$ et $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y > k-1) - \mathbb{P}(Y > k) = q^{n(k-1)} - q^{nk} = q^{n(k-1)}(1 - q^n)$.

(b) Montrer que Y a une espérance finie, que l'on calculera.

Correction

On sait que pour Y à valeurs dans $[0, +\infty]$ (fermé !), on a juste à calculer l'espérance. Mais comme Y Est à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}(X \geqslant 1).$$

Donc, ici,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(Y\geqslant k)\\ &= \sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(Y>k)\\ &= \sum_{k\geqslant 0} q^{nk}\\ &= \frac{1}{1-q^n} < +\infty,\end{aligned}$$

donc Y admet une espérance finie, égale à $\dfrac{1}{1-q^n}$.

Exercice 55. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, et $A_n\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

1. Soit $D_n=\det(A_n)$. Montrer que $D_{n+2}=2D_{n+1}-D_n$.

Correction

Soit $n\geqslant 3$. Développons D_n selon la première ligne. Alors

$$D_n = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\end{vmatrix}_{[n-1]} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0 & \vdots\\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\end{vmatrix}_{[n-1]}.$$

Développons le deuxième déterminant selon la première colonne. Alors

$$D_n = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\end{vmatrix}_{[n-1]} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\end{vmatrix}_{[n-2]} = 2D_{n-1}-D_{n-2},$$

d'où la relation de récurrence désirée.

2. Calculer D_n.

Correction

La suite D_n satisfait une relation de récurrence d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, avec donc une racine double. Donc on dispose de A et B réels tels que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $D_n = (A+Bn).1^n$, i.e. $D_n = A + Bn$. Or, $D_1 = 2$ et $D_2 = 3$ donc $A + B = 2$ et $A + 2B = 3$ donc $A = B = 1$ et, pour tout n, $D_n = n + 1$.

3. A_n est-elle diagonalisable ? Est-ce que 0 est une valeur propre ?

Correction

La matrice A_n est symétrique réelle donc est diagonalisable. Ensuite, 0 n'est pas valeur propre de A_n car $\det(A_n) = n + 1$.

5.2 Elise D'Andrea

Exercice 56. Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $U_n(x) = \dfrac{1}{xn^2 + n}$.

1. Montrer la convergence de la série de terme général $U_n(x)$ pour $x > 0$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$U_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{xn^2},$$

terme général d'une série convergente. Donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 0} U_n(x)$ converge.

2. Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$

Correction

On sait que

- la série de fonctions $\sum U_n$ converge simplement,
- pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, U_n est $\mathscr{C}^1$ et

$$U_n'(x) = -\frac{n^2}{(xn^2+n)^2},$$

- soit $a > 0$ Alors pour $x \in [a, +\infty[$,

$$|U_n'(x)| \leqslant \frac{n^2}{(an^2+n)^2},$$

indépendant de x, donc

$$\|U_n'\|_\infty^{[a,+\infty[} \leqslant \frac{n^2}{(an^2+n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2n^2},$$

terme général d'une série convergente. Donc la série de fonctions $\sum U_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc sur $]0,+\infty[$.

3. Montrer qu'il existe $K>0$ tel que :

$$\forall x>0,\ \left|S(x)-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right|\leqslant\frac{K}{x^2}$$

Correction

Soit $x>0$. Alors

$$\begin{aligned}\left|S(x)-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{xn^2+n}-\frac{1}{xn^2}\right|\\ &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(xn^2+n)xn^2}\right|\\ &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(xn+1)xn^2}\\ &\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{x^2n^3}=\frac{K}{x^2},\end{aligned}$$

en notant $K=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$.

4. (question ajoutée) En déduire un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Correction

On en déduit que

$$S(x)-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\underset{x\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^2}\right)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x}\right),$$

d'où

$$S(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{6x}.$$

Exercice 57. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E.
Soit $H=\{h\in\mathcal{L}(E)\ ;\ h\circ p=-p\circ h\}$

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.

Correction

On remarque que $H=\ker(\varphi)$ où

$$\varphi:\left|\begin{array}{l}\mathscr{L}(E)\to\mathscr{L}(E)\\ \quad h\mapsto h\circ p+p\circ h\end{array}\right.,$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

qui est linéaire : si h, k sont dans $\mathscr{L}(E)$ et λ, μ dans $\mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda h + \mu k) &= (\lambda h + \mu k) \circ p + p \circ (\lambda h + \mu k)\\ &= \lambda h \circ p + \mu k \circ p + \lambda p \circ h + \mu p \circ k\\ &= \lambda \varphi(h) + \mu \varphi(k).\end{aligned}$$

2. Soit $f \in H$.

(a) Montrer que $\ker(p)$ est stable par f.

Correction

Soit $x \in \ker(p)$. Alors

$$p(f(x)) = -f(p(x)) = -f(0_E) = 0_E,$$

donc $f(x) \in \ker(p)$ donc $\ker(p)$ est bien stable par f.

(b) Démontrer que $\mathrm{Im}(p)$ est stable par f.

Correction

Soit $x \in \mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$. Alors $p(x) = x$. Or,

$$p(f(x)) = -f(p(x)) = -f(x).$$

Donc $f(x) \in \ker(p + \mathrm{Id}_E)$. Mais -1 n'est jamais valeur propre d'un projecteur ! Donc $f(x) = 0_E \in \mathrm{Im}(p)$. Donc $\mathrm{Im}(p)$ est stable par f.

(c) Donner la matrice de f dans une base de E adaptée à p.

Correction

On note $(e_1, \dots, e_k)$ une base de $\ker(p)$ et $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$. Alors, dans cette base, la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} A & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & 0_{n-k} \end{pmatrix}, \text{ où } A \in \mathscr{M}_k(\mathbb{K}).$$

5.3 Nils Dérouet

Exercice 58. Pour $x \neq 0$ on pose $k(x) = \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2}$

1. k est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Correction

On remarque que

$$k(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2},$$

donc k est prolongeable par continuité en 0.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

2. k est-elle prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Correction

On sait que pour tout $x \neq 0$,

$$k'(x) = \frac{-\sin(x)x^2 - (\cos(x)-1)2x}{x^4} = -\frac{\sin(x)x^2 + 2x(\cos(x)-1)}{x^4}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\sin(x)x^2 + 2x(\cos(x)-1) &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)x^2 + 2x\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^3 - \frac{x^5}{6} - x^3 + \frac{x^5}{12} + o(x^5)\\ &\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^5}{12}.\end{aligned}$$

D'où $k'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x}{12} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc k' possède une limite nulle en 0. k étant continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit, par le théorème du prolongement de la classe $\mathscr{C}^1$, que k est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Que peut-on dire de plus ?

Correction

En fait, cos est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$$\cos(x) - 1 = \sum_{p\geqslant 1}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

donc

$$k(x) = \sum_{p\geqslant 1}(-1)^p\frac{x^{2p-1}}{(2p)!},$$

développable en série entière donc $\mathscr{C}^\infty$ sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 59. Soit, dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, le plan

$$\mathscr{P} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z+t = x-y+z-t = 0\right\}.$$

Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$.

Correction

On détermine déjà une base orthonormée de $\mathscr{P}$. Pour ce faire, on résout le système linéaire :

soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ \quad -2y-2t=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ \quad -2y-2t=0 \\ \qquad z=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R} \\ \qquad t=\beta,\ \beta\in\mathbb{R} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\alpha \\ y=-\beta \\ z=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R} \\ t=\beta,\ \beta\in\mathbb{R} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha\\-\beta\\\alpha\\\beta \end{pmatrix},\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\-1\\0\\1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Or, ces deux vecteurs sont orthogonaux, donc une base orthonormée de $\mathscr{P}$ est (u, v) où $u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}$ et $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0\\-1\\0\\1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, si $\pi_{\mathscr{P}}$ est la projection orthogonale sur $\mathscr{P}$, on a ;

$$\forall X = \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,\ \pi_{\mathscr{P}}(X) = \langle X, u\rangle\, u + \langle X, v\rangle\, v = \frac{-x+z}{2}u + \frac{-y+t}{2}v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-z\\y-t\\-x+z\\-y+t \end{pmatrix} = AX,$$

où A est la matrice de $\pi_{\mathscr{P}}$ dans la base canonique au départ et à l'arrivée :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$ a pour expression $s = p - q = 2p - \mathrm{Id}_E$, on en déduit que la matrice de cette symétrie dans cette base canonique est donc

$$2A - \mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(On reconnaît qu'on a bien la matrice d'une symétrie)

5.4 Nicolas Dumitrescu-Palcau

Exercice 60. On pose, pour tout $x > 0$, pour tout $t \geqslant 1$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{t(t+x)}$$

1. Montrer que $\varphi(t) = \dfrac{1/x}{t} - \dfrac{1/x}{t+x}$.

Correction

C'est juste un calcul :

$$\frac{1/x}{t} - \frac{1/x}{t+x} = \frac{1}{x}\frac{t+x-t}{t(t+x)} = \frac{1}{t(t+x)}.$$

2. Donner la nature et calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)dt$.

Correction

On fixe $x > 0$:

- $t \mapsto \dfrac{1}{t(t+x)}$ est continue sur $[1, +\infty[$,
- $\dfrac{1}{t(t+x)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, intégrable en $+\infty$, donc φ est intégrable en $+\infty$,

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge. Soit $A > 0$. Alors

$$\begin{aligned}\int_1^A \varphi(t)dt &= \frac{1}{x}\int_1^A \frac{dt}{t} - \frac{1}{x}\int_1^A \frac{dt}{t+x} \\ &= \frac{1}{x}\left(\ln(A) - \ln(1) - \ln(A) + \ln(1+x)\right) \\ &= \frac{\ln(1+x)}{x}.\end{aligned}$$

3. On pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n(n+x)}$. Soit la série $\sum f_n$ de somme S, pour quelles valeurs de x cette série converge-t-elle ? Étudier la continuité de S sur son ensemble de définition.

Correction

Si $x \in \mathbb{Z}_-^*$, alors f_{-x} n'est pas définie en x. Sinon, pour x qui n'est pas un entier négatif, on remarque que

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2},$$

donc $\sum f_n(x)$ converge. Donc cette série converge sur $\mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}_-^*\}$.

Étudions la continuité de S,

- sur $[0, +\infty[$. On sait que
  - pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, f_n est continue,

— pour tout x dans $[0, +\infty[$,
$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2},$$
indépendante de n. Donc $\sum \|f_n\|_\infty^{[0,+\infty[}$ converge, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement.

Donc $\sum f_n$ est continue.

- soit $n \in \mathbb{N}$, et a, b tels que $[a, b] \subset]-n-1, -n[$. Alors
  — pour tout pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[a, b]$,
  — pour tout x dans $[0, +\infty[$,
$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n(n+a)},$$
indépendante de n et terme général d'une série convergente. Donc $\sum \|f_n\|_\infty^{[a,b]}$ converge, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

Donc $\sum f_n$ est continue sur $[a, b]$ quels que soient a et b, donc sur $]-n-1, -n[$.

Ainsi, f est continue sur son ensemble de définition.

4. Montrer que $S(x) \sim \dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$.

Correction

Soit $x > 0$. On effectue une comparaison à une intégrale. La fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc
$$\frac{1}{(n+1)(n+1+x)} \leqslant \int_n^{n+1} \leqslant \frac{1}{n(n+x)},$$
d'où, en sommant de 1 à $+\infty$,
$$S(x) - \frac{1}{1+x} \leqslant \int_1^{+\infty} \varphi(t)dt \leqslant S(x),$$
d'où
$$S(x) - \frac{1}{1+x} \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant S(x)$$
Mais $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$, d'où
$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(x) + \ln(1+1/x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x}.$$

Exercice 61. On dit que u est un endomorphisme anti-adjoint si pour tout x $\langle u(x), x\rangle = 0$.

1. Montrer que pour tous x et y, $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$.

Correction

Soient x et y. Alors $\langle u(x+y), x+y\rangle = 0$, donc $\langle u(x) + u(y), x+y\rangle = 0$, d'où
$$\langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle = 0,$$

donc, comme $\langle u(x), x\rangle = \langle u(y), y\rangle = 0$,

$$\langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle = 0,$$

d'où

$$\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle .$$

2. Soit M la matrice de u dans une base orthonormée. Montrer que M est antisymétrique.

Correction

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base orthonormée dans laquelle M est la matrice de u. Alors

$$[M]_{ji} = \langle u(e_i), e_j\rangle = -\langle u(e_j), e_i\rangle = -[M]_{ij},$$

donc M est antisymétrique.

3. Montrer que si u est anti-adjoint, $s = u \circ u$ est un endomorphisme autoadjoint.

Correction

Si u est anti-adjoint, alors pour x et y dans E,

$$\langle u \circ u(x), y\rangle = \langle u(u(x)), y\rangle = -\langle u(x), u(y)\rangle = -(-\langle x, u(u(y))\rangle) = \langle x, u \circ u(y)\rangle ,$$

donc $u \circ u$ est autoadjoint.

4. Démontre que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont des supplémentaires orthogonaux.

Correction

Soient x dans $\ker(u)$ et y dans $\mathrm{Im}(u)$. Alors on dispose de w tel que $y = u(w)$. On a donc

$$\langle x, y\rangle = \langle x, u(w)\rangle = -\langle u(x), w\rangle = 0,$$

donc $\ker(u) \perp \mathrm{Im}(u)$, donc $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont en somme directe. Par le théorème du rang, $\dim(\ker(u)) + \dim(im(u)) = \dim(E)$ donc $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires.

5.5 Gavivarsan Ganeshanathan

Exercice 62. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer l'existence d'un vecteur propre $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Correction

La matrice A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable en base orthonormée. Il existe donc un vecteur propre X de A.

On définit $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ par $B = \begin{pmatrix} A & XX^\top \\ XX^\top & A \end{pmatrix}$.

2. Donner les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $Y_a = \begin{pmatrix} X \\ aX \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B.

Correction

On note λ le réel tel que $AX = \lambda X$. On calcule par blocs

$$\begin{aligned} BY_a &= \begin{pmatrix} AX + aXX^\top X \\ XX^\top X + AaX \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda + a\|X\|^2)X \\ (\|X\|^2 + \lambda a)X \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il faut donc que $(\|X\|^2 + \lambda a) = a(\lambda + a\|X\|^2)$, c'est-à-dire que

$$\|X\|^2 a^2 = \|X\|^2 ,$$

donc que $\boxed{a = \pm 1}$.

3. Donner une base de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de B.

Correction

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de A. Étant donné la question précédente, la famille

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_1 \\ -e_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_2 \\ e_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_2 \\ -e_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} e_n \\ e_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_n \\ -e_n \end{pmatrix}$$

est une famille de vecteurs propres de B. On vérifie que c'est bien une base de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.
Soient $(\alpha_1, \alpha_{-1}, \alpha_2, \alpha_{-2}, \dots, \alpha_n, \alpha_{-n})$, $2n$ réels tels que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \begin{pmatrix} e_i \\ e_i \end{pmatrix} + \alpha_{-i} \begin{pmatrix} e_i \\ -e_i \end{pmatrix} = 0_{2n,1}.$$

Alors, en regardant les n premières lignes de chaque vecteur, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha_{-i}) e_i = 0$ donc pour tout i, $\alpha_i + \alpha_{-i} = 0$.
Ensuite, en regardant les n dernières lignes de chaque vecteur, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{-i}) e_i = 0$ donc pour tout i, $\alpha_i - \alpha_{-i} = 0$.
On conclut donc que pour tout i, $\alpha_i = \alpha_{-i} = 0$.

4. On suppose $n = 3$. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. On définit B comme ci-dessus. Donner un polynôme annulateur de B de degré 3 .

Correction

On sait que A est diagonalisable (car symétrique réelle), de valeurs propres 0 et 3. On sait ensuite que les valeurs propres de B sont les $\lambda \pm \|X\|^2$. Or, ici, $\|X\|^2 = \sqrt{3}$. Ainsi, les valeurs propres de B sont

$$3, -3, 3-3, 3+3, \text{ c'est-à-dire } \{-3, 3, 6\}.$$

Ainsi, comme B est diagonalisable et qu'il ne possède que 3 valeurs propres, on en déduit que $(X+3)(X-3)(X-6)$ annule B.

Exercice 63. Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3 + x^2}$ définit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction

On note pour tout n dans $\mathbb{N}^*$

$$\varphi_n : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\cos(nx)}{n^3 + x^2} \end{array} \right. .$$

Alors

- pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^3},$$

terme général d'une série convergente, donc $\sum \varphi_n(x)$ converge absolument donc converge. Donc la série de fonctions $\sum \varphi_n$ converge simplement (en fait normalement mais ce n'est pas important ici).

- pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, φ_n est dérivable et

$$\varphi_n'(x) = \frac{-n\sin(nx)(n^3 + x^2) - 2x\cos(nx)}{(n^3 + x^2)^2}$$

- soit $a > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-a, a]$. Alors

$$|\varphi_n'(x)| \leqslant \frac{n^4 + na^2 + 2a}{n^6},$$

quantité indépendante de x. Donc

$$\|\varphi_n'\|_\infty^{[-a,a]} \leqslant \frac{n^4 + na^2 + 2a}{n^6} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2},$$

terme général d'une série convergente donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|\varphi_n\|_\infty^{[-a,a]}$ converge, donc la série de fonctions $\sum \varphi_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-a, a]$.

On en déduit donc que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \varphi_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \varphi_n'$.

5.6 Oriane Gicquiaux

Exercice 64. Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1. Montrer que $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Correction

Déjà, Z est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$. Ensuite, si $k \in \mathbb{N}$, comme $\{(Y = i), i \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z=k, Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k-i, Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=k-i, Y=i) \text{ car } X \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=k-i)\mathbb{P}(Y=i) \text{ par indépendance} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!} \mathrm{e}^{-\mu} \frac{\mu^i}{i!} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \mu^i \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu} \frac{1}{k!} (\lambda+\mu)^k,
\end{aligned}$$

donc $Z \sim \mathbb{P}(\lambda+\mu)$.

2. Calculer $P_{Z=n}(X=k)$ pour $(k,n) \in \mathbf{N}^2$.

Correction

Soient n dans $\mathbb{N}$ et k dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\mathbb{P}_{Z=n}(X=k) = \frac{\mathbb{P}(Z=n, X=k)}{\mathbb{P}(Z=n)} = \frac{\mathbb{P}(Y=n-k, X=k)}{\mathbb{P}(Z=n)}.$$

Déjà, si $k > n$, cette probabilité est nulle. Ensuite, si $k \leqslant n$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{Z=n}(X=k) &= \frac{\mathbb{P}(Y=n-k)\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(Z=n)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

3. Reconnaître alors la loi conditionnelle de X sachant $(Z=n)$.

Correction

Donc la loi de X conditionnée à $Z=n$ est une loi $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

Exercice 65. Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ n réels, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, $M_{n,i} = M_{i,n} = a_i$ et les autres coefficients sont nuls.

1. M est-elle diagonalisable ?

Correction

La matrice M est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

2. Préciser les éléments propres de M.

Correction

Déjà, les colonnes 1 à $n-1$ sont toutes proportionnelles, ce qui assure que M est de rang inférieur ou égal à $n-2$.

- si tous les a_i sont nuls, M est diagonale.
- si un seul des a_i est non nul :
  - ou bien c'est a_n est la matrice est diagonale,
  - ou bien c'est un des a_i et la matrice est de rang 2.
- dans tous les autres cas la matrice est de rang 2.

