 nlaillet.math@gmail.com

Oraux blancs

02011

Exercice 1. *Centrale PSI 19*. Soit $P_n = X(1-X)(1-\frac{X}{2})\dots(1-\frac{X}{n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie Info

1. Écrire la fonction **Python** `P(n, x)` qui retourne $P_n(x)$.
2. Tracer $P_n(x)$ pour $n \in [\![0, 10]\!]$ et $x \in [0, 1]$. Commenter.
3. Écrire la fonction `Max(n)` qui retourne l'abscisse x_n du point réalisant le maximum global de P_n sur $[0, 1]$.
4. Calculer $x_n \ln n$ pour $n = 10^k$ avec $k \in [\![1, 5]\!]$. Commenter.

Partie Maths

5. Montrer que P_n admet un maximum global sur $[0, 1]$ atteint en un point unique appartenant à $]0, 1[$.
6. En considérant la fonction $x \mapsto \ln P_n(x)$, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{1-x_n}$
7. En déduire un équivalent de x_n.
8. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que : $\forall u \in [0, \frac{1}{2}],\ |\ln(1-u) + u| \leqslant Cu^2$
9. En déduire un équivalent de $P_n(x_n)$.

08014

Exercice 4. *Centrale PSI 19*. (RMS 130 1039) On effectue des tirages dans une urne contenant initialement deux boules rouges et une boule noire. À chaque étape, on tire au hasard une boule dans l'urne, puis on la replace dans l'urne et on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur.
On note X_k la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée au k-ième tirage est rouge et 0 sinon.
On note S_n le nombre de boules rouges tirées après n tirages. On convient de poser $S_0 = 0$.

1. Écrire une fonction simulant n tirages et revoyant la liste `[S0,...,Sn]`.
2. Écrire une fonction renvoyant $\mathbb{E}(S_n)$ pour n allant de 0 à 20. Tracer la ligne brisée représentant $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que $S_n = k$.
4. Déterminer une relation entre $\mathbb{E}(S_{n+1})$ et $\mathbb{E}(S_n)$.
5. En déduire $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n.
6. Déterminer la loi de X_k.

14020

Exercice 5. *Centrale PSI 23*. On pose $J_n(x) = \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$.

1. Déterminer le domaine de définition D de J_n.
2. Calculer $J_n(x)$ pour tout $x \in D$.
3. On pose $u_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0,n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   (a) Déterminer $u(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t)$.
   (b) Tracer sous Python $u_n(t)$ pour $n \in \{2, 5, 10\}$ et $u(t)$ (on choisira une valeur de x).
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n u_n(t)\mathrm{d}t = \Gamma(x)$.
4. (a) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   (b) Démontrer que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.
   (c) Montrer que $\Gamma(n) = (n-1)\,!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Tracer la fonction Γ sous Python.
5. (a) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln(t))^k e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente pour $x \in D$ et $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur D et donner ses dérivées k-ièmes.
6. Montrer qu'il existe $c \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.
7. Tracer alors le tableau de variations de Γ.
8. Écrire en Python un script permettant de tracer les dérivées k-ièmes de Γ. Conjecturer les limites en 0 et en $+\infty$.
9. Donner les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction Γ et de $\Gamma^{(k)}$.

12049

Exercice 15. *Centrale PSI 24*. Notons u l'application linéaire qui à $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ associe B définie par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad B_i = \sum_{k=1}^{n} A_k - A_i = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} A_k,$$

où A_k est la k ème colonne de la matrice A.

1. Écrire une fonction en Python qui renvoie l'image d'une matrice par u.
2. À l'aide du script, évaluer u pour certaines matrices dans le cas où $n = 2$ et $n = 3$.
3. L'endomorphisme u est-il un automorphisme ?
4. Déterminer la nature géométrique de u ainsi que ses éléments caractéristiques pour $n = 2$.
5. Exprimer $\det(u(A))$ en fonction de $\det(A)$.
6. Déterminer un polynôme annulateur de u de degré 2 .
7. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
8. Soit J la matrice dont les coefficients valent tous 1 . On pose $U = J - I_n$. Exprimer les colonnes de AU. Qu'en concluez-vous ?