Oraux blancs

02011

Exercice 1. Soit $P_n = X(1-X)(1-\frac{X}{2})\dots(1-\frac{X}{n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie Info

1. Écrire la fonction **Python** `P(n, x)` qui retourne $P_n(x)$.
2. Tracer $P_n(x)$ pour $n \in [\![0, 10]\!]$ et $x \in [0, 1]$. Commenter.
3. Écrire la fonction `Max(n)` qui retourne l'abscisse x_n du point réalisant le maximum global de P_n sur $[0, 1]$.
4. Calculer $x_n \ln n$ pour $n = 10^k$ avec $k \in [\![1, 5]\!]$. Commenter.

Partie Maths

5. Montrer que P_n admet un maximum global sur $[0, 1]$ atteint en un point unique appartenant à $]0, 1[$.
6. En considérant la fonction $x \mapsto \ln P_n(x)$, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{1-x_n}$
7. En déduire un équivalent de x_n.
8. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que : $\forall u \in [0, \frac{1}{2}],\ |\ln(1-u) + u| \leqslant Cu^2$
9. En déduire un équivalent de $P_n(x_n)$.

Correction

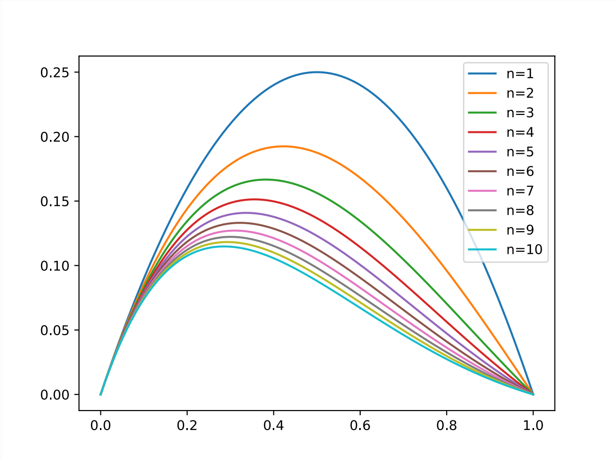
Soit $P_n = X(1-X)(1-\frac{X}{2})\dots(1-\frac{X}{n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie Info

1. On propose

```python
import numpy as np
import scipy.optimize as resol

def P(n,x):
    res = x
    for k in range(1,n+1):
        res *= (1-x/k)
    return res


X = np.linspace(0,1,100)
for i in range(1,11):
    Y = [P(i,x) for x in X]
    s = "n="+str(i)
    plt.plot(X,Y,label=s)
plt.legend()
plt.show()
```

On obtient



P_n a un unique maximum, et les abscisses du maximum, ainsi que sa valeur, semblent tendre vers 0.

2.

3. On ne peut calculer qu'une valeur approchée !

```python
def x(n):
    X = np.linspace(0,1,101)
    im = 0
    m = P(n,im/100)
    for k in range(len(X)):
        if P(n,k/100)>P(n,im/100):
            im = k
    return im/100
```

4. On a l'impression de quelque chose qui converge !

```python
K = [10**k for k in range(1,6)]
L = [x(n)*np.log(n) for n in K]
```

et on a

```python
>>> L
[0.6677496769682733, 0.8289306334778564, 0.8980081862676779,
 0.9210340371976184, 0.9210340371976183]
```

Partie Maths

5. La fonction P_n est continue sur le **segment** $[0,1]$ donc elle y est bornée et atteint ses bornes, en particulier son maximum. S'annulant en 0 et en 1, le maximum est atteint sur $]0,1[$. Pour l'unicité, sortons du cadre !
La fonction P_n admet n racines, en $0, 1, \ldots, n$. Donc, par n applications successives du théorème de Rolle, P_n' admet $n-1$ racines, dans chaque intervalle $]i, i+1[$ ($i \in [\![0, n-1]\!]$). En particulier, P_n' n'admet qu'une racine sur $]0,1[$, donc P_n n'admet qu'un point critique. Comme le maximum de P_n est atteint à l'intérieur de $]0,1[$, il est donc unique !