On se focalise donc sur le cas où il existe $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $a_i \neq 0$. Supposons sans perte de généralité qu'il s'agisse de a_1. Alors M est de rang 2 et on remarque que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \\ 0 \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -a_{n-1} \\ 0 \\ \vdots \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en forment une base. Il reste alors à trouver les deux autres valeurs propres. On résout une équation aux valeurs propres. Soit λ une valeur propre non nulle, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. Alors

$$\begin{aligned} a_1 x_n &= \lambda x_1 \\ a_2 x_n &= \lambda x_2 \\ &\vdots \vdots \\ a_{n-1} x_n &= \lambda x_{n-1} \\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n &= \lambda x_n \end{aligned}$$

De la première équation on tire $x_n = \dfrac{\lambda}{a_1} x_1$ (si on avait pris $a_i \neq 0$ on aurait choisi la i-ème équation). On en déduit donc que pour tout i,

$$x_i = \frac{a_i}{\lambda} x_n = \frac{a_i}{a_1} x_1.$$

La dernière équation se réécrit

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_1} x_1 = \lambda x_n = \frac{\lambda^2}{a_1} x_1.$$

Donc $\lambda^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2$. Ceci nous donne exactement deux valeurs propres, $\pm\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$, associées à des vecteurs propres non nuls.

5.7 Antonio Griffaton

Exercice 66. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et soit f définie par : $\forall X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$.

1. Montrer que f est linéaire.

Correction

Soient X et Y dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, λ et μ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$f(\lambda X + \mu Y) = A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \lambda f(X) + \mu f(Y),$$

d'où la linéarité de f.

2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$

Correction

- Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} X \in \ker(f) &\Leftrightarrow AX = 0_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow a+c = b+d = 0 \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors on remarque que

$$f(x) = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.
L'inclusion réciproque se démontre, ou bien directement, ou bien via le théorème du rang (car $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\ker(f)) = 2$.

3. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction

On calcule

$$\begin{aligned}
f(E_{11}) &= \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = E_{11}+E_{21}\\
f(E_{12}) &= \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = E_{12}+E_{22}\\
f(E_{21}) &= \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = E_{11}+E_{21}\\
f(E_{22}) &= \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = E_{12}+E_{22},
\end{aligned}$$

D'où, en notant $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

4. Donner le spectre de f.

Correction

On peut calculer le polynôme caractéristique de f, **ou bien** remarquer que, pour tout X dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,

$$f^2(X) = A^2X = 2AX = 2f(X),$$

donc $X^2 - 2X$ annule f, ce qui assure que le spectre de f est inclus dans $\{0, 2\}$.

5. Donner les espaces propres associés.

Correction

On a déjà calculé $\ker(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}\right)$. Ensuite, si $X = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$, alors on a les équivalences

$$\begin{aligned}
f(X) = 2X &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a+c & b+d\\a+c & b+d\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}c-a & d-b\\a-c & b-d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}a & b\\a & b\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Donc l'espace propre associé à la valeur propre 2 est

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

Exercice 67. Étudier l'existence et calculer (si possible) :

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$$

Correction

On pose $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{(1+t)^2}$. Alors

- f est continue sur $]0, +\infty[$,
- $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$, intégrable en 0,
- $t^{3/2} f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$, intégrable en $+\infty$,

Donc f est bien intégrable sur $]0, +\infty[$.
Maintenant, cherchons à calculer f, en faisant le changement de variables $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}$. On écrit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt \\
&= \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln(1/s)}{(1+1/s)^2} \frac{-1}{s^2} ds \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1/s)}{(s^2+1)^2} ds \\
&= -\mathrm{I},
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{I} = 0$.

5.8 Sabrina Guecem

Exercice 68. Soit E, espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x non nul, on définit

$$\varphi(f)(x) = \int_0^x \frac{1}{x} f(t)\, dt.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme.

Correction

- déjà, φ est à valeurs dans E. En effet,
  — $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$,
  — $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$,

  donc $\varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
  De plus, si F est une primitive de f,

$$\varphi(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} F'(0) = f(0),$$

  donc $\varphi(f)$ est prolongeable par continuité en 0. Donc φ est à valeurs dans E.

- linéarité. Soient f et g dans E, λ et μ dans $\mathbb{R}$. Alors pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x \lambda f(t) + \mu g(t) dt \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x \lambda f(t) dt + \frac{1}{x}\int_0^x \mu g(t) dt \\ &= \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x),\end{aligned}$$

d'où la linéarité.

2. Montrer que φ est injectif.

Correction

Soit $f \in \ker(\varphi)$. Alors $\varphi(f) = 0$, ce qui implique que pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = 0,$$

donc que pour tout $x \neq 0$ (et, en fait pour tout x dans $\mathbb{R}$),

$$\int_0^x f(t)dt = 0,$$

soit, en dérivant l'expression par rapport à x, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$.
D'où l'injectivité de φ.

3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

Correction

Soit λ une valeur propre de φ ($\lambda \neq 0$ par la question précédente) et f un vecteur propre associé. Alors pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \lambda f(x),$$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour tout $x \neq 0$,

$$\int_0^x f(t)dt = \lambda x f(x),$$

soit, en dérivant par rapport à x,

$$f(x) = \lambda f(x) + \lambda x f'(x),$$

d'où, pour $x \neq 0$,

$$f'(x) + \frac{\lambda - 1}{\lambda x} f(x) = 0.$$

Résolvons cette équation différentielle sur les **intervalles** $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

- sur $]0, +\infty[$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{\lambda - 1}{\lambda x}$ est $x \mapsto \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}\ln(x)$, donc on dispose de $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$<

$$f(x) = Ce^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}\ln(x)} = Cx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

- sur $]-\infty,0[$, on trouve $f(x)=D(-x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$, où $D\in\mathbb{R}$.

Pour qu'une telle fonction soit prolongeable par continuité en 0, il faut que la puissance de x soit positive, donc $0<\lambda<1$.
Réciproquement, si $0<\lambda<1$, les vecteurs propres sont de la formes

$$f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\begin{cases}D|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ C|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x>0,\end{cases}\end{array}\right.$$

il s'agit donc d'un sous-espace de dimension 2.salu

Exercice 69. Soit N un entier naturel. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire simultanément n ; on modélise le plus petit chiffre tiré par une variable aléatoire X, et on note Y la variable aléatoire modélisant le plus grand chiffre tiré.

1. Calculer le nombre de combinaisons possibles de tirage.

Correction

Il y a exactement $\binom{N}{n}$ tirages possibles (car on tire les boules simultanément).

2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Y, puis calculer $\mathbb{P}(Y\leqslant k)$. Déterminer la loi de Y.

Correction

Y est au minimum égal à n et au maximum à N (vu que l'on tire n boules, au minimum on tire $1,2,\ldots,n$).
Ensuite, si $k\in[\![n,N]\!]$, il y a $\binom{k}{n}$ tirages possibles conduisant à avoir $Y\leqslant k$. (il faut tirer les boules parmi $[\![1,k]\!]$ uniquement). On en déduit que

$$\mathbb{P}(Y\leqslant k)=\frac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}}=\frac{k!(N-n)!}{(k-n)!N!}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y=n)=\frac{(N-n)!n!}{N!},$$

et pour $k\geqslant n+1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=k)&=\mathbb{P}(Y\leqslant k)-\mathbb{P}(Y\leqslant k-1)\\&=\frac{k!(N-n)!}{(k-n)!N!}-\frac{(k-1)!(N-n)!}{(k-1-n)!N!}\\&=\frac{(k-1)!(N-n)!\,(k-(k-n))}{(k-n)!N!}\\&=\frac{n(k-1)!(N-n)!}{(k-n)!N!}.\end{aligned}$$

3. Faire la même chose pour X.

Correction

Pour X, on fait l'inverse. On sait que X est à valeurs dans $[\![1, N-n+1]\!]$. Si $k \in [\![1, N-n+1]\!]$, pour avoir $X \geqslant k$, il faut tirer n boules parmi les boules de k jusqu'à N, d'où $\binom{N-k+1}{n}$ choix possibles.

$$\mathbb{P}(X \geqslant k) = \frac{\binom{N-k+1}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{(N-k+1)!(N-n)!}{(N-k+1-n)!N!}$$

On en déduit alors,

$$\mathbb{P}(X = N-n+1) = \frac{(N-n)!n!}{N!},$$

et pour $k \leqslant N-n$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1) \\ &= \frac{(N-k+1)!(N-n)!}{(N-k+1-n)!N!} - \frac{(N-k)!(N-n)!}{(N-k-n)!N!} \\ &= \frac{(N-k)!(N-n)!(N-k+1-(N-k+1-n))}{(N-k+1-n)!N!} \quad = \frac{(N-k)!(N-n)!n}{(N-k+1-n)!N!}.\end{aligned}$$

5.9 Maxence Herbelin

Exercice 70. On s'intéresse à : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$

1. Donner le rayon de convergence et la somme S de cette série.

Correction

On note, pour n dans $\mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{n!}$. Alors pour $n \geqslant 2$,

$$a_n = \frac{n(n-1)+2n+1}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!},$$

ce qui, par propriété sur les sommes d'une série entière, assure que la série entière S est de rayon de convergence infini. Ainsi,

$$\begin{aligned}S(t) &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{n(n-1)}{n!} t^n + \sum_{n\geqslant 0} \frac{2n}{n!} t^n + \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n!} \\ &= (t^2+2t+1)\mathrm{e}^t \\ &= (t+1)^2\mathrm{e}^t.\end{aligned}$$

2. Soit X une variable aléatoire. On pose $G_X(t) = \lambda S$. Trouver la valeur de λ.

Correction

Il faut que $\lambda S(1) = 1$, donc que $\lambda = \dfrac{1}{4\mathrm{e}}$.

3. Donner $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, et la loi de X.

Correction

On a alors pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X=n)=\frac{n^2+n+1}{4\mathrm{e}.n!},$$

puis, comme S est dérivable sur tout $\mathbb{R}$,

$$S'(t)=2(t+1)\mathrm{e}^t+(t+1)^2\mathrm{e}^t,$$

et donc

$$\mathbb{E}(X)=\lambda S'(1)=\frac{8\mathrm{e}}{4\mathrm{e}}=2$$

De même, on remarque que

$$\mathbb{E}(X^2)=\lambda\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty}n^2a_n=\lambda\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty}n(n-1)a_n+\lambda\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty}na_n=\lambda S''(1)+\lambda S'(1).$$

Ainsi, comme

$$S''(1)=2\mathrm{e}^t+4(t+1)\mathrm{e}^t+(t+1)^2\mathrm{e}^t,$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X)&=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2\\&=\lambda(S''(1)+S'(1))-4\\&=\frac{14\mathrm{e}+8\mathrm{e}}{4\mathrm{e}}-4\\&=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 71. On définit $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{nt}}{(1+\mathrm{e}^t)^{n+1}}dt$

1. Montrer que l'intégrale est correctement définie.

Correction

Fixons $n\in\mathbb{N}$ et notons $f_n(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{nt}}{(1+\mathrm{e}^t)^{n+1}}$.

- f_n est continue sur $[0,+\infty[$,
- ensuite,
$$f_n(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{\mathrm{e}^{nt}}{(\mathrm{e}^t)^{n+1}}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\mathrm{e}^t},$$
intégrable en $+\infty$, donc f_n est intégrable en $+\infty$, donc I_n est bien définie.

2. Pour tout $n\geqslant 2$, montrer la relation : $\mathrm{I}_n=\dfrac{1}{n2^n}+\dfrac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-1}$

Correction

Soit $n\geqslant 2$. On fait, dans I_n, une intégration par parties, en intégrant $\dfrac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^{n+1}}$ en $-\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{(1+\mathrm{e}^t)^n}$ et en dérivant $\mathrm{e}^{(n-1)t}$ en $(n-1)\mathrm{e}^{(n-1)t}$. Le crochet

$\left[-\frac{1}{n}\frac{1}{(1+e^t)^n}e^{(n-1)}t\right]_0^{+\infty}$ converge bien et

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n &= \left[-\frac{1}{n}\frac{1}{(1+e^t)^n}e^{(n-1)}t\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{(1+e^t)^n}(n-1)e^{(n-1)t}dt \\ &= \frac{1}{n2^n} + \frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-1},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On pose $J_n = n\mathrm{I}_n$. Calculer J_n et en déduire une expression de I_n.

Correction

Par la question précédente,

$$J_n = \frac{1}{2^n} + J_{n-1},$$

donc

$$J_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^n} + J_0 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{I}_n = \frac{2}{n} - \frac{1}{n2^{n-1}}.$$

5.10 Victoire Jalenques

Exercice 72. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ avec$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Trouver un polynôme annulateur de M de degré 3.

Correction

On calcule M^2 et M^3 ! Déjà,

$$M^2 = \begin{pmatrix} -(a^2+b^2) & -bc & ac \\ -bc & -(a^2+c^2) & -ab \\ ac & -ab & -(b^2+c^2) \end{pmatrix}.$$

Ensuite, si on note $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\|u\|^2 = a^2+b^2+c^2$,

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & a\|u\|^2 & b\|u\|^2 \\ -a\|u\|^2 & 0 & c\|u\|^2 \\ -b\|u\|^2 & -c\|u\|^2 & 0 \end{pmatrix} = -\|u\|^2 M,$$

donc $X^3 + \|u\|^2 X = X(X - i\|u\|)(X + i\|u\|)$ annule M

2. M est-elle inversible ?

Correction

Comme M est antisymétrique, $\det(M) = \det(M^\top) = \det(-M) = (-1)^3\det(M) = -\det(M)$, donc $\det(M) = 0$, donc M n'est pas inversible.

3. M est-elle diagonalisable ?

Correction

Déjà, si $a = b = c = 0$, alors M est la matrice nulle.
Ensuite, on suppose $\|u\| \neq 0$. Alors M est annulée par un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En revanche, la seule valeur propre réelle de M est 0 et M n'est pas la matrice nulle donc M n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que les valeurs propres de M^2 sont négatives ou nulles.

Correction

Le spectre de M est inclus dans $\{0, -i\|u\|, i\|u\|\}$ donc le spectre de M est inclus dans $\{0, -\|u\|^2\}$, ce qui correspond bien à des valeurs négatives ou nulles.

Exercice 73. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(t)^n}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)^n}$. Alors

- f_n est continue sur $[0, +\infty[$,
- $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^n}{\mathrm{e}^{nt}}$, intégrable en $+\infty$,

donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et a_n est bien définie.

2. Étudier la limite de a_n quand n tend vers l'infini.

Correction

On remarque que

- pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, f_n est continue, intégrable sur $]0, +\infty[$,
- pour tout t dans $]0, +\infty[$, $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
- pour tout t dans $]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{\mathrm{ch}(t)^n} \leqslant \frac{1}{\mathrm{ch}(t)},$$
indépendant de n et intégrable sur $]0, +\infty[$,

donc, d'après le théorème de convergence dominée, $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Étudier la convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

Correction

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante (car $\text{ch}(t)^{n+1} \geqslant \text{ch}(t)^n$) et tend vers 0 donc, d'après le critère des séries alternées, $\sum(-1)^n a_n$ converge.

4. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Correction

On sait déjà que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc le rayon de convergence de la série entière est supérieur ou égal à 1.
Ensuite, on sait que pour $t > 0$,

$$\text{ch}(t) - \text{e}^t = \frac{\text{e}^{-t} - \text{e}^t}{2} \leqslant 0,$$

donc $\text{ch}(t)^n \leqslant \text{e}^{nt}$, d'où

$$a_n \geqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{e}^{nt}} = \frac{1}{n}.$$

Donc le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est inférieur ou égal au rayon de convergence de $\sum \frac{1}{n} x^n$, qui vaut exactement 1.
Donc le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ vaut 1.

5.11 Ivann Minoc

Exercice 74. Pour $n \geqslant 2$, on pose $B = J_n - \mathrm{I}_n$, où J_n est la matrice constituée de 1 uniquement.

1. Montrer que B est diagonalisable.

Correction

La matrice B est symétrique réelle donc, par le théorème spectral, elle est diagonalisable.

2. Déterminer le rang de $B + \mathrm{I}_n$. En déduire les éléments propres de B.

Correction

$B + \mathrm{I}_n = J_n$. Toutes les colonnes de J_n sont égales et non nulles, donc le rang de J_n vaut 1. Donc, par le théorème du rang,

$$\dim(\ker(B + \mathrm{I}_n)) = n - 1,$$

ce qui assure que -1 est valeur propre de B, de multiplicité $n-1$, de sous-espace propre associé (faire le calcul)

$$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0, \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \vdots \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Ensuite, on remarque que

$$B\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = (n-1)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},$$

d'où la dernière valeur propre de B.

3. Déterminer un polynôme de degré 2 annulant B.

Correction

Comme B est diagonalisable, on sait que

$$(X+1)(X-(n-1))$$

annule effectivement B.

4. Montrer que B est inversible.

Correction

0 n'est pas valeur propre de B donc B est inversible.

Exercice 75. Pour n naturel, on pose (E_n) l'équation :

$$x\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = \sqrt{n}$$

1. Montrer que pour tout n, (E_n) admet une unique solution x_n.

Correction

On considère la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$. Cette fonction est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ donc l'équation n'a pas de solution sur $\mathbb{R}_-^*$. De plus, sur $\mathbb{R}_+^*$, f est strictement croissante, comme produit de fonctions strictement positives strictement croissantes, elle est continue, vaut 0 en 0 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = \sqrt{n}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ (donc sur $\mathbb{R}$ étant donnée la considération faite sur $\mathbb{R}_-$).

2. Déterminer la limite de la suite (x_n).

Correction

La question précédente assure que f est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On a donc $x_n = f^{-1}(\sqrt{n})$. Mais f^{-1} est monotone, de même monotonie que f, donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3. Déterminer un équivalent de (x_n) quand n tend vers $+\infty$.

Correction

On sait que $x_n\mathrm{e}^{\sqrt{x_n}} = \sqrt{n}$, donc

$$\ln(x_n) + \sqrt{x_n} = \ln(\sqrt{n}).$$

Mais $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\ln(x_n) + \sqrt{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{x_n}$. D'où $\sqrt{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\sqrt{n})$. Ainsi,

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\ln(\sqrt{n})}.$$

5.12 Maxime Nouvel

Exercice 76. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient $\mathrm{tr}(M) = 3$ et $M^5 = M^2$.

Correction

Soit M une telle matrice. Le polynôme $P(X) = X^5 - X^2$ annule M et

$$X^5 - X^2 = X^2(X^3 - 1) = X^2(X-1)(X-j)(X-j^2),$$

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 1, j, j^2\}$. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ les valeurs propres (complexes) de A. Alors

$$3 = \mathrm{Tr}(A) = |\mathrm{Tr}(A)| = |\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3| \leqslant |\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \leqslant 1 + 1 + 1 = 3.$$

Il y a donc égalité dans toutes les inégalités. En particulier :

- pour tout i, $|\lambda_i| = 1$, donc 0 n'est pas valeur propre de M. En particulier, M est inversible, donc $M^3 = \mathrm{I}_3$ (on a simplifié par M^2), donc M est annulée par un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc M est diagonalisable.
- on a égalité dans l'inégalité triangulaire, donc λ_1, λ_2 et λ_3 sont positivement colinéaires. Étant de même module, ils sont égaux. Donc $\mathrm{Tr}(A) = 3\lambda_1$, donc $\lambda_1 = 1$.

Ainsi, M est diagonalisable avec seulement 1 comme valeur propre, donc $M = \mathrm{I}_3$.

Exercice 77. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\mathrm{sh}(t)}{t} dt$

1. Trouver le domaine de définition de f.

Correction

On fixe $x \in \mathbb{R}$. On note $g(x,t) = \dfrac{e^{-xt}\mathrm{sh}(t)}{t}$.

