16009

Exercice 2. *Centrale PSI 19*. (RMS 1036) Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$. Soit $H : x \mapsto \sin(x) \displaystyle\int_0^x f(t)\cos(t)dt - \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt$. On note enfin $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $y'' + y = f$.

1. Montrer que H est définie sur $\mathbb{R}$ et tracer son graphe sur $[0, 10]$.
2. Soit a un réel. Montrer qu'il existe une unique solution g_a de $(\mathcal{E})$ telle que $g_a(0) = a$ et $g_a'(0) = 0$. Tracer les graphes de g_a et $g_a - H$ sur $[0, 10]$ pour $a = 1, 2$ et 5.
3. Soit a un réel. Montrer qu'il existe une unique solution h_a de $(\mathcal{E})$ telle que $h_a(0) = 0$ et $h_a'(0) = a$. Tracer les graphes de h_a et $h_a - H$ sur $[0, 10]$ pour $a = 1, 2$ et 5.
4. Émettre une conjecture sur H et la prouver.
5. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}dt$. Montrer que F est solution de $(\mathcal{E})$.
6. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.
7. Que peut-on dire de $H - F$? Et de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$?

12050

Exercice 3. *Centrale PSI 19*. Pour $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M_u est combinaison linéaire de trois matrices indépendantes de u et dont l'une est le carré d'une l'autre.
2. Écrire un programme qui renvoie M_u. Calculer $M_{7,-14,1} \times M_{1,2,3}$ et $M_{1,2,3} \times M_{7,-14,1}$.
3. Soit $M = \{M_u, \quad u \in \mathbb{R}^3\}$. Quelle est la structure de M ? Cet ensemble est-il stable par $\times$? La loi $\times$ est-elle commutative dans M ?
4. Montrer que M_u est semblable à $\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a - \frac{1}{2}(b+c) & -\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) & a - \frac{1}{2}(b+c) \end{pmatrix}$.
5. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M_u soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
6. Soit $S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$, $T = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad a + b + c = 1\}$ et $T' = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad a + b + c = -1\}$. Montrer que M_u est une matrice orthogonale si et seulement si $u \in S \cap (T \cup T')$.