6. On remarque que pour x sur $]0,1[$, $P_n(x) < 1$, donc un maximum de P_n est un maximum de $\ln \circ P_n$ (par croissance de ln), et $\ln \circ P_n$ est strictement négatif. Or,

$$\ln(P_n(x)) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{x}{k}\right) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k-x) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k).$$

 nlaillet.math@gmail.com

En x_n, la fonction ci-dessus est maximale, donc (point intérieur) la dérivée est nulle, i.e.

$$\frac{1}{x_n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - x_n} = 0,$$

donc

$$\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - x_n}$$

Comme $x_n \in]0, 1[$, $0 < k - x_n < k$, donc $\frac{1}{k - x_n} > \frac{1}{k}$, d'où l'inégalité de gauche.

De plus, $x_n < 1$ donc $k - x_n > k - 1$ donc (sauf pour $k = 1$, $\frac{1}{k - x_n} < \frac{1}{k - 1}$). Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - x_n} < \frac{1}{1 - x_n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k - 1} \leqslant \frac{1}{1 - x_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

7. Par la minoration par la série harmonique, $\frac{1}{x_n}$ tend vers $+\infty$, donc $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, comme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n),$$

on en déduit que $\frac{1}{1 - x_n} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$, donc $\frac{1}{x_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$, i.e. $\boxed{x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}}$.

(remarque : on retrouve l'équivalent de la série harmonique en remarquant, par une comparaison série-intégrale, que

$$\ln(k + 1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k - 1),$$

et en sommant.

8. La fonction $u \mapsto \ln(1 - u)$ est $\mathscr{C}^2$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, donc sa dérivée seconde, continue sur le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, y est bornée (en valeur absolue) par un certain $C > 0$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 permet de conclure que $\forall u \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $|\ln(1 - u) + u| \leqslant C u^2$

9. L'idée est d'utiliser

$$\ln(P_n(x_n)) = \ln(x_n) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{x_n}{k}\right).$$

Par la question précédente,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{x_n}{k}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x_n}{k}\right| \leqslant C \sum_{k=1}^{n} \frac{x_n^2}{k^2} = o(x_n),$$

car la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge. D'où

$$\ln(P_n(x_n)) = \ln(x_n) - x_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + o(x_n).$$

Or, comme $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$, et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$,

$$P_n(x_n) = \mathrm{e}^{\ln(x_n) - 1 + o(1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} x_n \times \mathrm{e} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e} \ln(n)}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Python corrobore bien le résultat !

 N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

08014

Exercice 4. (RMS 130 1039) On effectue des tirages dans une urne contenant initialement deux boules rouges et une boule noire. À chaque étape, on tire au hasard une boule dans l'urne, puis on la replace dans l'urne et on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur.
On note X_k la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée au k-ième tirage est rouge et 0 sinon.
On note S_n le nombre de boules rouges tirées après n tirages. On convient de poser $S_0 = 0$.

1. Écrire une fonction simulant n tirages et revoyant la liste `[S0,...,Sn]`.
2. Écrire une fonction renvoyant $\mathbb{E}(S_n)$ pour n allant de 0 à 20. Tracer la ligne brisée représentant $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que $S_n = k$.
4. Déterminer une relation entre $\mathbb{E}(S_{n+1})$ et $\mathbb{E}(S_n)$.
5. En déduire $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n.
6. Déterminer la loi de X_k.

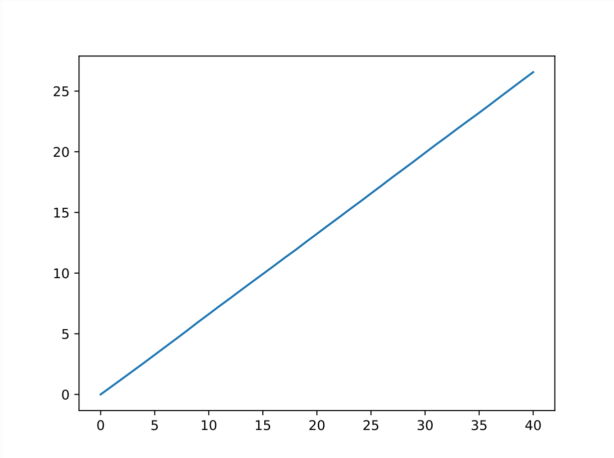
Correction

(RMS 130 1039)

1.
2. On propose

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd

def simu(n):
    L = [0,1,1] #0 = noire, 1 = rouge
    res = [0]
    for i in range(n):
        k = len(L)
        x = rd.randint(k)
        Sn = res[-1]+(L[x]==1)
        res.append(Sn)
        L.append(L[x])
    return res

def esp(n,M):
    L = np.zeros(n+1)
    for _ in range(M):
        L+=np.array(simu(n))
    return L/M

X = range(21)
Y = esp(20,1000)
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

On trouve quelque chose d'assez remarquable pour des simulations en probas : l'espérance a clairement l'air linéaire !