- si $x \leqslant 1$, $\dfrac{e^{-xt}\mathrm{sh}(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{(1-x)t}}{2t} \geqslant \dfrac{1}{2t}$, non intégrable en $+\infty$ donc $t \mapsto g(x,t)$ n'est pas intégrable.
- si $x > 1$, alors :
  - la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $]0, +\infty[$,
  - on a : $\dfrac{e^{-xt}\mathrm{sh}(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 1$, donc l'intégrale est faussement impropre en 0,
  - enfin,

  $$\frac{e^{-xt}\mathrm{sh}(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{(1-x)t}}{2t},$$

  qui est bien intégrable en $+\infty$.

Donc f est définie sur $]1, +\infty[$.

2. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition et calculer f'.

Correction

Il s'agit d'appliquer un théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

- pour tout $x > 1$, $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable,
- pour tout $t > 0$, $x \mapsto g(x, t)$ est $\mathscr{C}^1$ et
$$\frac{\partial g}{\partial x} g(x, t) = -e^{-xt}\mathrm{sh}(t).$$
- soit $a > 1$. Pour tout $t > 0$ et $x \in [a, +\infty[$,
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x} g(x, t)\right| \leqslant e^{-at}\mathrm{sh}(t),$$
indépendant de x et intégrable.

Donc, par le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre, f est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$, donc sur $]1, +\infty[$, et

$$\begin{aligned} f'(x) = \int_0^{+\infty} -e^{-xt}\mathrm{sh}(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(x+1)} - e^{t(1-x)}}{2} dt \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{e^{-t(x+1)}}{x+1}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{t(1-x)}}{1-x}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(1-x)} \\ &= \frac{1}{x^2-1}. \end{aligned}$$

3. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Correction

Il s'agit d'appliquer un théorème de convergence dominée à paramètre continu :

- pour tout $x > 1$, $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable,
- pour tout $t > 0$, $\dfrac{e^{-xt}\mathrm{sh}(t)}{t} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,
- pour tout $x \geqslant 42$ et $t > 0$,
$$\left|\frac{e^{-xt}\mathrm{sh}(t)}{t}\right| \leqslant \frac{e^{-42t}\mathrm{sh}(t)}{t},$$
intégrable et indépendant de x.

Donc, par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, on en déduit que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. (rajout) Trouver une expression de f.

Correction

Le calcul de la dérivée assure qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 1$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x-1) + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C$$

Mais alors, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} C$, donc $C = 0$. Donc

$$f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}.$$

5.13 Jathusan Satheeskumar

Exercice 78. On cherche les applications f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}. \qquad (*)$$

1. Soit f vérifiant $(*)$.

(a) En considérant des valeurs particulières de n, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(x+1).$$

Correction

En prenant $n = 1$, on sait que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = f(x+1) - f(x), \text{ i.e. } f(x+1) = f(x) + f'(x).$$

En prenant $n = 2$, on a

$$f(x+2) = f(x) + 2f'(x).$$

En prenant $n = 1$ et $x + 1$ à la place de x, on obtient

$$f(x+2) = f(x+1) + f'(x+1).$$

En remplaçant les expressions de $f(x+2)$ et $f(x+1)$, on obtient

$$f(x) + 2f'(x) = f(x) + f'(x) + f'(x+1).$$

D'où $f'(x) = f'(x+1)$.

(b) Montrer que $\displaystyle\int_x^{x+1} f'(t)\mathrm{d}t$ ne dépend pas de x, puis que f' est constante.

Correction

On sait que

$$\varphi(x) = \int_x^{x+1} f'(t)\mathrm{d}t = f(x+1) - f(x).$$

Mais alors φ est dérivable et $\varphi'(x) = f'(x+1) - f'(x) = 0$ donc φ est constante, ce qui est le résultat demandé.
Mais pour tout x,

$$\varphi(x) = f(x+1) - f(x) = f'(x).$$

Donc f' est bien constante.

2. Donner toutes les solutions du problème posé.

Correction

Analyse. Si f est une solution du problème, alors on a vu que f' était constante. Donc on dispose de a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $f(x) = ax + b$.
Synthèse. Soient (a, b) dans $\mathbb{R}$ et soit $f : x \mapsto ax + b$. Alors, si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{f(x+n) - f(x)}{n} = \frac{a(x+n) + b - ax - b}{n} = a = f'(x).$$

Donc une telle fonction est bien solution du problème.
Ainsi, l'ensemble des fonctions solutions du problème est l'ensemble des fonctions affines.

Exercice 79. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que toute matrice non nulle de F soit inversible.

1. On suppose que A et B sont dans E. Montrer que $x \mapsto \det(xA - B)$ est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Correction

On montre par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour toutes A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(xA - B)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à n.
L'initialisation ($n = 1$) est évidente.
Pour l'hérédité, soit $n \geqslant 2$ tel que la proposition soit vraie au rang $n - 1$. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$. Alors

$$\det(xA - B) = \begin{vmatrix} xa_{11} - b_{11} & \cdots & xa_{1n} - b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ xa_{n1} - b_{n1} & \cdots & xa_{nn} - b_{nn} \end{vmatrix}$$

En développant selon la première ligne, on obtient

$$\det(xA - B) = (xa_{11} - b_{11})\det(xA_1 - B_1) - (xa_{12} - b_{12})\det(xA_2 - B_2) + \dots,$$

où les A_i et les B_i sont des matrices de taille $n - 1$. Donc pour tout i, $\det(xA_i - B_i)$ est polynomiale de degré $\leqslant n - 1$, donc $\det(xA - B)$ est polynomiale de degré $\leqslant n$.
D'où l'hérédité et le résultat.

2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha A - B \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Correction

On sait que $P(x) = \det(xA - B)$ est polynomiale non constante (car A est inversible donc est non nulle, donc P n'est pas le polynôme nul). Donc, par le théorème de D'Alembert-Gauss, P admet au moins une racine α, donc $\det(\alpha A - B) = 0$, donc $\alpha A - B \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

3. En déduire que $\dim(F) \leqslant 1$ et préciser la nature de F.

Correction

Soit A non nulle dans F. Alors pour toute B dans F, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha A - B \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Mais comme $\alpha A - B \in F$, nécessairement, $\alpha A - B = 0$, donc $B = \alpha A$.
Donc $F = \mathrm{Vect}(A)$, i.e. F est une droite vectorielle.

5.14 Beryl Spérélakis-Beedham

Exercice 80. Soit E l'espace des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose : $\phi(f)(0) = f(0)$ et $\phi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ si $x \neq 0$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de E.

Correction

La linéarité est évidente, par linéarité de l'intégrale.
Ensuite, soit $f \in E$. La fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est dérivable donc continue sur $[0, 1]$.
Donc $\phi(f)$ est continue sur $]0, 1]$. Reste à voir si elle est continue en 0. Soit $x \in]0, 1]$. Alors

$$\phi(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} F'(0) = f(0),$$

donc $\phi(f)$ est continue en 0, donc ϕ est bien à valeurs dans E.s

2. Montrer que 0 n'est pas une valeur propre de ϕ.

Correction

Soit $f \in \ker(f)$. Alors $\phi(f)(x) = 0$ pour tout $x > 0$, donc $\int_0^x f(t)dt = 0$ pour tout $x > 0$ donc, en dérivant par rapport à x, $f(x) = 0$ pour tout $x > 0$ donc, par continuité, f est nulle sur $[0, 1]$.
Donc $\ker(f) = \{0_E\}$, donc 0 n'est pas une valeur propre de f.

3. Montrer que 1 est une valeur propre de ϕ et trouver l'espace propre associé.

Correction

Soit $f \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Alors pour tout $x > 0$, $\phi(f)(x) = f(x)$, donc

$$\forall x \in [0, 1], \quad \int_0^x f(t)dt = xf(x),$$

d'où f est dérivable et, en dérivant par rapport à x, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = f(x) + xf'(x),$$

donc pour tout $x > 0$, $f'(x) = 0$, i.e. f est constante.
Réciproquement, si f est constante, on a bien $\phi(f) = f$.
Ainsi, 1 est une valeur propre de ϕ et l'espace propre associé est l'ensemble des fonctions constantes.

4. Déterminer les autres valeurs propres.

Correction

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $f \in \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$. Alors pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x f(t)dt = \lambda x f(x),$$

d'où f est dérivable sur $]0, 1]$ et pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \lambda f(x) + \lambda x f'(x),$$

i.e.

$$f'(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda x} f(x) = 0,$$

donc on dispose de $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = Ae^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(x)} = Ax^{\frac{1}{\lambda}-1}.$$

Mais f doit être continue sur $[0, 1]$ donc on doit avoir $\dfrac{1}{\lambda} - 1 \geqslant 0$, i.e. $0 < \lambda \leqslant 1$.
Réciproquement, si $\lambda \in]0, 1]$, $\mathrm{Vect}(x \mapsto x^{\frac{1}{\lambda}-1})$ est l'espace propre associé à λ.

Exercice 81. X suit une loi géométrique de paramètre $p < 1$.
On considère :

- A : « X prend des valeurs paires »
- B : « X prend des valeurs multiples de 3 »

1. Calculer $\mathbb{P}(A)$.

Correction

On note $q = 1 - p$. On calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(X = 2k) \\
&= \sum_{k\geqslant 1} pq^{2k-1} \\
&= \frac{p}{q}\frac{q^2}{1-q^2} \\
&= \frac{pq}{(1-q)(1+q)} \\
&= \frac{q}{1+q}.
\end{aligned}$$

2. Calculer $\mathbb{P}(B)$. On calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(X = 3k) \\
&= \sum_{k\geqslant 1} pq^{3k-1} \\
&= \frac{p}{q}\frac{q^3}{1-q^3} \\
&= \frac{pq^2}{(1-q)(1+q+q^2)} \\
&= \frac{q^2}{1+q+q^2}.
\end{aligned}$$

3. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Correction

On calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\cap B) &= \mathbb{P}(\text{« } X \text{ est multiple de 6 »}) \\
&= \sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(X = 6k) \\
&= \sum_{k\geqslant 1} pq^{6k-1} \\
&= \frac{p}{q}\sum_{k\geqslant 1} (q^6)^k \\
&= \frac{p}{q}q^6\frac{1}{1-q^6} = \frac{pq^5}{1-q^6}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{pq^3}{(1+q)(1-q^3)}.$$

On a donc l'équivalence

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) &\Leftrightarrow \frac{pq^5}{1-q^6} = \frac{pq^3}{(1+q)(1-q^3)} \\
&\Leftrightarrow \frac{q^2}{(1-q^3)(1+q^3)} = \frac{1}{(1+q)(1-q^3)} \\
&\Leftrightarrow \frac{q^2}{1+q^3} = \frac{1}{1+q} \\
&\Leftrightarrow q^2 = \frac{1+q^3}{1+q} = 1-q+q^2 \\
&\Leftrightarrow 0 = 1-q,
\end{aligned}$$

ce qui est faux car $p \in]0,1[$. Donc on n'a pas d'indépendance de ces deux événements.

6 CCINP

6.1 Sami Bennane + Yssambre Venturini

Exercice 82. Pour $x > 0$, $n \geqslant 2$, $U_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(n)} x^n$.
On admet que la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln(n)}$ est divergente.

1. Donner le domaine D de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 2} U_n(x)$.

Correction

Si $x \in]0,1[$, alors

$$\left|\frac{\ln(x)}{\ln(n)} x^n\right| \leqslant |\ln(x)| x^n,$$

terme général d'une série convergente, donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} U_n(x)$ converge absolument, donc converge.
Pour $x = 1$, $U_n(1) = 0$, terme général d'une série convergente.
Pour $x > 1$, par croissances comparées, $U_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où la divergence grossière de $\sum U_n(x)$.
Donc $D =]0,1]$.

2. La convergence de cette série est-elle normale sur D ?

Correction

On remarque que

$$U_n(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}) = -\frac{1}{\mathrm{e}.n\ln(n)},$$

donc

$$\|U_n\|_\infty^{]0,1]} \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}.n\ln(n)},$$

terme général d'une série divergente par le résultat admis. Donc il n'y a pas convergence de la série de fonctions $\sum U_n$.

3. On note $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 2} U_n(x)$ et $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\ln(k)} x^k$. Montrer que pour tout $x \in D$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

Correction

Soit $x \in]0,1[$ (pour $x=1$, c'est évident). Alors

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(k)} x^k\right| &\leqslant \frac{1}{\ln(n+1)} |\ln(x)| \sum_{k\geqslant n+1} x^k \\ &\leqslant \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{|\ln(x)| x^{n+1}}{1-x} \\ &\leqslant \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{|\ln(1/x)| x^{n}}{1/x-1} \\ &\leqslant \frac{1}{\ln(n+1)} \text{ car } |\ln(y)| \leqslant |y-1| \text{ pour } y>1.\end{aligned}$$

4. En déduire que S est continue sur D.

Correction

On sait que pour tout $n \geqslant 2$, U_n est continue, que la série de fonctions $\sum U_n$ converge simplement, et que, par la question précédente,

$$\|R_n\|_\infty^D \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc la série de fonctions $\sum U_n$ converge uniformément. Ainsi, S est continue.

5. S est-elle intégrable sur D ?

Correction

La fonction S est continue sur $]0,1]$. Il reste à déterminer un équivalent de S en 0 pour en déterminer l'intégrabilité. On peut écrire que

$$S(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} x^2 + + \frac{\ln(x)}{\ln(3)} x^3 + \sum_{k\geqslant 4} \frac{\ln(x)}{\ln(k)} x^k.$$

Mais, par la question précédente,

$$\left|\sum_{k\geqslant 4} \frac{\ln(x)}{\ln(k)} x^k\right| \leqslant \frac{x^3}{\ln(4)} \underset{x\to 0}{=} o\left(\ln(x) x^2\right).$$

Ainsi,

$$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(2)} x^2,$$

qui est prolongeable par continuité en 0. Donc S est intégrable sur D.

Exercice 83. Soit $(A_1, A_2, A_3, A_4) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^4$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $\operatorname{rg}(A) \leqslant \operatorname{rg}(B_1) + \operatorname{rg}(B_2)$; puis que : $\operatorname{rg}(A) \leqslant \sum_{k=1}^{4} \operatorname{rg}(A_k)$.

Correction

Notons $C_1, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots, C_{2n}$ les colonnes de A. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots C_{2n}) \\
&= \dim(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots C_{2n})) \\
&\leqslant \dim\left(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n) + \mathrm{Vect}(C_{n+1}, \dots C_{2n})\right) \\
&\leqslant \dim\left(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n)\right) + \dim\left(\mathrm{Vect}(C_{n+1}, \dots C_{2n})\right) \text{ par la formule de Grassmann} \\
&\leqslant \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_n) + \mathrm{rg}(C_{n+1}, \dots, C_{2n}) = \mathrm{rg}(B_1) + \mathrm{rg}(B_2).
\end{aligned}$$

Ensuite, en raisonnant de même sur les lignes de B_1, on montre que $\mathrm{rg}(B_1) \leqslant \mathrm{rg}(A_1) + \mathrm{rg}(A_3)$ puis que $\mathrm{rg}(B_2) \leqslant \mathrm{rg}(A_2) + \mathrm{rg}(A_4)$. Le résultat s'ensuit alors.

2. Montrer que si $\mathrm{rg}\,(A_1) = \mathrm{rg}\,(A_4) = n$ et $A_3 = 0$, A est inversible. Que vaut alors A^{-1} ?

Correction

Si $A_3 = 0$, alors $\det(A) = \det(A_1)\det(A_4) \neq 0$, car $\mathrm{rg}(A_1) = n$ et $\mathrm{rg}(A_4) = n$ donc A_1 et A_4 sont inversibles. Donc A est inversible. On cherche alors l'inverse de A sous la forme $\begin{pmatrix} A_1^{-1} & D \\ 0_n & A_4^{-1} \end{pmatrix}$. En calculant

$$\begin{pmatrix} A_1^{-1} & D \\ 0_n & A_4^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_n & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & A_1^{-1}A_2 + DA_4 \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

Il faut (et il suffit) alors de prendre $A_1^{-1}A_2 + DA_4 = 0_n$ donc $D = -A_1^{-1}A_2A_4^{-1}$. Donc

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2A_4^{-1} \\ 0_n & A_4^{-1} \end{pmatrix}.}$$

6.2 Etienne Bouilleau, Thomas Faure, Maxence Herbelin

Exercice 84. Soit φ l'application qui au polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par $X^4 - 1$.

1. Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

Correction

- Déjà, comme φ associe un reste de division euclidienne par $X^4 - 1$, pour tout P de $\mathbb{R}_3[X]$, $\varphi(P)$ est de degré < 4, i.e. dans $\mathbb{R}_3[X]$.
- Ensuite, soient P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$, λ et μ deux réels. Écrivons

$$X^2P_1 = (X^4 - 1)Q_1 + \varphi(P_1) \text{ et } X^2P_2 = (X^4 - 1)Q_2 + \varphi(P_2)$$

Alors

$$X^2(\lambda P_1 + \mu P_2) = (X^4 - 1)(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + (\lambda\varphi(P_1) + \mu\varphi(P_2)).$$

Mais comme $\deg(\lambda\varphi(P_1) + \mu\varphi(P_2)) \leqslant 3 < 4$, l'unicité du reste de la division euclidienne assure que $(\lambda\varphi(P_1) + \mu\varphi(P_2))$ est le reste de la division euclidienne de $X^2(\lambda P_1 + \mu P_2)$ par $X^4 - 1$. Ainsi,

$$\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda\varphi(P_1) + \mu\varphi(P_2),$$

donc φ est bien linéaire.

2. Donnez A la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. A est-elle diagonalisable ? (on pourra calculer A^2)

Correction

On calcule l'image de chaque vecteur de la base canonique par φ :

- $X^2.1 = 0.(X^4-1) + X^2$ donc $\varphi(1) = X^2$
- $X^2.X = 0.(X^4-1) + X^3$ donc $\varphi(X) = X^3$
- $X^2.X^2 = 1.(X^4-1) + 1$ donc $\varphi(X^2) = 1$
- $X^2.X^3 = X(X^4-1) + X$ donc $\varphi(X^3) = X$

En notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, on en déduit que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $A^2 = \mathrm{I}_4$ donc A est la matrice d'une symétrie, donc elle est diagonalisable.

3. Donner le spectre de φ.

Correction

Comme $A^2 = \mathrm{I}_4$, on en déduit que le spectre de φ est inclus dans les racines de X^2-1, i.e. $\{-1, 1\}$. Or, $A \neq \mathrm{I}_4$ et $A \neq -\mathrm{I}_4$ donc le spectre de A ne peut pas être seulement $\{1\}$ ou seulement $\{-1\}$: si c'était le cas, A serait directement égale à I_4 ou $-\mathrm{I}_4$ (car une matrice semblable à une homothétie est nécessairement cette homothétie).

4. Donnez les sous-espaces propres de φ.

Correction

On raisonne matriciellement. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ sa matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$. Alors on a les équivalences

$$P \in E_1(\varphi) \Leftrightarrow AU = U \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ d = b \\ a = c \\ b = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ d = b. \end{cases}$$

Donc $AU = U \Leftrightarrow U \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Donc $E_1(\varphi) = \mathrm{Vect}(1+X^2, X+X^3)$.

Un calcul presque identique assure que $E_{-1}(\varphi) = \mathrm{Vect}(1-X^2, X-X^3)$.

5. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donnez son inverse.

Correction

Étant donné le calcul qu'on a fait, A est inversible, d'inverse elle-même.

6. L'application φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?

Correction

L'application φ est un endomorphisme représenté par une matrice inversible, donc c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 85. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geqslant 0$, $\dfrac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on précisera.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- si $x \geqslant 0$, $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$,
- si $x < 0$, $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f : x \mapsto x$. Vérifions que la convergence est uniforme. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

- si $x \geqslant 0$,

$$|f_n(x) - x| = \left|\frac{nx^2}{1+nx} - x\right| = \left|\frac{nx^2 - x - nx^2}{1+nx}\right| = \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n}\frac{x}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}.$$

- si $x < 0$,

$$|f_n(x) - x| = \left|\frac{nx^3}{1+nx^2} - x\right| = \left|\frac{nx^3 - x^2 - nx^3}{1+nx^2}\right| = \frac{x^2}{1+nx^2} = \frac{1}{n}\frac{x^2}{x^2+\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}.$$

On en déduit que $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La convergence est donc uniforme.

2. Démontrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier la convergence de (f_n').

Correction

Déjà, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Mais

- $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{2nx(1+nx) - nx^2 n}{(1+nx)^2} \\ &= \frac{2nx + 2n^2x^2 - n^2x^2}{(1+nx)^2} \\ &= \frac{2nx + n^2x^2}{(1+nx)^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

- $\forall x < 0$,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{3nx^2(1+nx^2) - nx^3 2nx}{(1+nx^2)^2} \\ &= \frac{3nx^2 + n^2x^4}{(1+nx^2)^2} \\ &\underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Donc f_n est **continue sur** $\mathbb{R}$, **dérivable sur** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, et $f_n'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc, par le théorème du prolongement du caractère $\mathscr{C}^1$, f_n est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(0) = 0$.
On étudie ensuite la convergence de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$**.**

- si $x \geqslant 0$,
$$f_n'(x) = \frac{2nx + n^2x^2}{(1+nx)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2x^2}{n^2x^2} = 1.$$
- si $x < 0$,
$$f_n'(x) = \frac{3nx^2 + n^2x^4}{(1+nx^2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2x^4}{n^2x^4} = 1$$

Donc $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction

$$g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

La fonction limite n'étant pas continue, la convergence ne peut pas être uniforme.

6.3 Eva Chaudanson

Exercice 86. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $|x| < 1$.

1. Donner le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-x}$ puis celui de $\dfrac{1}{(1-x)^r}$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

On sait que
$$f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n\geqslant 0}x^n.$$
Ensuite,
$$f^{(r-1)}(x)=\frac{(r-1)!}{(1-x)^r},$$
donc
$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^r}&=\frac{1}{(r-1)!}\sum_{n\geqslant r-1}n(n-1)\dots(n-r+2)x^{n-r+1}\\&=\frac{1}{(r-1)!}\sum_{k\geqslant 0}(r+k-1)(r+k-2)\dots(k+1)x^k\\&=\sum_{k\geqslant 0}\binom{r+k-1}{k}x^k\end{aligned}$$

2. Soit $p\in]0,1[$. On pose $q=p-1$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $p_k=\binom{k+r-1}{k}p^rq^k$. Montrer que $P(X=k)=p_k$ définit une probabilité.

Correction

On calcule
$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 0}p_k&=\sum_{k\geqslant 0}\binom{k+r-1}{k}p^rq^k\\&=p^r\frac{1}{(1-q)^r}=1,\end{aligned}$$
donc $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit bien une probabilité.

3. Calculer la fonction génératrice de X.

Correction

On calcule, pour $t\in[-1,1]$,
$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 0}p_kt^k&=\sum_{k\geqslant 0}\binom{k+r-1}{k}p^rq^kt^k\\&=\frac{p^r}{(1-tq)^r}.\end{aligned}$$

4. En déduire l'espérance et la variance de X.

Correction

G_X est clairement deux fois dérivable en 1, donc X admet une espérance et une variance. On a notamment $\mathbb{E}(X)=G_X'(1)$. Or,
$$G_X'(t)=\frac{rqp^r}{(1-tq)^{r+1}},$$

donc
$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{rqp^r}{(1-q)^{r+1}} = \frac{rq}{p}.$$
Ensuite,
$$G''_X(1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X),$$
donc
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= G''_X(1) + \mathbb{E}(X)\\ &= \frac{r(r+1)q^2p^r}{(1-q)^{r+2}} + \mathbb{E}(X)\\ &= \frac{r(r+1)q^2}{p^2} + \frac{rq}{p}.\end{aligned}$$
Donc
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\\ &= \frac{r(r+1)q^2}{p^2} + \frac{rq}{p} - \frac{r^2q^2}{p^2}\\ &= r\frac{q^2}{p^2} + r\frac{q}{p}.\end{aligned}$$

Exercice 87. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique.
Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\frac{1}{3}(\mathrm{I}_n + 2M) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $\langle MU, U\rangle = \|U\|^2$

Correction

Soit $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors $\frac{1}{3}(\mathrm{I}_n + 2M) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, donc
$$\left\|\frac{1}{3}(\mathrm{I}_n + 2M)U\right\|^2 = \|U\|^2,$$
Or,
$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{3}(\mathrm{I}_n + 2M)U\right\|^2 &= \frac{1}{9}\left(\|U\|^2 + 4\langle U, MU\rangle + 4\|MU\|^2\right)\\ &= \frac{1}{9}\left(5\|U\|^2 + 4\langle U, MU\rangle\right) \text{ car } M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).\end{aligned}$$
Mais comme $\frac{1}{3}(\mathrm{I}_n - 2M)$ est une isométrie, $\left\|\frac{1}{3}(\mathrm{I}_n + 2M)U\right\|^2 = \|U\|^2$, d'où
$$9\|U\|^2 = 5\|U\|^2 + 4\langle U, MU\rangle,$$
ce qui amène exactement au résultat voulu.

2. Démontrer que pour tout U dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, U est vecteur propre de M.

Correction

Soit $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\langle U, MU\rangle \leqslant \|U\| \, \|MU\| = \|U\|^2 .$$

Mais comme on sait, par la question précédente, qu'il y a égalité, on en déduit que U et MU sont (positivement) colinéaires, donc que U est un vecteur propre de M. Donc tout vecteur de l'espace est un vecteur propre de M.

3. En déduire que M est une homothétie et en déduire M.

Correction

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par la question précédente, pour tout i, $Me_i = \lambda_i e_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Soit alors $i \neq j$. On a

$$M(e_i + e_j) = \begin{cases} \mu(e_i + e_j) \text{par la question précédente} \\ \lambda_i e_i + \lambda_j e_j \text{ par ce que l'on vient de faire.} \end{cases}$$

Par liberté de (e_i, e_j), $\lambda_i = \mu = \lambda_j$, donc tous les λ_i sont égaux à $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $M = \lambda \mathrm{I}_n$. Mais M est une isométrie donc $\lambda = \pm 1$. Mais comme $\dfrac{1}{3}(\mathrm{I}_n + 2M) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, nécessairement $M = \mathrm{I}_n$.

6.4 Jean Compagnon

Exercice 88. Soit $a \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}[X]$, on pose pour tout $P \in E$:

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| \, dt$$

1. Montrer que N_a est une norme.

Correction

- Déjà N_a va bien de E dans $\mathbb{R}_+$,
- (homogénéité) Ensuite, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} N_a(\lambda P) &= |\lambda P(a)| + \int_0^1 |\lambda P'(t)| dt \\ &= |\lambda| . |P(a)| + |\lambda| \int_0^1 |P'(t)| dt \\ &= |\lambda| N_a(P), \end{aligned}$$

  d'où l'homogénéité.
- (séparation) Soit $P \in E$ tel que $N_a(P) = 0$. Alors $|P(a)| = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 |P'(t)| dt = 0$.
  Mais $|P'|$ est une fonction continue, positive, d'intégrale nulle, donc pour tout t dans $[0, 1]$, $|P'(t)| = 0$. Donc P' admet une infinité de racines, donc P' est le polynôme nul.
  Ainsi, P est constant et, comme $P(a) = 0$, P est nul. D'où la séparation.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

- (inégalité triangulaire) Soient P et Q dans E. Alors

$$N_a(P+Q) = |P(a)+Q(a)| + \int_0^1 |P'(t)+Q'(t)|\,dt \leqslant |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,dt + |Q(a)| + \int_0^1 |Q'(t)|\,dt = N_a(P)+N_a(Q),$$

d'où la séparation.

Donc N_a définit bien une norme.

2. (a) Montrer que N_0 et N_1 sont équivalentes.

Correction

Soit $P \in E$. On remarque que

$$\begin{aligned}|P(1)| &= \left|P(0) + \int_0^1 P'(t)dt\right| \\ &\leqslant |P(0)| + \int_0^1 |P'(t)|dt = N_0(P)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$N_1(P) = |P(1)| + \int_0^1 |P(t)|dt \leqslant 2N_0(P).$$

De même,

$$|P(0)| = \left|P(1) - \int_0^1 P'(t)dt\right| \leqslant N_1(P),$$

donc

$$N_0(P) \leqslant 2N_1(P).$$

Donc les normes N_0 et N_1 sont équivalentes.

(b) Montrer que pour toute suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, P_n converge dans (E, N_0) si et seulement si elle converge dans (E, N_1).

Correction

C'est une question de cours, liée à la définition de normes équivalentes.

3. (a) Montrer que $\forall (a, b) \in [0, 1]^2$, P_n converge dans (E, N_a) si et seulement si P_n converge dans (E, N_b).

Correction

On raisonne comme précédemment. On écrit que

$$\begin{aligned}|P(b)| &= \left|P(a) + \int_a^b P'(t)dt\right| \\ &\leqslant |P(a)| + \int_a^b |P'(t)|dt \\ &\leqslant |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt \text{ car } [a, b] \subset [0, 1] \\ &\leqslant N_a(P).\end{aligned}$$

Donc $N_b(P) \leqslant 2N_a(P)$ et $N_a(P) \leqslant 2N_b(P)$, donc N_a et N_b sont équivalentes, donc P_n converge dans (E, N_a) si et seulement si P_n converge dans (E, N_b).

(b) Montrer que si $1 \leqslant a < b$, alors l'équivalence précédente n'est plus valable. (Indication : on pourra poser $P_n = \left(\frac{X}{c}\right)^n$ avec c une constante.)

Correction

On considère $c = \frac{a+b}{2}$, i.e. $a < c < b$, et

$$P_n(X) = \left(\frac{X}{c}\right)^n.$$

Alors

$$\begin{aligned} N_a(P_n) &= \left(\frac{a}{c}\right)^n + \int_0^1 n\frac{x^{n-1}}{c^n}dx \\ &= \left(\frac{a}{c}\right)^n + \frac{1}{c^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

donc (P_n) converge vers le polynôme nul pour N_a.
En revanche,

$$N_b(P_n) = \left(\frac{b}{c}\right)^n + \frac{1}{c^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc (P_n) ne converge pas pour la norme N_b (car toute suite convergente est bornée).

4. Que dire si $E = \mathbb{R}_n[X]$?

Correction

Si $E = \mathbb{R}_n[X]$, E est de dimension finie et, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Exercice 89. **1.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives tendant vers $+\infty$. Montrer que si $u_n \sim v_n$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

Correction

On écrit que

$$\ln(u_n) = \ln(v_n) + \ln(u_n) - \ln(v_n) = \ln(v_n) + \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$$

Mais $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(v_n))$. On en déduit que $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

2. Montrer que $\ln(n!) \sim n\ln(n)$.

Correction

Par l'équivalent de Stirling, on sait que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$. Ainsi, par la question précédente,

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right).$$

Mais

$$\ln\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\ln(n) + n\ln(n) - n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n),$$

d'où le résultat attendu.

3. En déduire le rayon de convergence et une expression de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(n!)z^n$ à l'aide de la fonction $\displaystyle g(z) = \sum_{n\geqslant 1} \ln(n)z^n$.

Correction

On sait que

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).$$

Or,

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\ln(n)}{n\ln(n)} = 1,$$

donc le rayon de convergence de la série entière $\sum n\ln(n)z^n$ est $\frac{1}{1} = 1$. Ainsi, le rayon de convergence de la série entière $\sum \ln(n!)z^n$ vaut 1. Soit z tel que $|z| < 1$. Alors

$$\sum_{n\geqslant 0} \ln(n!)z^n = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=1}^{n} \ln(k)z^n.$$

Comme

$$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=1}^{n} \ln(k)|z|^n = \sum_{n\geqslant 0} \ln(n!)|z|^n < +\infty,$$

le théorème de Fubini nous assure la possibilité d'intervertir les sommes.

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0} \ln(n!)z^n &= \sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant k} \ln(k)z^n \\ &= \sum_{k\geqslant 1} \ln(k)\frac{z^k}{1-z} \\ &= \frac{1}{1-z}g(z).\end{aligned}$$

6.5 Elise D'Andréa + Beryl Spérélakis-Beedham

Exercice 90. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

1. Vérifier que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(4n+2)a_{n+1} = (n+1)a_n$.

Correction

Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}(4n+2)a_{n+1} &= (4n+2)\frac{1}{\binom{2(n+1)}{n+1}}\\ &= (4n+2)\frac{(n+1)!^2}{(2n+2)!}\\ &= (4n+2)\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\\ &= (n+1)a_n,\end{aligned}$$

d'où le résultat demandé.

2. Donner le rayon de convergence de f, que l'on notera R.

Correction

Comme $a_n \neq 0$ pour tout n, on peut appliquer la règle de D'Alembert :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{4n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4},$$

donc $R = 4$.

3. Montrer que : $\forall x \in]-R, R[, x(4-x)f'(x) - (x+2)f(x) + 2 = 0$.

Correction

Soit $x \in]-R, R[$. Alors

$$\begin{aligned}x(4-x)f'(x) &= (4x-x^2)f'(x)\\ &= (4x-x^2)\sum_{n\geqslant 1} na_n x^{n-1}\\ &= 4\sum_{n\geqslant 1} na_n x^n - \sum_{n\geqslant 1} na_n x^{n+1}\\ &= 4\sum_{n\geqslant 1} na_n x^n - \sum_{n\geqslant 2}(n-1)a_{n-1}x^n\\ &= 4a_1 x + \sum_{n\geqslant 2}\left(4na_n - (n-1)a_{n-1}\right)x^n. \quad = 2x + \sum_{n\geqslant 2}\left(4na_n - (n-1)a_{n-1}\right)x^n.\end{aligned}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

De plus,

$$\begin{aligned}
(x+2)f(x) &= \sum_{n\geqslant 0} a_n x^{n+1} + 2\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \\
&= 2a_0 + \sum_{n\geqslant 1}(a_{n-1}+2a_n)x^n \\
&= 2a_0 + (a_0+2a_1)x + \sum_{n\geqslant 2}(a_{n-1}+2a_n)x^n \\
&= 2+2x+\sum_{n\geqslant 2}(a_{n-1}+2a_n)x^n.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
x(4-x)f'(x)-(x+2)f(x) &= 2x+\sum_{n\geqslant 2}\left(4na_n-(n-1)a_{n-1}\right)x^n - 2 - 2x - \sum_{n\geqslant 2}(a_{n-1}+2a_n)x^n \\
&= -2+\sum_{n\geqslant 2}\left(4na_n-(n-1)a_{n-1}-a_{n-1}-2a_n\right)x^n \\
&= -2+\sum_{n\geqslant 2}\left((4n-2)a_n-na_{n-1}\right)x^n \\
&= -2,
\end{aligned}$$

par la relation de récurrence trouvée à la question précédente. Le résultat est ainsi prouvé.

4. En posant $u=\sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$, trouver une primitive de $\dfrac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}$ sur $]0,4[$.

Correction

On imagine que ceci nous aidera à déterminer f par méthode de variation de la constante. On cherche à calculer $\displaystyle\int^x \frac{\sqrt{4-t}}{t\sqrt{t}}dt$ On pose $u=\sqrt{\dfrac{4-t}{t}}$, et on a alors

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{4-t}\sqrt{t}} - \frac{\sqrt{4-t}}{2t\sqrt{t}} = -\frac{t+4-t}{2t\sqrt{t}} = -\frac{2}{t\sqrt{4-t}\sqrt{t}}$$

On exprime enfin t en fonction de u : $u^2t = 4-t$ donc $t=\dfrac{4}{u^2+1}$. On a donc, en particulier,

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{4-t}}{t\sqrt{t}} &= \frac{4-t}{t\sqrt{4-t}\sqrt{t}} \\
&= u^2 t\frac{1}{t\sqrt{4-t}\sqrt{t}} \\
&= \frac{u^2}{u^2+1}\frac{4}{t\sqrt{4-t}\sqrt{t}} \\
&= -2\frac{u^2}{u^2+1}\frac{du}{dt}
\end{aligned}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

On en déduit donc, par changement de variables, que

$$\begin{aligned}\int^x \frac{\sqrt{4-t}}{t\sqrt{t}}dt &= -2\int^{\sqrt{\frac{4-x}{x}}} \frac{u^2}{u^2+1}du \\ &= -2\int^{\sqrt{\frac{4-x}{x}}} 1-\frac{1}{u^2+1}du \\ &= -2\sqrt{\frac{4-x}{x}}+2\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right).\end{aligned}$$

5. Déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{x+2}{x(4-x)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{4-x}$. Trouver enfin l'expression de $f(x)$.

Correction

On remarque que

$$\frac{1}{2x}+\frac{3}{2(4-x)}=\frac{4-x+3x}{2x(4-x)}=\frac{x+2}{x(4-x)}.$$

On sait ensuite que, sur $]0,4[$, f est solution de l'équation différentielle

$$f'(x)-\frac{x+2}{x(4-x)}f(x)=\frac{-2}{x(4-x)}$$

Or, une primitive de

$$\frac{x+2}{x(4-x)}=\frac{1}{2x}+\frac{3}{2(4-x)}$$

est

$$x\mapsto\frac{1}{2}\ln(x)-\frac{3}{2}\ln(4-x)=\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}\right),$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{x\mapsto\lambda\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

Ensuite, on fait une méthode de variation de la constante pour déterminer exactement f. On pose

$$g:x\mapsto\frac{f(x)}{\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}}.$$

Alors, comme $f'(x)-\dfrac{x+2}{x(4-x)}f(x)=\dfrac{-2}{x(4-x)}$, on en déduit que

$$g'(x)\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}=\frac{-2}{x(4-x)},$$

donc que

$$g'(x)=\frac{-2(4-x)^{3/2}}{\sqrt{x}x(4-x)}=-2\frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}.$$

Comme une primitive de $x\mapsto\dfrac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}$ est

$$x\mapsto-2\sqrt{\frac{4-x}{x}}+2\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right),$$

on en déduit que l'on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$g(x) = \lambda + 4\sqrt{\frac{4-x}{x}} - 4\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right),$$

donc

$$f(x) = \lambda\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}} + \frac{4}{4-x} - 4\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right).$$

Pour déterminer λ, on rappelle que f et f' sont continues en 0, que $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{1}{\binom{2}{1}} = \frac{1}{2}$. L'information $f(0) = 1$ ne nous apporte rien. En revanche,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lambda\frac{x+2}{\sqrt{x}(4-x)^{5/2}} + \frac{4}{(4-x)^2} - 4\frac{x+2}{\sqrt{x}(4-x)^{5/2}}\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) + 4\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}\frac{1}{2\sqrt{4-x}\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+2}{\sqrt{x}(4-x)^{5/2}}\left(\lambda - 4\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right)\right) + \frac{6}{(4-x)^2} \end{aligned}$$

Pour que cette quantité tende vers une limite finie en 0, il faut que

$$\lambda - 4\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc que $\lambda = 4\frac{\pi}{2} = 2\pi$.
Finalement,

$$f(x) = 2\pi\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}} + \frac{4}{4-x} - 4\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right).$$

Exercice 91. Soit $n \geqslant 2$ entier naturel, A une matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. On pose $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto \text{Tr}(AM)\text{I}_n \end{array}\right.$.