3. Si $S_n = k$, on a pioché k boules rouges et $n-k$ boules noires. Ainsi, l'urne contient $n+3$ boules, dont $k+2$ boules rouges et $n-k+1$ noires. Donc

$$\mathbb{P}_{S_n=k}(X_{n+1}=1) = \frac{k+2}{n+3} \text{ et } \mathbb{P}_{S_n=k}(X_{n+1}=1) = \frac{n-k+1}{n+3}.$$

4. On calcule

$$\mathbb{E}(S_{n+1}) = \mathbb{E}(S_n + X_{n+1}) = \mathbb{E}(S_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}).$$

Mais

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{P}(X_{n+1}=1) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_{S_n=k}(X_{n+1}=1)\mathbb{P}(S_n=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{n+3}\mathbb{P}(S_n=k) \\ &= \frac{1}{n+3}\left(\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(S_n=k) + 2\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n=k)\right) \\ &= \frac{1}{n+3}\mathbb{E}(S_n) + \frac{2}{n+3}\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}(S_{n+1}) = \frac{n+4}{n+3}\mathbb{E}(S_n) + \frac{2}{n+3}.$$

En faisant une simulation python, on remarque que les courbes coïncident vraiment très bien !

5. On aurait envie de dire que $\mathbb{E}(S_n)$ est linéaire en fonction de n (étant donnée la simulation). Essayons $\mathbb{E}(S_n) = \alpha n$! Alors $\mathbb{E}(S_{n+1}) = \dfrac{\alpha n(n+4)+2}{n+3}$. On veut $\mathbb{E}(S_{n+1}) = \alpha(n+1)$, donc nécessairement

$$\alpha(n+1)(n+3) = \alpha n(n+4) + 2,$$

i.e. $\alpha n^2 + 4\alpha n + 3\alpha = \alpha n^2 + 4n\alpha + 2$, donc $\alpha = \dfrac{2}{3}$.

On montre alors immédiatement par récurrence que $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{2}{3}n$.

6. On en déduit que X_n est une variable de Bernoulli de paramètre

$$\mathbb{P}(X_n=1) = \frac{1}{n+3}\mathbb{E}(S_n) + \frac{2}{n+3} = \frac{2n}{3(n+3)} + \frac{2}{n+3} = \frac{2n+6}{3(n+3)} = \frac{2}{3}.$$

14020

Exercice 5. On pose $J_n(x) = \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$.

1. Déterminer le domaine de définition D de J_n.
2. Calculer $J_n(x)$ pour tout $x \in D$.
3. On pose $u_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0,n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   (a) Déterminer $u(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t)$.
   (b) Tracer sous Python $u_n(t)$ pour $n \in \{2, 5, 10\}$ et $u(t)$ (on choisira une valeur de x).
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n u_n(t)\mathrm{d}t = \Gamma(x)$.
4. (a) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   (b) Démontrer que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.
   (c) Montrer que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Tracer la fonction Γ sous Python.
5. (a) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln(t))^k \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$ est convergente pour $x \in D$ et $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur D et donner ses dérivées k-ièmes.
6. Montrer qu'il existe $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.
7. Tracer alors le tableau de variations de Γ.
8. Écrire en Python un script permettant de tracer les dérivées k-ièmes de Γ. Conjecturer les limites en 0 et en $+\infty$.
9. Donner les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction Γ et de $\Gamma^{(k)}$.