1. Exprimer φ^2 en fonction de φ.

Correction

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\varphi^2(M) = \varphi(\text{Tr}(AM)\text{I}_n) = \text{Tr}(AM)\varphi(\text{I}_n) = \text{Tr}(AM)\text{Tr}(A)\text{I}_n.$$

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit diagonalisable. Préciser ses espaces propres.

Correction

On remarque que

$$\varphi^2 - \text{Tr}(A)\varphi = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))},$$

donc $P(X) = X^2 - \text{Tr}(A)X$ annule φ.

- si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, $\varphi^2 = 0$ donc φ ne possède que 0 comme valeur propre. Une CNS pour que φ soit diagonalisable est alors que φ soit nulle, c'est-à-dire que A soit nulle (car si φ est nulle, $\varphi(A^\top) = 0$ donc $\mathrm{Tr}(AA^\top) = 0$, donc $A = 0$).
- si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, φ est annulé par P qui est scindé à racines simples, donc φ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{0, \mathrm{Tr}(A)\}$.
  - détermination de $\ker(\varphi)$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors on a les équivalences :
  $$\varphi(M) = 0_n \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(AM) = 0.$$
  Or, $\psi : M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$ est une forme linéaire, donc $\ker(\varphi)$ est l'**hyperplan** $\ker(\psi)$ (si on met la structure euclidienne canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est en fait $(A^\top)^\perp$)
  - détermination de $\ker(\varphi - \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}) = E_{\mathrm{Tr}(A)}(\varphi)$. Soit $M \in E_{\mathrm{Tr}(A)}(\varphi)$. Alors
  $$\varphi(M) = \mathrm{Tr}(A)M \text{ donc } \mathrm{Tr}(AM)\mathrm{I}_n = \mathrm{Tr}(A)M, \text{ d'où } M = \frac{\mathrm{Tr}(AM)}{\mathrm{Tr}(A)}\mathrm{I}_n,$$
  donc $M \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$. Réciproquement, si $M \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$, $\varphi(M) = \mathrm{Tr}(A)M$.

6.6 Nils Derouet

Exercice 92. Soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de I et de J puis montrer que $\mathrm{I} = J$.

Correction

Existence de I. Notons $f(x) = \ln(\sin(x))$.

- f est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,
- Équivalent en 0 :
$$\ln(\sin(x)) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right),$$
mais $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc
$$\ln(\sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x),$$
intégrable en 0. Donc f est intégrable en 0.

Ainsi, I existe bien.

Existence de J. On considère la bijection $\varphi : \frac{\pi}{2} - x$, bijection strictement décroissante de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans lui-même. Alors, par le théorème de changement de variables,

$\displaystyle\int_{\pi/2}^{0} \ln(\cos(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ et $\displaystyle\int_{\varphi(\pi/2)}^{\varphi(0)} \ln(\cos(t))dt$ ont même nature et

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} = -\int_{\pi/2}^{0} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx \\
&= \int_{\pi/2}^{0} \ln(\cos(\varphi(x))\varphi'(x)dx \\
&= \int_{\varphi(\pi/2)}^{\varphi(0)} \ln(\cos(t))dt \\
&= J
\end{aligned}$$

On répond ainsi sur l'existence de J et son égalité avec I.

2. Calculer $\mathrm{I} + J$. En déduire la valeur de I.

Correction

On calcule alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} + J &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x))dx \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)\cos(x))dx \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) dx \\
&= -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))dx.
\end{aligned}$$

Dans l'intégrale, on fait le changement de variables $y = 2x$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))dx &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \ln(\sin(y))dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(y))dy + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(y))dy \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{I} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\pi - z))dz \text{ en posant } z = \pi - y \\
&= \mathrm{I}.
\end{aligned}$$

Donc, comme $\mathrm{I} = J$, on en déduit que $\mathrm{I} = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2)$.

Exercice 93. Soit A une matrice antisymétrique de taille n, f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Soit E l'ensemble des matrices colonnes de longueur n. On utilisera le produit scalaire canonique sur E.

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$

Correction

Soient x et y dans E. Alors

$$\langle f(x), y\rangle = (AX)^\top Y = X^\top A^\top Y = X^\top(-A)Y = -X^\top(AY) = -\langle x, f(y)\rangle .$$

2. (a) Montrer que $\det(f) = (-1)^n \det(f)$. Que peut-on en déduire ?

Correction

On sait que

$$\begin{aligned}\det(f) &= \det(A)\\ &= \det(A^\top)\\ &= \det(-A)\\ &= (-1)^n\det(A).\end{aligned}$$

On en déduit que, si n est impair, A et donc f ne sont pas inversibles.s

(b) Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Correction

Soient x dans $\ker(f)$ et y dans $\mathrm{Im}(f)$. On dispose alors de $w \in E$ tel que $y = f(w)$. Alors

$$\langle x, y\rangle = \langle x, f(w)\rangle = -\langle f(x), w\rangle = 0,$$

donc $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux. Ils sont donc en somme directes donc, comme, par le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$, on en déduit que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.

(c) Montrer que l'endomorphisme induit sur $\operatorname{Im} f$ est antisymétrique injectif.

Correction

On sait, par le cours de sup, que toute application linéaire réalise un isomorphisme d'un supplémentaire de son noyau sur son image, donc l'endomorphisme induit sur $\operatorname{Im} f$ est un automorphisme. Il est antisymétrique car $\forall (x, y) \in \mathrm{Im}(f)$, $(x, y) \in E^2$ donc $\langle x, f(y)\rangle = -\langle f(x), y\rangle$.

3. On suppose maintenant $n = 3$. On note toujours f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

(a) Montrer que dans une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E, on peut écrire :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a\\ 0 & a & 0\end{pmatrix}, \text{ où } a \in \mathbb{R}$$

Correction

On sait déjà que f n'est pas inversible, que $E = \ker(f) \oplus^\perp \mathrm{Im}(f)$ et que $\dim(\mathrm{Im}(f))$ est paire car l'induit de f sur $\mathrm{Im}(f)$ est inversible. Donc

- ou bien $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ et le résultat est évident,
- ou bien $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. On prend alors e_1 une base de $\ker(f)$ et $e_2 \in \mathrm{Im}(f) \setminus \{0\}$, et $\varepsilon_3 = f(e_2)$. Alors $\varepsilon_3 \neq 0_E$ car f réalise un automorphisme de $\mathrm{Im}(f)$, et

$$\langle e_2, \varepsilon_3 \rangle = \langle e_2, f(e_2) \rangle = -\langle f(e_2), e_2 \rangle,$$

donc $\langle e_2, \varepsilon_3 \rangle = 0$. Donc $\varepsilon_3 \perp e_2$. En posant $e_3 = \dfrac{\varepsilon_3}{\|\varepsilon_3\|}$, et $a = \|\varepsilon_3\|$, on a bien (e_1, e_2, e_3) qui est une base orthonormée de E.
De plus, $f(e_2) = ae_3$. Enfin

$$\langle f(e_3), e_2 \rangle = -\langle e_3, f(e_2) \rangle = -a \text{ et } \langle f(e_3), e_3 \rangle = 0,$$

donc $f(e_3) = -ae_2 + 0e_3$, d'où la forme de la matrice.

(b) Démontrer qu'il existe u dans $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout x dans $\mathbb{R}^3$, $f(x) = u \wedge x$, où $\wedge$ désigne le produit vectoriel.

Correction

Soit $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. Alors

$$\begin{aligned} u \wedge e_1 &= -\beta e_3 + \gamma e_2 \\ u \wedge e_2 &= \alpha e_3 - \gamma e_1 \\ u \wedge e_3 &= -\alpha e_2 + \beta e_1 \end{aligned}$$

En prenant $\alpha = a$, $\beta = \gamma = 0$, on a le résultat attendu.

6.7 Nicolas Dumitrescu-Palcau

Exercice 94. On dispose d'une urne contenant n boules blanches et n boules rouges. On effectue des tirages selon la règle suivante :

- si l'on pioche une boule rouge, on la remet dans l'urne ;
- si l'on pioche une boule blanche, on la met de côté et on rajoute une boule rouge dans l'urne.

On note la variable aléatoire X_p qui désigne le nombre de boules blanches dans l'urne au p-ième tirage, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner la loi de X_1 et X_2.

Correction

On notera, dans tout l'exercice, Y_k la couleur de la boule tirée au k-ième tirage (0 : blanche, 1 : rouge). X_1 est une variable aléatoire certaine égale à n : au premier tirage, on a n boules blanches.
X_2 est égale ou bien à n, ou à $n-1$. On peut dire que

$$\mathbb{P}(X_2 = n) = \mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(X_n = n-1) = \frac{1}{2}.$$

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X_p = n)$.

Correction

Il reste p boules blanches au p-ième tirage si on a uniquement tiré des boules rouges, donc, par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_p = n) &= \mathbb{P}(Y_1 = \cdots = Y_{p-1} = 1)\\ &= \mathbb{P}(Y_1 = 1)\mathbb{P}_{Y_1=1}(Y_2 = 1)\mathbb{P}_{Y_1=Y_2=1}(Y_3 = 1)\dots\mathbb{P}_{Y_1=\cdots=Y_{p-2}=1}(Y_{p-1} = 1)\\ &= \frac{1}{2^{p-1}}.\end{aligned}$$

3. Donner, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, une relation entre $\mathbb{P}(X_{p+1} = k)$, $\mathbb{P}(X_p = k+1)$ et $\mathbb{P}(X_p = k)$.

Correction

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors pour que $X_{p+1} = k$, il faut qu'il y ait eu k ou $k+1$ boules blanches à l'étape précédente. Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{p+1} = k) &= \mathbb{P}_{X_p=k}(X_{p+1} = k)\mathbb{P}(X_p = k) + \mathbb{P}_{X_p=k+1}(X_{p+1} = k)\mathbb{P}(X_p = k+1)\\ &= \mathbb{P}_{X_p=k}(Y_p = 1)\mathbb{P}(X_p = k) + \mathbb{P}_{X_p=k+1}(Y_p = 0)\mathbb{P}(X_p = k+1)\\ &= \frac{2n-k}{2n}\mathbb{P}(X_p = k) + \frac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k+1)\end{aligned}$$

4. Justifier que la fonction génératrice $G_p(t)$ de X_p est un polynôme.

Correction

X_p est à valeurs dans un ensemble fini d'entiers, donc G_p est bien un polynôme.

5. Démontrer la relation

$$G_{p+1}(t) = G_p(t) + \frac{1-t}{2n}G_p'(t).$$

Correction

Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
G_{p+1}(t) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_{p+1} = k)t^k \\
&= \frac{1}{2^p}t^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2n-k}{2n}\mathbb{P}(X_p = k)t^k + \frac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k+1)t^k \\
&= \frac{1}{2^p}t^n + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_p = k)t^k}_{G_p(t) - \frac{1}{2^{p-1}}t^n} - \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}(X_p = k)t^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k+1)t^k \\
&= G_p(t) - \frac{1}{2^p}t^n - \frac{t}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} k\mathbb{P}(X_p = k)t^k + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X_p = k)t^{k-1} \\
&= G_p(t) - \frac{t}{2n}n\mathbb{P}(X_p = n)t^n - \frac{t}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} k\mathbb{P}(X_p = k)t^k + \frac{1}{2n}G_p'(t) \\
&= G_p(t) + \frac{1-t}{2n}G_p'(t).
\end{aligned}$$

6. Donner une relation entre $\mathbb{E}(X_{p+1})$ et $\mathbb{E}(X_p)$. Calculer $\mathbb{E}(X_p)$. Calculer sa limite lorsque $p \to +\infty$. Interpréter.

Correction

On dérive la relation précédente :

$$G_{p+1}'(t) = G_p'(t) - \frac{1}{2n}G_p'(t) + \frac{1-t}{2n}G_p''(t)$$

Soit, en évaluant en 1,

$$\mathbb{E}(X_{p+1}) = \mathbb{E}(X_p) - \frac{1}{2n}\mathbb{E}(X_p) = \frac{2n-1}{2n}\mathbb{E}(X_p),$$

d'où

$$\mathbb{E}(X_p) = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{p-1}\mathbb{E}(X_1) = n\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{p-1}.$$

Exercice 95. **1.** Rappeler la forme d'une matrice de Vandermonde et l'expression de son déterminant.

Correction

C'est du cours !

2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$ on pose $f_k : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{kx}$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Correction

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$.

Première méthode : avec le déterminant de Vandermonde. On dérive l'égalité précédente p fois et on évalue en 0 : cela donne $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i i^p = 0$. On obtient donc le système, en dérivant de 0 à $n-1$ fois

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = 0 \\ \lambda_1 + 2^2\lambda_2 + \cdots + n^2\lambda_n = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 + 2^{n-1}\lambda_2 + \cdots + n^{n-1}\lambda_n = 0, \end{cases} \text{ soit } V \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

où V est la matrice de Vandermonde associée à $(1, \dots, n)$: elle est inversible car $(1, \dots, n)$ sont deux à deux distincts.
Deuxième méthode : avec des limites. Supposons que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$. Soit p le plus grand indice tel que $\lambda_p \neq 0$. Alors $0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \lambda_p e^{px}$, ce qui est absurde, $\lambda_p e^{px} \underset{x \to +\infty}{\not\sim} 0$, donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$.
Remarque : cette deuxième méthode ne fonctionne pas si on regardait des $\exp(\alpha_i x)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

3. (a) Sans les calculer, montrer que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ admet trois racines distinctes dans $\mathbb{C}$, que l'on notera α, β et γ.

Correction

Déjà, si on pose $f : x \mapsto x^3 + x + 1$, $f' : x \mapsto x^2 + 1$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f croît strictement. f est de plus continue et $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ donc, par le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Ensuite, P est de degré 3 donc admet trois racines complexes (comptées avec multiplicité). Comme il n'admet qu'une racine réelle, il admet aussi deux autres racines β et γ, complexes non réelles, conjuguées (et donc différentes).

(b) Résoudre le système $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z = 0 \end{cases}$

Correction

Il s'agit d'un système de Vandermonde, qui n'a comme solution que $(0, 0, 0)$.

6.8 Theodore Froment

Exercice 96. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \int_0^1 e^{-1/t} t^n \, dt$

1. Montrer que l'intégrale est bien définie et donner son signe.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $f_n(t) = \mathrm{e}^{-1/t} t^n$. Alors

- f_n est continue sur $]0, 1]$,
- $-\dfrac{1}{t} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ donc $f_n(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$, donc f_n est prolongeable par continuité en 0.

Donc I_n est bien définie.

2. Étudier les variations de I_n.

Correction

Soit $t \in [0, 1]$. Alors $t^{n+1} \leqslant t^n$, donc $f_{n+1}(t) \leqslant f_n(t)$ d'où, par croissance de l'intégrale, $\mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n$. Donc $(\mathrm{I}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît.

3. Montrer la convergence de I_n et déterminer sa limite.

Correction

On remarque que f_n est positive donc $\mathrm{I}_n \geqslant 0$ pour tout n. Décroissante et minorée, I_n converge. Mais, en fait,

$$\mathrm{e}^{-1/t} \leqslant \mathrm{e}^{-1},$$

donc

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{e}^{-1} \int_0^1 t^n dt = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(n+1)\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n-1} = \mathrm{e}^{-1}$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(n+1)\mathrm{I}_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-1/t}(n+1)t^n dt.$$

Effectuons une intégration par parties, en dérivant $u(t) = \mathrm{e}^{-1/t}$ en $\dfrac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-1/t}$. et en primitivant $(n+1)t^n$ en $v(t) = t^{n+1}$. Le crochet $[u(t)v(t)]_0^1$ converge bien. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(n+1)\mathrm{I}_n &= [\mathrm{e}^{-1/t} t^{n+1}]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{t^2} \mathrm{e}^{-1/t} t^{n+1} dt \\
&= \mathrm{e}^{-1} - \int_0^1 \mathrm{e}^{-1/t} t^{n-1} dt \\
&= \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{I}_{n-1},
\end{aligned}$$

d'où la relation attendue.

5. Montrer que $\mathrm{I}_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$ quand $n \to \infty$.

Correction

Par décroissance de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a, pour tout n,

$$(n+2)\mathrm{I}_n \leqslant (n+1)\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n-1} \leqslant (n+2)\mathrm{I}_{n-1},$$

d'où

$$(n+2)\mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{e}^{-1} \leqslant (n+2)\mathrm{I}_{n-1},$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{e}^{-1}}{n+3} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n+2},$$

d'où, par encadrement, $n\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1}$, d'où l'équivalent désiré.

6. Déterminer la nature de la série $\sum \mathrm{I}_n$; de $\sum(-1)^n\mathrm{I}_n$.

Correction

Par comparaison de séries à termes positifs, $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$, terme général d'une série divergente, donc $\sum \mathrm{I}_n$ diverge.
Ensuite, $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante, qui tend vers 0, donc, par le critère des séries alternées, $\sum(-1)^n\mathrm{I}_n$ converge.

7. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum \mathrm{I}_n x^n$.

Correction

Comme $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$ et que le rayon de convergence de $\sum \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}x^n$ vaut 1, le rayon de convergence de $\sum \mathrm{I}_n x^n$ vaut aussi 1.

Exercice 97. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = 4A^2$. On suppose que 2 et -2 sont valeurs propres de A. Montrer que A est diagonalisable.

Correction

Déjà, on remarque que $X^4 - 4X^2 = X^2(X^2-4)$ est un polynôme annulateur de A. Donc les valeurs propres de A sont dans $\{0, 2, -2\}$. Deux possibilités alors

- si 0 est valeur propre de A, alors A possède 3 valeurs propres et est de dimension 3 donc A est diagonalisable,
- si 0 n'est pas valeur propre de A, alors comme $A^4 = 4A^2$, $A^2 = 4\mathrm{I}_3$, donc $X^2 - 4$ est annulateur de A, donc A est annulé par un polynôme scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

6.9 Sabrina Guecem

Exercice 98. Soit $n \geqslant 2$. Un secrétaire téléphone à n clients. On modélise par une variable aléatoire X le nombre de clients que le secrétaire parvient à joindre avec une probabilité $p \in]0, 1[$ à chaque appel. On suppose que les appels sont indépendants entre eux.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

1. Déterminer la loi de X. Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Correction

Si on note Y_i la variable aléatoire valant 1 si le i-ème client décroche et 0 sinon, $X = Y_1 + \cdots + Y_n$ est une somme de n variables de Bernoulli indépendantes, donc $X \sim \mathscr{B}(n, p)$. Donc $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

2. Parmi les $n - X$ clients restants, le secrétaire appelle une seconde fois. On note Y la variable modélisant le nombre de clients que le secrétaire parvient à joindre lors de cette seconde série d'appels. On note $Z = X + Y$.

(a) À quoi correspond Z ? Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Z.

Correction

Z correspond au nombre total de clients que le secrétaire arrive à appeler. Ainsi, Z est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$

(b) Calculer $\mathbb{P}(Z = 0)$.

Correction

On sait que

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(X = 0) \times \mathbb{P}_{X=0}(Y = 0) = (1-p)^n(1-p)^n.$$

(c) Montrer que $\mathbb{P}(Z = 1) = npq^{2n-2}(1+q)$ avec $q = 1 - p$.

Correction

C'est énervant, pourquoi ne pas directement tout faire... On peut écrire que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = 1) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) \\ &= \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}_{X=1}(Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}_{X=0}(Y = 1) \\ &= npq^{n-1}q^{n-1} + q^n npq^{n-1} \\ &= np(1+q)q^{2n-2}.\end{aligned}$$

(d) Soit h un entier appartenant à $[\![0, n-k]\!]$, avec k appartenant à $[\![0, n]\!]$. Calculer $\mathbb{P}(Y = h \mid X = k)$.

Correction

On remarque que la loi de Y conditionnée à $X = k$ est binomiale de paramètres $(n-k, p)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y = h \mid X = k) = \binom{n-k}{h} p^h q^{n-k-h}.$$

(e) En déduire la loi de Z.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) &= \mathbb{P}(X + Y = k) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X + Y = k, X = i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(Y = k - i, X = i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}_{X=i}(Y = k - i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} q^{n-k} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{n!(n-i)!}{i!(n-i)!(k-i)!(n-k)!} p^i q^{n-i} p^{k-i} q^{n-k} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{k!} \frac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!} p^i q^{n-i} p^{k-i} q^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} p^k q^{2n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} q^{-i} \\
&= \binom{n}{k} p^k q^{2n-k} \left(\frac{1}{q} + 1\right)^k \\
&= \binom{n}{k} p^k (q+1)^k q^{2n-2k} \\
&= \binom{n}{k} (1-q)^k (q+1)^k q^{2n-2k} \\
&= \binom{n}{k} (1-q^2)(q^2)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Donc $Z \sim \mathscr{B}(n, 1 - q^2)$.

Exercice 99. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$.
On considère le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)g(t)\,dt$.
Soit $G = \{f \in E \mid f'' + f = 0\}$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et que $G = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ avec f_1, f_2 deux fonctions à déterminer.

Correction

Par le cours sur les équations différentielles, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène du second ordre est un plan vectoriel, donc F est un plan vectoriel. De plus, on sait, toujours par le cours sur les équations différentielles, que

$$G = \mathrm{Vect}(\sin, \cos).$$

2. Calculer le produit scalaire de f_1 et f_2.

Correction

On calcule
$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_0^\pi \sin(t)\cos(t)dt = \left[\frac{1}{2}\sin(t)^2\right]_0^\pi = 0.$$

3. (question ajoutée) Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $x \mapsto \sin(nt)$ et $x \mapsto \cos(nt)$ sont dans $G^\perp$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f(t) = \sin(nt)$. Alors
$$\langle f, \sin\rangle = \int_0^\pi \sin(nt)\sin(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n-1)t) - \cos((n+1)t)dt = 0,$$
et
$$\langle f, \cos\rangle == \int_0^\pi \sin(nt)\cos(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin((n+1)t) - \sin((n-1)t)dt = 0,$$
et on adapte pour cos. Donc f est bien dans $G^\perp$.

4. (question ajoutée) Démontrer que pour toute suites $(a_n)_{n\geqslant 2}$ et $(b_n)_{n\geqslant 2}$ telles que $\sum |a_n|n^2$ et $\sum |b_n|n^2$ convergent, alors la fonction
$$f : x \mapsto \sum_{n\geqslant 2} a_n \sin(nx) + b_n\cos(nx)$$
est définie et est dans $G^\perp$.

Correction

C'est en fait une question de séries de fonctions. On note, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\varphi_n(x) = a_n\sin(nx) + b_n\cos(nx)$. Alors

- pour tout n dans $\mathbb{N}$, φ_n est dérivable deux fois et
$$\varphi_n'(x) = na_n\cos(nx) - nb_n\sin(nx) \text{ et } \varphi_n''(x) = -n^2a_n\sin(nx) - n^2b_n\cos(nx).$$
- soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$,
$$|\varphi_n(x)| \leqslant |a_n| + |b_n| \leqslant n^2(|a_n| + |b_n|),\ |\varphi_n(x)| \leqslant n|a_n| + n|b_n| \leqslant n^2(|a_n| + |b_n|),$$
donc les séries de fonctions $\sum \varphi_n$ et $\sum \varphi_n'$ convergent simplement (en fait normalement).
- de même, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,
$$|\varphi_n''(x)| \leqslant n^2|a_n| + n^2|b_n|,$$
indépendant de x, donc $\|\varphi_n''\|_\infty \leqslant n^2|a_n| + n^2|b_n|$, terme général d'une série convergente. Ainsi, la série de fonctions $\sum \varphi_n$ converge normalement.

Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, on en déduit que f est bien deux fois dérivable, donc est dans E.
Mais, par convergence normale de la série de fonctions,
$$\int_0^\pi f(x)\sin(x) = \sum_{n\geqslant 2}\int_0^\pi \sin(nx)\sin(x)dx = 0,$$

de même pour cos. Donc f est bien dans $G^{\perp}$.

6.10 Frederic Hor

Exercice 100. On considère 3 points A, B et C.
Une puce se trouve à l'instant 0 en A. À chaque instant la puce se déplace sur un autre point avec équiprobabilité.
On note A_n l'événement « la puce se trouve en A à l'instant n », et $\mathbb{P}(A_n)$ la probabilité associée. De même avec $\mathbb{P}(B_n)$ et $\mathbb{P}(C_n)$.
On note J la matrice 3×3 avec que des 1, et $M = J - \mathrm{I}_3$, et

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix}$$

1. Trouver une relation entre U_{n+1} et U_n.

Correction

Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(B_n), \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ \mathbb{P}(B_{n+1}) \\ \mathbb{P}(C_{n+1}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(C_n) \\ \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(C_n) \\ \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}MU_n \end{aligned}$$

2. M est-elle diagonalisable ? La diagonaliser et donner les espaces propres. En déduire M^n.

Correction

La matrice M est symétrique réelle, donc est diagonalisable. On diagonalise J pour en déduire une diagonalisation de M.
Comme $J^2 = 3J$, J possède 0 et 3 comme valeurs propres. L'espace propre associé à la valeur propre 0 est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, celui associé à la valeur propre 3 est

$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Ainsi, si

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$J = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1},$$

donc

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= P^{-1}JP + P^{-1}\mathrm{I}_3 P \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \mathrm{I}_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc diagonalisé M. Les espaces propres sont ceux trouvés pour J, avec pour valeurs propres respectives 1 et 4. On peut en déduire

$$M^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

3. Déterminer un polynôme annulateur de J. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X-1)^n$ par $X(X-3)$. En déduire M^n.

Correction

On a déjà fait le travail : $X(X-3)$ annule J.
Ensuite, le reste de la division euclidienne de $(X-1)^n$ par $X(X-3)$ est de degré inférieur ou égal à 1, donc de la forme $aX+b$. On écrit

$$P(X) = (X-1)^n = X(X-3)Q(X) + aX + b.$$

On évalue en 0 et on a $b = (-1)^n$. On évalue en 3 et on a $2^n = 3a + b$ donc

$$b = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

On en déduit une autre expression de M^n :

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{2^n}(J - \mathrm{I}_3)^n \\ &= \frac{1}{2^n}P(J) \\ &= \frac{1}{2^n}\left(J(J-3)Q(X) + aJ + b\right) \\ &= \frac{1}{2^n}(aJ+b) \\ &= \frac{1}{2^n}\frac{2^n - (-1)^n}{3}J + \frac{1}{2^n}(-1)^n\mathrm{I}_3. \end{aligned}$$

4. Expression de $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(B_n)$, $\mathbb{P}(C_n)$? Limites ?

Correction

On en déduit que

$$U_n = M^n \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 + 2\times(-1/2)^n\\ 1-(-1/2)^n \\ 1-(-1/2)^n\end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

ce qui signifie qu'en temps long, la variable aléatoire du numéro du sommet est uniforme.

Exercice 101. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

1. Justifier la définition de la suite (u_n) et montrer qu'elle converge vers 0.

Correction

La suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et tend vers 0 donc, d'après le critère des séries alternées, la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ converge. Donc son reste d'ordre n, u_n, est défini et tend vers 0

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}u_n$. Montrer que la série de terme général v_n converge.

Correction

Attention, piège : v_n n'est pas alternée, elle est de signe constant, car u_n est du signe de $(-1)^{n+2}$.
En revanche, le critère des séries alternées nous assure que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}},$$

d'où

$$|v_n| \leqslant \frac{1}{n^{3/2}},$$

terme général d'une série convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |v_n|$ converge donc $\sum v_n$ converge.

6.11 Fleurine Jaegler

Exercice 102. On définit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,dt$.

1. Justifier la convergence de I.

Correction

On note $f(t) = \dfrac{\sin^3(t)}{t^2}$. Alors

- f est continue sur $]0, +\infty[$,
- $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^3}{t^2} = t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable en 0,
- $|f(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, intégrable en $+\infty$, donc, par comparaison, f est intégrable en $+\infty$.

Donc I converge bien.

2. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ \sin^3(t) = -\dfrac{1}{4}\sin(3t) + \dfrac{3}{4}\sin(t)$.

Correction

On calcule

$$\begin{aligned}\sin^3(t) &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 \\ &= -\frac{1}{8i}\left(e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{3it}\right) \\ &= -\frac{\sin(3t)}{4} + \frac{3}{4}\sin(t).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

3. Montrer que $\mathrm{I} = \dfrac{3}{4}\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt$.

Correction

On ne peut pas utiliser la question précédente et séparer l'intégrale en 2... On sait que $\mathrm{I} = \lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)^3}{t^2}dt$. Soit $x > 0$. Alors

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)^3}{t^2}dt &= \int_x^{+\infty} \frac{-\frac{1}{4}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin(t)}{t^2}dt \\ &= -\frac{1}{4}\int_x^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2}dt + \frac{3}{4}\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt,\end{aligned}$$

la séparation étant licite car les deux intégrales convergent. Dans la première intégrale, on fait le changement de variables $u = 3t$ et on obtient

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2}dt = \int_{3x}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2} \times 9\frac{du}{3} = 3\int_{3x}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2}du.$$

Ainsi,

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)^3}{t^2} dt = -\frac{1}{4} \int_{3x}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt + \frac{3}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$$
$$= \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

D'où le résultat désiré.

4. Montrer que $g(t) = \dfrac{\sin(t) - t}{t^2}$ est définie et prolongeable par continuité sur $]0, +\infty[$.

5. En déduire la valeur de I.

Correction

On sait que pour tout t dans $\mathbb{R}_+$,

$$t - \frac{t^3}{6} \leqslant \sin(t) \leqslant t$$

(l'inégalité de droite est claire, celle de gauche se fait par étude de fonction ou par la série entière par exemple)
Ainsi,

$$\int_x^{3x} \frac{t - \frac{t^3}{6}}{t^2} dt \leqslant \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \leqslant \int_x^{3x} \frac{t}{t^2} dt.$$

Or,

$$\int_x^{3x} \frac{t}{t^2} dt = \ln(3x) - \ln(x) = \ln(3),$$

et

$$\int_x^{3x} \frac{t - \frac{t^3}{6}}{t^2} dt = \ln(3) - \frac{(3x)^2}{12} + \frac{x^2}{12} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \ln(3).$$

Ainsi, par encadrement, $\mathrm{I} = \ln(3)$.

Exercice 103. Soit

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}.$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Déterminer les valeurs propres de $M(a, b, c)$.

Correction

On calcule le polynôme caractéristique de M. Pour $x \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\chi_M(x) &= \begin{vmatrix} x-a & 0 & -c \\ 0 & x-b & 0 \\ -c & 0 & x-a \end{vmatrix} \\
&=_{C_1 \leftarrow C_1 + C_3} \begin{vmatrix} x-a-c & 0 & -c \\ 0 & x-b & 0 \\ x-a-c & 0 & x-a \end{vmatrix} \\
&= (x-a-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & x-b & 0 \\ 1 & 0 & x-a \end{vmatrix} \\
&=_{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} (x-a-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & x-b & 0 \\ 0 & 0 & x-a+c \end{vmatrix} \\
&= (x-a-c)(x-a+c)(x-b),
\end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de M sont $\{b, a+c, a-c\}$.

2. Calculer le déterminant de $M(a,b,c)$.

Correction

On sait que le déterminant est le produit des valeurs propres de $M(a,b,c)$, donc

$$\det(M(a,b,c)) = b(a+c)(a-c) = b(a^2-c^2).$$

3. Si le déterminant est nul, déterminer le noyau et l'image de la matrice.

Correction

Il faut disjoindre les cas :

(a) si $b \neq 0$, alors $a^2 - c^2 = 0$, donc $a = \pm c$:

- si $a = 0$, alors on lit sur la matrice que

$$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ et } \ker(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

- si $a \neq 0$, alors les colonnes 1 et 3 sont proportionnelles non nulles, et donc

$$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}\right) \text{ et } \ker(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}\right).$$

(j'ai essayé de faire des combinaisons des colonnes qui donnent, au bout du compte, 0)

(b) si $b = 0$, alors

- ou bien $a^2 - c^2 \neq 0$, et donc les colonnes 1 et 3 sont non proportionnelles. On a alors

$$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}\right) \text{ et } \ker(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

- ou bien $a^2 = c^2$. Alors si $a = 0$, M est la matrice nulle et les choses sont évidentes, ou bien $a \neq 0$ et alors

$$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}\right) \text{ et } \ker(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}\right).$$

4. $M(a, b, c)$ est-elle diagonalisable ?

Correction

La matrice $M(a, b, c)$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable.

6.12 Victoire Jalenques

Exercice 104. On considère N boules numérotées de 1 à N, avec $N \geqslant 2$.
On note X_i la variable aléatoire correspondant à la valeur de la boule tirée au i-ième tirage avec remise. Les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont supposées indépendantes.
On note $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(M_n \leqslant k)$ et en déduire la loi de M_n.

Correction

Soit $k \in [\![1, N]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n \leqslant k) &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant k, X_2 \leqslant k, \ldots, X_n \leqslant k) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant k) \text{ par indépendance de } X_1, \ldots, X_n \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{k}{N} = \left(\frac{k}{N}\right)^n.\end{aligned}$$

2. (a) Montrer que

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(M_n > k).$$

Correction

C'est une question de cours.

(b) Donner la limite de $\mathbb{E}(M_n)$ quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

Correction

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n) &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(M_n > k)\\ &= \sum_{k=0}^{N-1} 1 - \mathbb{P}(M_n \leqslant k)\\ &= \sum_{k=0}^{N-1} 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n.\end{aligned}$$

Or, $\left(\dfrac{k}{N}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour $k \in [\![0, N-1]\!]$, donc

$$\mathbb{E}(M_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N,$$

ce qui est cohérent : plus on fait de tirages, plus on a de chances qu'une boule au moins ait une valeur égale à N.

Exercice 105. Soient A et B deux matrices, et P un polynôme.

1. Montrer que si $P(A) = 0$, alors toute valeur propre de A est racine de P.

Correction

C'est une question de cours.

2. Soit $U \neq 0$ telle que $AU = UB$. Montrer que $P(A)U = UP(B)$.

Correction

On montre par récurrence sur n que $A^nU = UB^n$.
L'initialisation, pour $n = 1$, est claire.
Pour l'hérédité, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^nU = UB^n$. Alors

$$A^{n+1}U = A^nAU = A^nUB = UB^nB = UB^{n+1},$$

d'où l'hérédité et le résultat.
Ensuite, si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$, on écrit que

$$P(A)U = \sum_{k=0}^{n} a_kA^kU = \sum_{k=0}^{n} a_kUB^k = U\sum_{k=0}^{n} a_kB^k = UP(B).$$

3. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \emptyset$.

Correction

Si on avait $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$, alors on pourrait appliquer la question précédente à

$P = \chi_A$. Alors
$$\chi_A(A)U = U\chi_A(B).$$
Mais, par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$. De plus, si on écrit $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, l'hypothèse nous dit que les λ_i ne sont pas valeurs propres de B. Mais alors
$$\chi_A(B) = \prod_{i=1}^{n}(B - \lambda_i \mathrm{I}_n),$$
et pour tout i, $B - \lambda_i \mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Donc $\chi_A(B)$ est inversible. Ainsi, comme $U\chi_A(B) = 0$, on en déduit que $U = 0$, ce qui est absurde.
On conclut donc au fait que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \emptyset$.

6.13 Aurélien Simone

Exercice 106. Le but est de trouver les fonctions $f \in \mathscr{C}^2$ telles que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt,$$
qu'on notera (E).

1. Selon la valeur de $c \in \mathbb{R}$, déterminer les solutions de l'équation $y'' - cy = 0$.

Correction

- si $c > 0$, alors les solutions de l'équation sont les $\{x \mapsto \alpha e^{\sqrt{c}x} + \beta e^{-\sqrt{c}x},\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$.
- si $c = 0$, alors les solutions de l'équation sont les $\{x \mapsto \alpha + \beta x,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$.
- si $c < 0$, alors les solutions de l'équation sont les $\{x \mapsto \alpha \sin(\sqrt{c}x) + \beta \cos(\sqrt{c}x),\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $F(x,y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt$. Calculer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

Correction

Notons φ une primitive de f. Alors
$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \varphi(x+y) - \varphi(x-y).$$
On en déduit que
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \varphi'(x+y) - \varphi'(x-y) = f(x+y) - f(x-y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \varphi'(x+y) + \varphi'(x-y) = f(x+y) + f(x-y)$$

Ensuite,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = f'(x+y) - f'(x-y)$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = f'(x+y) - f'(x-y)$$

Ainsi,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

3. Soit $f \in \mathscr{C}^2$ solution de (E)

(a) Calculer $f(0)$

Correction

On sait que $f(0)^2 = 0$ donc $f(0) = 0$.

(b) Calculer $f''(x)f(y) - f''(y)f(x)$

Correction

Le calcul précédent nous mène sur la voie. On remarque que $F(x,y) = f(x)f(y)$. Alors

$$f''(x)f(y) - f''(y)f(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

(c) Déterminer alors la forme de f.

Correction

On sait que pour tous x et y,

$$f''(x)f(y) - f''(y)f(x) = 0.$$

Soit y_0 tel que $f(\alpha) \neq 0$. Alors

$$f''(x) - \frac{f''(y_0)}{f(y_0)} f(x) = 0.$$

Donc on dispose de α et β, γ tels que f soit e l'une de ces trois formes :

$$f : x \mapsto \alpha + \beta x,\ \ f : x \mapsto \alpha e^{\gamma x} + \beta e^{-\gamma x},\ \text{ ou } f : x \mapsto \alpha \sin(\gamma x) + \beta \cos(\gamma x).$$

De plus, $f(0) = 0$, donc les possibilités restantes sont

$$f : x \mapsto Cx,\ \ f : x \mapsto C\mathrm{sh}(\gamma x),\ \ f : x \mapsto C\sin(\gamma x).$$

Continuons d'explorer. En prenant $y = x$, il vient

$$\forall x,\ \ f(x)^2 = \int_0^{2x} f(t)dt = \varphi(2x) - \varphi(0),$$

soit, en dérivant,

$$2f'(x)f(x) = 2\varphi'(2x) = 2f(2x),\ \text{ donc } f'(x)f(x) = f(2x).$$

Donc
$$f(x)f'(x) = f(2x).$$
Regardons, pour chacun de ces trois cas, si f vérifie l'équation précédente :

- si $f : x \mapsto Cx$, alors
$$f(x)f'(x) = C^2x \text{ et } f(2x) = 2Cx.$$
Ainsi, f est solution de l'équation si et seulement si $C^2 = 2C$, donc $C = 0$ ou 2.
- si $f : x \mapsto C\text{sh}(\gamma x)$, où $\gamma \neq 0$, alors
$$f(x)f'(x) = C^2\gamma\text{sh}(\gamma x)\text{ch}(\gamma y).$$
et
$$f(2x) = C\text{sh}(2\gamma x) = 2C\text{sh}(\gamma x)\text{ch}(\gamma x).$$
Ainsi, f est solution de l'équation si et seulement si $C^2\gamma = 2C$, donc $C = 0$ ou $C = \dfrac{2}{\gamma}$.
- on a exactement la même relation pour le troisième cas.

4. Conclure.

Correction

On fait la synthèse du problème.

- la fonction nulle est bien solution.
- soit $f : x \mapsto 2x$. Alors
$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)dt = (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy = f(x)f(y).$$
- soit $\gamma \neq 0$ et $g : x \mapsto \dfrac{2}{\gamma}\sin(\gamma x)$. Alors
$$\begin{aligned} g(x)g(y) &= \frac{2}{\gamma}\sin(\gamma x)\frac{2}{\gamma}\sin(\gamma y) \\ &= \frac{4}{\gamma^2}\sin(\gamma x)\sin(\gamma y) \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} \int_{x-y}^{x+y} g(t)dt &= \int_{x-y}^{x+y} \frac{2}{\gamma}\sin(\gamma t)dt \\ &= \frac{2}{\gamma^2}\left(\cos(\gamma(x-y)) - \cos(\gamma(x+y))\right)s \\ &= \frac{2}{\gamma^2}2\sin(\gamma x)\sin(\gamma y), \end{aligned}$$
donc g est bien solution.
- pour h, on fait pareil, mais presqu'aucune formule de trigonométrie hyperbolique n'est exigible.

Exercice 107. Soit $(A, B, P) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $AP = PB$. On écrit $P = P_1 + \mathrm{i}P_2$ avec $(P_1, P_2) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'on pose : $Q(x) = \det(P_1 + xP_2)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $A(P_1 + xP_2) = (P_1 + xP_2)B$.

Correction

On sait que $AP = PB$ donc $AP_1 + iAP_2 = P_1B + iP_2B$. Les matrices AP_1, AP_2, P_1B, P_2B sont à coefficients réels, donc en égalisant les parties réelle et imaginaire des deux membres de l'égalité, on obtient le résultat.

2. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $Q(x_0) \neq 0$.

Correction

Par la formule de développement sur une ligne, appliquée n fois, on sait que Q est une fonction polynomiale de x. Or, comme $Q(i) \neq 0$ (car $P_1 + iP_2$ est inversible), on sait que Q n'est pas le polynôme nul. Donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x_0) \neq 0$ (sinon Q s'annulerait sur tout $\mathbb{R}$, donc une infinité de fois, donc Q serait le polynôme nul).

3. En déduire qu'il existe $P_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que : $AP_0 = P_0B$. Qu'a-t-on démontré ?

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

En posant $P_0 = P_1 + x_0 P_2$, on obtient le résultat. On a démontré que si deux matrices étaient semblables sur $\mathbb{C}$, alors elles étaient semblables sur $\mathbb{R}$.

6.14 Etienne Sponton

Exercice 108. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}\, dt$.

1. Justifier l'existence de f sur $\mathbb{R}^+$.

Correction

Soit $x \geqslant 0$. Alors

- $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}$ est continue sur $]0, +\infty[$,
- $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2t^2} e^{-xt} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, donc l'intégrande est prolongeable par continuité,
- pour tout $t > 0$, $\left|\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}\right| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$, intégrable en $+\infty$, donc $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}$ est intégrable en $+\infty$,

donc f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Correction

On cherche à appliquer un théorème de continuité des intégrales à paramètre. Notons, pour tout $t \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$, $g(x,t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$ (prolongé par continuité par $\dfrac{1}{2}$ en 0. Alors

- pour tout $x \geqslant 0$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$,
- pour tout $t \geqslant 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$,
- pour tout $t \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
|g(x,t)| &= \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}\\
&= \frac{1-\cos\left(2\frac{t}{2}\right)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}\\
&= \frac{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}\\
&= \frac{1}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\mathrm{e}^{-xt}\\
&\leqslant h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \text{ si } t \leqslant 1\\ \dfrac{2}{t^2} \text{ si } t > 1,\end{cases}
\end{aligned}$$

fonction continue par morceaux, **indépendante de** x et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Donc, par le théorème de continuité des intégrales à paramètre, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction

On applique le théorème de la classe $\mathscr{C}^2$ des intégrales à paramètre.
Remarque : l'intervalle sur lequel montrer la régularité de f incitera à montrer la classe $\mathscr{C}^2$ sur tout segment.
On note toujours $g(x,t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$. Alors

- pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$,
- on a, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$,
  - $t \mapsto g(x,t)$ est continue, intégrable,
  - $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x} g(x,t) = -\dfrac{1-\cos(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}$ continue, intégrable car prolongeable par continuité en 0, continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et car $\left|-\dfrac{1-\cos(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant \dfrac{2\mathrm{e}^{-xt}}{t}$, intégrable en $+\infty$,
  - $t \mapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} g(x,t) = (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-xt}$, fonction continue sur $\mathbb{R}_+$
- enfin, on fixe $0 < a < b$. Alors pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, pour tout x dans $[a,b]$,
$$\left|(1-\cos(t))\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant 2\mathrm{e}^{-xt} \leqslant 2\mathrm{e}^{-at},$$
fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$, **indépendante de x.**

Donc, par le théorème de classe $\mathscr{C}^2$ des intégrales à paramètre, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

Correction

On applique le théorème de limite des intégrales à paramètre. Toujours avec $g(x,t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$, on sait que

- pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
- pour tout t dans $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
- on a la domination déjà faite.

Ainsi, par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} 0 dt = 0$.
Ensuite, pour tout $x > 0$,
$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{e}^{-xt} dt.$$
Or, en notant $\varphi(x,t) = \dfrac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{e}^{-xt}$.

- pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
- pour tout t dans $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{e}^{-xt} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
- pour $x \geqslant 1$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\left|\frac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{e}^{-xt}|\right| = \frac{|2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t}\mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-t},$$

intégrable et indépendante de x,

donc, d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

5. Montrer que $\forall x > 0 \quad f'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$, puis calculer $f(x)$.

Correction

Soit $x > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-xt}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}dt - \mathfrak{Re}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(i-x)t}dt\right) \\
&= \frac{1}{x} - \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{x-i}\right) \\
&= \frac{1}{x} - \mathfrak{Re}\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on dispose de $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Mais $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $C = 0$. Donc on dispose de $D \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = x\ln(x) - x - \frac{1}{2}\int_0^x \ln(1+t^2)dt + D$$

Or, en faisant une intégration par parties, en dérivant $u : t \mapsto \ln(1+t^2)$ et en intégrant $v'(t) = 1$, on calcule

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^x \ln(1+t^2)dt &= \left[\frac{1}{2}t\ln(1+t^2)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt \\
&= \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) - \int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}dt \\
&= -x + \mathrm{Arctan}(x),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\ln(x) - x - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) + x - \mathrm{Arctan}(x) + D \\
&= x\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \mathrm{Arctan}(x) + D.
\end{aligned}$$

Comme $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $D = \dfrac{\pi}{2}$, donc pour tout $x > 0$,

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x).$$

6. Soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$. Exprimer I en fonction de $f(0)$ et calculer I.

Correction

On remarque que
$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt.$$
On effectue une intégration par parties, en posant $u(t) = 1-\cos(t)$, donc $u'(t) = \sin(t)$, et $v'(t) = \dfrac{1}{t^2}$, i.e. $v(t) = -\dfrac{1}{t}$. Le crochet $[u(t)v(t)]_0^{+\infty}$ converge (et vaut 0) donc, par intégration par parties,
$$\frac{\pi}{2} = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt,$$
d'où la valeur de l'intégrale !

Exercice 109. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda X$.

1. Exprimer $\overline{X^\top} X$ avec les coordonnées de X.

Correction

On remarque facilement que $\overline{X^\top} X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$

2. Calculer de deux manières différentes $\overline{(AX)^\top}(AX)$. Que peut-on dire de λ ?

Correction

On note $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de AX.

- déjà, $\overline{(AX)^\top}(AX) = \overline{\lambda X^\top} \lambda X^\top = |\lambda|^2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$.
- ensuite,

$$\begin{aligned}
\overline{(AX)^\top}(AX) &= \overline{X^\top A^\top} AX \\
&= \overline{X^\top} A^\top AX \text{ car } A \text{ est réelle} \\
&= \overline{X^\top} X = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.
\end{aligned}$$

Comme X est non nul, on en déduit que $|\lambda| = 1$.

6.15 Adrien Valette

Exercice 110. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 aussi.

Correction

Si f est diagonalisable, alors on dispose d'une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit diagonale. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^2$ aussi.

2. Montrer que si f est diagonalisable alors $\text{Ker}(f) = \text{Ker}\left(f^2\right)$.

Correction

On sait déjà, par le cours que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. Mais si on écrit

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 \mathrm{I}_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \mathrm{I}_{n_r} \end{pmatrix},$$

où $\lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont non nulles, alors

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} 0_{n_1} & & & \\ & \lambda_2^2 \mathrm{I}_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r^2 \mathrm{I}_{n_r} \end{pmatrix},$$

de rang égal au rang de $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, et donc le noyau de f^2 est égal à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n_1})$. Donc $\ker(f^2) = \ker(f)$.

3. Soit λ une valeur propre non nulle de f^2 et μ une racine carrée complexe de λ. Montrer que : $\text{Ker}\left(f^2 - \lambda\,\text{Id}_E\right) = \text{Ker}\left(f - \mu\,\text{Id}_E\right) \oplus \text{Ker}\left(f + \mu\text{Id}_E\right)$.

Correction

Déjà, on remarque que si $x \in \ker(f - \mu\text{Id}_E)$, alors $f(x) = \mu x$ donc $f^2(x) = \mu^2 x = \lambda x$; de même si $x \in \ker(f + \mu\text{Id}_E)$. Donc $\ker(f - \mu\text{Id}_E)$ et $\ker(f + \mu\text{Id}_E)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\ker(f^2 - \lambda\text{Id}_E)$.
Ensuite, on démontre que $\ker(f^2 - \lambda\text{Id}_E) = \ker(f - \mu\text{Id}_E) \oplus \ker(f + \mu\text{Id}_E)$ par analyse-synthèse. Soit $x \in \ker(f^2 - \lambda\text{Id}_E)$.
Analyse. Soient y dans $\ker(f - \mu\text{Id}_E)$ et z dans $\ker(f + \mu\text{Id}_E)$ tels que $x = y + z$. Alors $f(x) = \mu y - \mu z$ donc, comme $\mu \neq 0$,

$$y = \frac{x + \frac{1}{\mu} f(x)}{2} \text{ et } z = \frac{x - \frac{1}{\mu} f(x)}{2},$$

d'où l'unicité de y et z.
Synthèse. Posons

$$y = \frac{x + \frac{1}{\mu} f(x)}{2} \text{ et } z = \frac{x - \frac{1}{\mu} f(x)}{2},$$

Alors

- déjà, $y + z = x$,
- ensuite,

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{1}{\mu} f^2(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{1}{\mu}\lambda x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + \mu x\right) \text{ car } \mu^2 = \lambda \\ &= \mu y, \end{aligned}$$

  donc $y \in \ker(f - \mu\text{Id}_E)$.

- enfin,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{\mu}f^2(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{\mu}\lambda x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) - \mu x\right) \text{ car } \mu^2 = \lambda \\ &= -\mu z, \end{aligned}$$

donc $z \in \ker(f + \mu \mathrm{Id}_E)$.

D'où l'existence et la supplémentarité de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ dans $\ker(f^2 - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

4. Montrer que si f^2 est diagonalisable et inversible, alors f est diagonalisable et inversible.

Correction

Si f^2 est diagonalisable et inversible, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de f^2, qui sont **non nulles**. Alors on sait que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(f^2 - \lambda_i \mathrm{Id}_E).$$

Si on note $\mu_1, \dots, \mu_r$ des racines carrées de $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, alors la question précédente nous assure que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(f - \mu_i \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mu_i \mathrm{Id}_E),$$

donc E est somme directe des sous-espaces propres de f (quitte à retirer, dans la somme ci-dessus, les sous-espaces propres qui sont réduits à 0). Donc E est diagonalisable.

5. Montrer que si f^2 est diagonalisable, f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.

Correction

On a déjà fait le sens direct.

Pour le sens réciproque, on écrit que si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de f^2, alors

$$E = \ker(f^2) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(f^2 - \lambda_i \mathrm{Id}_E).$$

Si on note $\mu_1, \dots, \mu_r$ des racines carrées de $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, alors comme, de plus, $\ker(f^2) = \ker(f)$,

$$E = \ker(f) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(f - \mu_i \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mu_i \mathrm{Id}_E),$$

donc E est somme directe des sous-espaces propres de f (quitte à retirer, dans la somme ci-dessus, les sous-espaces propres qui sont réduits à 0). Donc E est diagonalisable.

Exercice 111. Sans préparation. Soit $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$.

1. Montrer que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Correction

On note, pour $t>0$ et $x\in\mathbb{R}$, $f(x,t)=\dfrac{\sin(xt)e^{-t}}{t}$. Fixons $x\in\mathbb{R}$. Alors

- $t\mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$,
- $f(x,t)\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{xt}{t}=x$, donc l'intégrale est faussement impropre en 0,
- $|f(x,t)|\underset{t\to+\infty}{=}o(e^{-t})$, intégrable en $+\infty$,

donc $\varphi(x)$ est bien définie.

2. Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Correction

Il s'agit d'appliquer un théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre.

- pour tout x, $t\mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$,
- pour tout $t>0$, $x\mapsto f(x,t)$ est dérivable, et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\cos(xt)e^{-t}.$$
- pour tous x dans $\mathbb{R}$ et $t>0$,
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant e^{-t},$$
indépendante de x et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Donc, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Donner alors φ' et en déduire φ à l'aide des fonctions usuelles.

Correction

En continuant la question précédente, on obtient, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t}dt\\&=\mathfrak{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{ixt}e^{-t}dt\right)\\&=\mathfrak{Re}\left(\left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_0^{+\infty}\right)\\&=\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right)\\&=\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\varphi(x)=\varphi(0)+\mathrm{Arctan}(x)=\mathrm{Arctan}(x)$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

6.16 Exos en plus (RMS, BEOS)

Exercice 112. On note pour $n \in \mathbb{N}^* x \mapsto f_n(x) = \dfrac{1}{x}\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n - 1\right)$ et $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

1. Citer le théorème de convergence dominée.

Correction

C'est du cours.

2. Justifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la définition de I_n.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- la fonction f_n est continue sur $]0, 1]$,
- étude en 0 :

$$\begin{aligned} f_n(x) &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1\right) \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\left(n\frac{x}{n}\right) \\ &\underset{x\to 0}{\sim} 1, \end{aligned}$$

donc f_n est prolongeable par continuité en 0, donc I_n est bien définie.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \times k!}$.

Correction

On sait que

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \sum_{k\geqslant 1} \frac{x^{k-1}}{k!}.$$

On montre déjà que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} dx$.

- on sait que pour tout n, f_n est continue sur $[0, 1]$ (prolongeable par continuité en 0,
- pour tout x dans $[0, 1]$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$,
- pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $[0, 1]$,

$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{1}{x}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1\right).$$

et

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} \leqslant \mathrm{e}^{n\frac{x}{n}} = \mathrm{e}^x,$$

d'où

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x},$$

intégrable sur $[0, 1]$ (quitte à prolonger par continuité) et indépendante de x.

On en déduit, par le théorème de convergence dominée, que

$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} dx.$$

On écrit ensuite que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} dx = \int_0^1 \sum_{k\geqslant 1} \frac{x^{k-1}}{k!} dx.$$

On note, pour $k \geqslant 1$, $\varphi_k(x) = \dfrac{x^{k-1}}{k!}$. Alors

$$\forall x \in [0,1],\ |\varphi_k(x)| \leqslant \frac{1}{k!},$$

indépendant de x, d'où $\|\varphi_k\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \dfrac{1}{k!}$, terme général d'une série convergente, ce qui assure que la série de fonctions $\sum \varphi_k$ converge normalement sur $[0,1]$, d'où

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{k\geqslant 1} \frac{x^{k-1}}{k!} dx &= \sum_{k\geqslant 1} \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{k!} dx \\ &= \sum_{g\geqslant 1} \frac{1}{k.k!}.\end{aligned}$$

Exercice 113. On considère $f : (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto x^2 y + y(\ln(y))^2$.

1. Déterminer les points critiques de f.

Correction

On calcule les dérivées partielles de f : f est bien $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^2 + (\ln(y))^2 + 2\ln(y)\end{aligned}$$

Ainsi, (x,y) est un point critique si et seulement si $x = 0$ et $\ln(y)(\ln(y)+2) = 0$, i.e. $y = 1$ ou $y = \mathrm{e}^{-2}$.
On calcule alors

$$f(0,1) = 0 \text{ et } f(0,\mathrm{e}^{-2}) = 4\mathrm{e}^{-2}.$$

2. Déterminer les extrema locaux et globaux de f.

Correction

On va voir si ces points critiques sont des extrema locaux, en calculant la hessienne de

f.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & \frac{2}{y}(\ln(y)+1) \end{pmatrix}$$

En particulier,

$$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

clairement symétrique positive. Donc f atteint un minimum local en $(0,1)$. Comme f est toujours positive, il s'agit d'un minimum global.
Ensuite,

$$H_f(0,\mathrm{e}^{-2}) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-2} & 0 \\ 0 & -2\mathrm{e}^{2} \end{pmatrix},$$

donc ni H_f, ni $-H_f$ n'est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, donc f n'atteint pas d'extremum local en $(0,\mathrm{e}^{-2})$. f ne possède pas d'autre point critique et $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ est ouvert, donc f n'atteint pas de maximum.

Exercice 114. Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et (S) le système différentiel $X' = AX$.

1. Montrer que A est diagonalisable.

Correction

Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+2 & 2 & 0 \\ -2 & x-3 & 0 \\ -1 & 0 & x-3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+2 & 2 \\ -2 & x-3 \end{vmatrix}(x-3) \text{ en développant selon la dernière colonne} \\
&= ((x+2)(x-3)+4)(x-3) \\
&= (x^2-x-2)(x-3) \\
&= (x+1)(x-2)(x-3),
\end{aligned}$$

donc χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites.

2. Expliciter P et D telles que $A = PDP^{-1}$.

Correction

Il s'agit de trouver, pour chaque sous-espace propre, un vecteur propre :

- détermination de $E_{-1}(A)$. On sait que

$$A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $4C_1 - 2C_2 - C_3 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_{-1}(A)$. Donc

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

- ensuite,

$$A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $C_1 - 2C_2 - C_3 = 0$. Donc

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

- enfin,

$$A - 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $C_3 = 0$, donc

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En posant

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

On sait que

$$A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. On note $U = P^{-1}X$. Déterminer le système différentiel vérifié par U et le résoudre. Déterminer alors les solutions de (S).

Correction

On note $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$. Alors, par linéarité de $X \mapsto P^{-1}X$,

$$U'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = DP^{-1}X(t) = DU(t),$$

donc

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u(t) \\ 2v(t) \\ 3w(t) \end{pmatrix},$$

donc on dispose de (α,β,γ) tels que pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$u(t)=\alpha e^{-t},\ v(t)=\beta e^{2t},\ w(t)=\gamma e^{3t}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}&=P\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\\w(t)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}4\alpha e^{-t}+\beta e^{2t}\\-2\alpha e^{-t}-2\beta e^{2t}\\-\alpha e^{-t}-\beta e^{2t}+\gamma e^{3t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

4. Soit (S') le système différentiel $X''=AX$. Déterminer les solutions réelles de (S').

Correction

En posant U de la même manière, on a

$$\begin{pmatrix}u''(t)\\v''(t)\\w''(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-u(t)\\2v(t)\\3w(t)\end{pmatrix},$$

donc on dispose de $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2)$ tels que

$$\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\\w(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\sin(t)+\alpha_2\cos(t)\\\beta_1 e^{\sqrt{2}t}+\beta_2 e^{-\sqrt{2}t}\\\gamma_1 e^{3t}+\gamma_2 e^{-3t}\end{pmatrix}.$$

On en déduit alors

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\alpha_1\sin(t)+4\alpha_2\cos(t)+\beta_1 e^{\sqrt{2}t}+\beta_2 e^{-\sqrt{2}t}\\-2\alpha_1\sin(t)-2\alpha_2\cos(t)-2\beta_1 e^{\sqrt{2}t}-2\beta_2 e^{-\sqrt{2}t}\\-\alpha_1\sin(t)-\alpha_2\cos(t)-\beta_1 e^{\sqrt{2}t}-\beta_2 e^{-\sqrt{2}t}+\gamma_1 e^{3t}+\gamma_2 e^{-3t}\end{pmatrix}$$

5. Soit E l'ensemble des solutions réelles bornées de (S'). Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

 N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

En faisant des équivalents de la solution trouvée en $\pm\infty$, on trouve que $\gamma_1 = \gamma_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$. Ainsi, l'ensemble des solutions bornées de (S') est

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4\alpha_1 \sin(t) + 4\alpha_2 \cos(t) \\ -2\alpha_1 \sin(t) - 2\alpha_2 \cos(t) \\ -\alpha_1 \sin(t) - \alpha_2 \cos(t) \end{pmatrix},\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}(X_1, X_2),$$

où

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 4\sin(t) \\ -2\sin(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \text{ et } X_2(t) = \begin{pmatrix} 4\cos(t) \\ -2\cos(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 2.

7 ENSEA

7.1 Nicolas Dumitrescu-Palcau

Exercice 115. On pose, pour tout n entier naturel, la suite $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{2+t^2}\,dt$ ainsi que la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Donner le rayon de convergence de a_n.

Correction

On note R ce rayon. On encadre a_n pour $n \geqslant 2$. On remarque que

$$a_n \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{2}\,dt = \frac{1}{2(n+1)},$$

donc R est supérieur ou égal au rayon de $\sum \frac{1}{2(n+1)} z^n$, c'est-à-dire 1.

Ensuite,

$$a_n \geqslant \int_0^1 \frac{t^n}{3}\,dt = \frac{1}{3(n+1)},$$

donc R est inférieur ou égal au rayon de $\sum \frac{1}{3(n+1)} z^n$, c'est-à-dire 1.

Donc $R = 1$.

2. Pour tout $|x| < R$, donner une autre expression de f.

Correction

Soit $x \in]-1, 1[$. On peut écrire que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(tx)^n}{2+t^2}\,dt.$$

On cherche alors à intervertir somme et intégrale. Comme

$$\int_0^1 \left|\frac{(tx)^n}{2+t^2}\right| dt \leqslant \frac{|x|^n}{2(n+1)},$$

d'où $\sum \int_0^1 \left|\frac{(tx)^n}{2+t^2}\right| dt$ converge. Donc, par le théorème d'intégration terme à terme, on peut écrire que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tx)^n}{2+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2+t^2}\frac{1}{1-tx} dt. \end{aligned}$$

On cherche alors à écrire

$$\frac{1}{2+t^2}\frac{1}{1-tx} = \frac{at+b}{2+t^2} + \frac{c}{1-tx}.$$

En multipliant par $1-tx$ et en évaluant en $\frac{1}{x}$, on trouve

$$c = \frac{x^2}{1+2x^2}$$

En évaluant en 0, on trouve

$$\frac{1}{2} = \frac{b}{2} + c,$$

donc

$$b = 1-2c = 1 - \frac{2x^2}{1+2x^2} = \frac{1}{1+2x^2}.$$

Finalement, on trouve $a = \frac{x}{1+2x^2}$, en multipliant par t et en faisant tendre vers $+\infty$. D'où

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+2x^2}\int_0^1 \frac{xt+1}{2+t^2} + \frac{x^2}{1-tx} dt \\ &= \frac{x}{1+2x^2}\left[\frac{1}{2}\ln(2+t^2)\right]_0^1 + \frac{1}{1+2x^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 + \frac{x^2}{1+2x^2}\left[\ln(1-tx)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{1+2x^2}\left(\frac{x}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - x\ln(1-x)\right). \end{aligned}$$

Exercice 116. φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P(1-X)$.

1. L'application φ est-elle injective ? Bijective ?

Correction

On remarque que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$, donc φ est bijective.

2. Donner les éléments propres de φ.

Correction

Comme φ est une involution, c'est une symétrie : ses éléments propres sont 1 et -1.
Soit $P \in \ker(\varphi - \mathrm{Id})$. Alors $P(1-X) = P(X)$. Notons $Q(X) = P\left(X + \frac{1}{2}\right)$. Alors

$$Q(X) = P\left(X + \frac{1}{2}\right) = P\left(1 - \left(X + \frac{1}{2}\right)\right) = P\left(-X + \frac{1}{2}\right) = Q(-X),$$

donc Q est pair. Réciproquement, si P est de cette forme, P est dans $\ker(\varphi - \mathrm{Id})$, donc

$$\begin{aligned}\ker(\varphi - \mathrm{Id}) &= \left\{Q\left(X - \frac{1}{2}\right),\ Q \text{ pair}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}.\end{aligned}$$

De même, on trouve que

$$\begin{aligned}\ker(\varphi + \mathrm{Id}) &= \left\{Q\left(X - \frac{1}{2}\right),\ Q \text{ impair}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}.\end{aligned}$$

7.2 Thomas Faure

Exercice 117. On pose :

$$w = \exp(2i\pi/7) \quad ; \quad S = w + w^2 + w^3 \quad ; \quad T = w^4 + w^5 + w^6$$

Calculer $S+T$, ST, puis S et T.

Correction

On calcule

$$S + T = \sum_{k=1}^{6} \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{7}} = \sum_{k=0}^{6} \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{7}} - 1 = -1,$$

car la somme des racines de l'unité vaut 0.
Ensuite, on remarque que $T = w^3 S$, d'où

$$S(1 + w^3) = -1,$$

d'où

$$\begin{aligned}S &= \frac{-1}{1+w^3} \\ &= -\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{6i\pi}{7}}} \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{7}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{3i\pi}{7}} + \mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{7}}\right)} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{3i\pi}{7}}}{2\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)}.\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} T &= w^3 S \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{\frac{6i\pi}{7}}\mathrm{e}^{-\frac{3i\pi}{7}}}{2\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{7}}}{2\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)}. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$ST = \frac{1}{4\cos^2\left(\frac{3\pi}{7}\right)}.$$

Exercice 118. On dispose d'une urne de $2n$ boules avec n boules numérotées de 1 à n et n boules numérotées 0. On prélève une poignée de n boules. Soit k un entier dans $[\![1, n]\!]$.
On pose :

$$U_k = \begin{cases} 1 & \text{si la boule } k \text{ est piochée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de U_k, son espérance.

Correction

La variable U_k est une variable de Bernoulli. Raisonnons par dénombrement pour trouver $\mathbb{P}(U_k = 1)$.

- il y a $\binom{2n}{n}$ poignées au total,
- choisir une poignée contenant k, c'est choisir la boule k (1 choix) puis les $n-1$ boules restantes, c'est-à-dire $\binom{2n-1}{n-1}$ choix.

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_n = 1) &= \frac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} \\ &= \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}\frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Son espérance est aussi de $\frac{1}{2}$.

2. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(U_i, U_j)$ pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

Correction

Si $i = j$, $\mathrm{Cov}(U_i, U_j) = \frac{1}{4}$.
Si $i \neq j$, on calcule $\mathbb{E}(U_iU_i) - \mathbb{E}(U_i)\mathbb{E}(U_j)$. Or, $\mathbb{E}(U_iU_j) = \mathbb{P}(U_i = U_j = 1)$. Or, choisir une poignée contenant les boules i et j, c'est choisir les $n-2$ boules restantes, i.e. $\binom{2n-2}{n-2}$

choix. D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U_iU_j) &= \frac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} \\ &= \frac{(2n-1)!}{(n-2)!n!}\frac{n!n!}{(2n)!} \\ &= \frac{n(n-1)}{(2n)(2n-1)} \\ &= \frac{n-1}{2(2n-1)}.\end{aligned}$$

3. On pose $N = U_1 + \cdots + U_n$. Que signifie N et donner son espérance.

Correction

N correspond au nombre de numéros distincts piochés. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(U_i) = \frac{n}{2}.$$

4. Déterminer la variance de N.

Correction

Là, on utilise la formule

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(U_1 + \cdots + U_n) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(U_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(U_i, U_j) \\ &= \frac{n}{4} + 2\frac{n(n-1)}{2}\frac{(n-1)}{2n-1}.\end{aligned}$$

8 Navale

8.1 Aurélien Simone

Exercice 119. Pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt \text{ et } u(P) = \int_0^1 (X+t)^n P(t)\,dt.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique.

Correction

On vérifie que pour tout i et j, $\left\langle u(X^i), X^j\right\rangle = \left\langle X^i, u(X^j)\right\rangle$. On conclura par linéarité de

u. Or,

$$\begin{aligned} u(X^i) &= \int_0^1 (X+t)^n t^i dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} t^k X^{n-k} t^i dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} X^{n-k} \frac{1}{k+i+1}. \end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned} \left\langle u(X^i), X^j \right\rangle &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} t^{n-k} \frac{1}{k+i} t^j dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+i+1} \frac{1}{n+1-k+j} \\ &=_{\ell=n-k} \frac{1}{n-\ell+i+1} \frac{1}{\ell+j+1}, \end{aligned}$$

et, par symétrie, on retrouve $\left\langle X^i, u(X^j) \right\rangle$.

2. Justifier l'existence d'une base orthonormée $P_0, P_1, \dots, P_n$ constituée de vecteurs propres de u.

Correction

L'endomorphisme u est symétrique dans un espace euclidien, donc il est diagonalisable en base orthonormée.

3. Soient $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de u. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x) P_k(y).$$

Correction

Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors

$$(X+y)^n = \sum_{i=1}^{n} \langle (X+y)^n, P_i \rangle P_i.$$

Mais

$$\langle (X+y)^n, P_i \rangle = \int_0^1 (t+y)^n P_i(t) dt = u(P_i)(y) = \lambda_i P_i(y).$$

Donc

$$(X+y)^n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i(y) P_i.$$

D'où le résultat en évaluant en évaluant en x.

9 ENS Paris-Saclay

9.1 Liv Craen

Exercice 120. Soit E l'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{N}$. On définit $F : E \to E$ par :
Pour $u \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F(u)_n = u_{n+1}$$

1. Montrer que F est linéaire.

Correction

C"est évident.

2. Est-elle injective ? Surjective ?

Correction

On remarque que la suite vérifiant $u_0 = 42$ et $u_i = 0$ pour tout $i \geqslant 1$ est dans le noyau de F donc D n'est pas injective.
En revanche, F est surjective : si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, la suite définie par $u_0 = 42$ et, pour $n \geqslant 1$, $u_n = v_{n-1}$ est bien un antécédent de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Construire G endomorphisme linéaire de E tel que $F \circ G = \mathrm{Id}_E$.

Correction

On pose

$$G(v)_n = \begin{cases} 42 \text{ si } n = 0 \\ v_{n-1} \text{ si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

On remarque qu'alors $F \circ G = \mathrm{Id}_E$.

4. Que vaut $G \circ F$?

Correction

Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $G \circ F$ est la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 42$ et pour $n \geqslant 1$, $v_n = u_n$.

5. Conclure.

Correction

On n'est pas en dimension finie, c'est normal d'être inversible à droite mais pas à gauche !
De plus, on peut remarquer que $G \circ F$ est un projecteur (je ne sais pas si c'était attendu).

On note désormais E l'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{Z}$. On définit $H : E \to E$ par :
Pour $u \in E$, et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$H(u)_n = u_{n+1} + u_{n-1}$$

6. Montrer que H est linéaire. Est-elle injective ?

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

La linéarité est claire. Pour l'injectivité, on remarque que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_{2n} = (-1)^n \text{ et } u_{2n+1} = (-1)^n$$

est dans le noyau de H. Donc H n'est pas injective.

7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $u \in \ker(H - \mathrm{Id}_E)$. Trouver $M_\lambda \in M_2(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = M_\lambda^k \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Correction

Si $u \in \ker(H - \mathrm{Id}_E)$, alors pour tout n,

$$u_{n+1} + u_{n-1} = \lambda u_n,$$

donc $u_{n+1} = \lambda u_n - u_{n-1}$, donc

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice convient.

8. Pour $|\lambda| \neq 2$, montrer que M_λ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres.

Correction

On calcule

$$\chi_M(x) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & x - \lambda \end{vmatrix} = x(x-\lambda) + 1 = x^2 - \lambda x + 1,$$

qui possède, pour $\lambda \neq 1$, deux valeurs propres complexes distinctes :

- si $|\lambda| > 2$,
$$\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$
- si $|\lambda| < 2$,
$$\frac{\lambda \pm i\sqrt{4 - \lambda^2}}{2}$$

9. Existe-t-il des suites de $\ker(H - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ périodiques ? Les caractériser.

Correction

Une suite de $\ker(H - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ est périodique lorsque les suites des puissances des valeurs propres sont périodiques, ce qui est possible :

- si $|\lambda| > 2$ et $\dfrac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-4}}{2} = \pm 1$. Or,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2-4}}{2} = 1 &\Leftrightarrow \pm\sqrt{\lambda^2-4} = 2-\lambda \\ &\Rightarrow \lambda^2 - 4 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 \\ &\Rightarrow \lambda = 2.\end{aligned}$$

  Ce cas est à exclure.
- si $|\lambda| < 2$, on calcule le module et un argument de

$$\frac{\lambda + i\sqrt{4-\lambda^2}}{2}$$

  Son module vaut

$$\frac{\lambda^2 + 4 - \lambda^2}{4} = 1,$$

  On note $\theta = \text{Arccos}\dfrac{\lambda}{2}$. Alors

$$\frac{\lambda + i\sqrt{4-\lambda^2}}{2} = e^{i\theta}$$

Ainsi, les suites de $\ker(H - \lambda \mathrm{Id}_E)$ sont périodiques si et seulement si la suite $(e^{i\theta n})_{n\in\mathbb{Z}}$ l'est, i.e. si et seulement s'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\theta = \dfrac{p}{q}\pi$.
Si on revient au cas particulier de l'énoncé, $\lambda = 1$. Les racines sont donc

$$\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{\pi}{6}},$$

donc toutes les suites de $\ker(H - \mathrm{Id}_E)$ sont périodiques.

10. Étudier le cas $|\lambda| = 2$.

Correction

Pour $|\lambda| = 2$, on disjoint les cas :
- si $\lambda = 2$, alors les suites de $\ker(H - \mathrm{Id}_E)$ vérifient

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0,$$

  donc sont de la forme

$$u_n = \alpha + \beta n,$$

  où α et β sont réels. Les seuls suites périodiques sont alors constantes.
- si $\lambda = -2$, alors les suites de $\ker(H - \mathrm{Id}_E)$ vérifient

$$u_{n+1} + 2u_n + u_{n-1} = 0,$$

  donc sont de la forme

$$u_n = (\alpha + \beta n)(-1)^n,$$

  où α et β sont réels. Les seuls suites périodiques sont alors constantes.

Exercices classés par catégorie Les (T) signifient que l'exercice est transverse, donc qu'il mélange plusieurs thématiques bien distinctes.

Catégorie	**Exercices**
Complexes et polynômes	42, 117
Algèbre linéaire de sup	8, 55, 11, 17, 40, 57, 79, 83, 95, 107
Réduction	1 (T), 15, 22 (T), 25, 33, 36, 48, 65, 66, 68, 72, 74, 76, 80, 84, 97, 100 (T), 103, 105, 110, 116, 91, 120 (T), 114 (T)
Algèbre bilinéaire de sup	21, 59, 61, 99
Endomorphismes des espaces euclidiens	5, 13, 19, 26, 37, 50, 62, 87, 93, 109, 119
Analyse de sup	4, 9 (T), 14, 16, 31, 32 (T), 38, 43, 58 (T), 75, 78, 120 (T)
Séries	39, 46, 53, 101
Intégration	3, 67, 71, 92, 102
Suites de fonctions	9 (T), 32 (T), 85, 27
Séries de fonctions	120 (T), 56, 60, 63, 82
Séries Entières	12, 20, 24, 29, 34, 70, 73 (T), 89, 90, 96 (T), 115
Suites d'intégrales	35, 73 (T), 96 (T), 112
Intégrales à paramètres	2, 10, 18, 44, 108, 77, 111
Équations différentielles	1 (T), 7, 106, 114 (T)
Normes	23, 88
Topologie	6, 22 (T)
Calcul diff	28, 58 (T), 120 (T), 113
Exo transverse d'analyse	9, 32, 49, 58, 73, 96
Probabilités finies	69, 98, 100 (T), 118
Probabilités discrètes	27, 30, 45, 47, 51, 52, 54, 64, 81, 86, 94, 104
Exo transverse général	1, 22, 120, 100, 114

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exercices... déjà dans les feuilles de TD !

- l'exercice 2 est l'exercice **14** de la feuille de TD 9.
- l'exercice 8 est l'exercice **9** de la feuille de TD 3.
- l'exercice 10 est l'exercice **12** de la feuille de TD 9.
- l'exercice 11 est l'exercice **8** de la feuille de TD 3.
- l'exercice 12 est l'exercice **10** de la feuille de TD 10.
- l'exercice 15 est l'exercice **25** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 17 est l'exercice **15** de la feuille de TD 3.
- l'exercice 18 est l'exercice **11** de la feuille de TD 9.
- l'exercice 21 est l'exercice **10** de la feuille de TD 4.
- l'exercice 23 est l'exercice **4** de la feuille de TD 5.
- l'exercice 25 est l'exercice **13** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 27 est l'exercice **13** de la feuille de TD 6.
- l'exercice 33 est l'exercice **28** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 35 est l'exercice **5** de la feuille de TD 9.
- l'exercice 36 est l'exercice **29** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 39 est l'exercice **7** de la feuille de TD 2.
- l'exercice 40 est l'exercice **4** de la feuille de TD 3.
- l'exercice 47 est l'exercice **10** de la feuille de TD 12.
- l'exercice 72 est l'exercice **15** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 62 est l'exercice **14** de la feuille de TD 13.
- l'exercice 68 ressemble énormément à l'exercice **6** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 61 ressemble énormément à l'exercice **1** de la feuille de TD 4.
- l'exercice 54 est l'exercice **9** de la feuille de TD 6.
- l'exercice 80 est l'exercice **6** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 66 est l'exercice **4** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 64 est l'exercice **11** de la feuille de TD 6.
- l'exercice 59 est l'exercice **3** de la feuille de TD 4.
- l'exercice 105 est l'exercice **27** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 95 est l'exercice **17** de la feuille de TD 4.
- l'exercice 90 est l'exercice **6** de la feuille de TD 10.
- l'exercice 83 est l'exercice **2** de la feuille de TD 4.
- l'exercice 84 est l'exercice **1** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 85 est l'exercice **2** de la feuille de TD 7.
- l'exercice 97 est l'exercice **17** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 107 est l'exercice **16** de la feuille de TD 3.
- l'exercice 108 est l'exercice **8** de la feuille de TD 9.
- l'exercice 88 ressemble énormément à l'exercice **4** de la feuille de TD 6.
- l'exercice 110 ressemble énormément à l'exercice **27** de la feuille de TD 8.
- l'exercice 113 est l'exercice **18** de la feuille de TD 15.