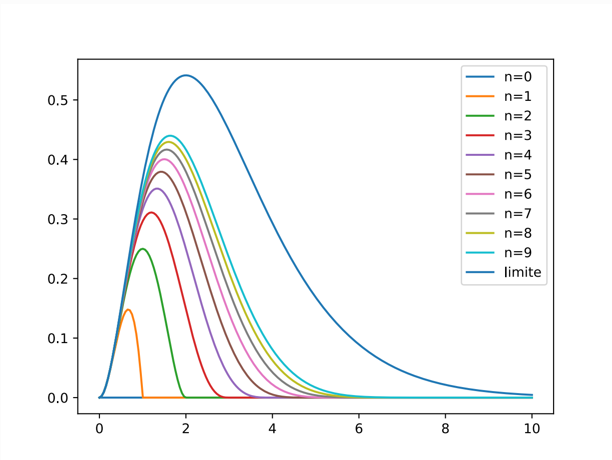
Correction

(exercice ultra-long et ultra-classique sur la fonction gamma) On pose $J_n(x) = \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$.

1. Par critère de convergence des intégrales de Riemann, $J_n(x)$ est convergente en 0 si, et seulement si $x > 0$.
2. Soit $x \in D$. Alors en faisant une intégration par parties (en dérivant $(1-u)^n$ et en intégrant u^{x-1}, et comme les valeurs aux bornes sont nulles (en intégrant u^{x-1} on a du u^x, nul en 0), on obtient
$$J_n(x) = \frac{n}{x}J_{n-1}(x+1) = \frac{n(n-1)}{x(x+1)}J_{n-2}(x+2) = \cdots = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}J_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$
3. (a) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Pour n assez grand, $t \in [0,n]$, donc
$$u_n(t) = t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = t^{x-1}\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}.$$
   (b) C'est une question utile en fait : elle sert pour la convergence dominée de la suite. On propose

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def un(n,t,x):
    if t<n:
        return t**(x-1)*(1-t/n)**n
    else:
        return 0

def u(t,x):
    return t**(x-1)*np.exp(-t)

x=3

T = np.linspace(0,10,200)

for n in range(10):
    Un = [un(n,t,x) for t in T]
    s = 'n='+str(n)
    plt.plot(T,Un,label=s)

U = [u(t,x) for t in T]
plt.plot(T,U,label='limite')
plt.legend()
plt.show()
```

et on obtient



On voit que $u_n(t) \leqslant u(t)$.

(c) Il s'agit d'appliquer proprement un théorème de convergence dominée. Soit $x > 0$. Alors

- pour tout n, $t \mapsto u_n(t)$ est continue par morceaux,
- pour tout t dans $\mathbb{R}_+^*$, $u_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$,
- pour tout t dans $\mathbb{R}_+^*$, grâce à l'inégalité $ln(1+h) \leqslant h$,

$$u_n(t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leqslant t^{x-1}\mathrm{e}^{-n\frac{t}{n}} = u(t),$$

intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et indépendante de n.

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, $\int_0^n u_n(t)dt = \int_0^{+\infty} u_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \Gamma(x)$.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On fait, dans $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, une IPP en intégrant t^{x-1} et en dérivant e^{-t}. On obtient le résultat.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors par le changement de variables $s = \frac{t}{n}$, on obtient

$$\int_0^n u_n(t)dt = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^1 (ns)^{x-1}(1-s)^n nds = n^x J_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

D'où le résultat !

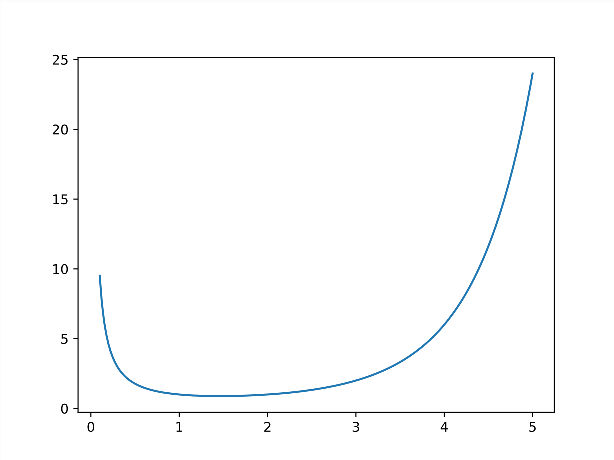
(c) On peut utiliser l'une des deux questions précédentes. Par récurrence immédiate,

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \dots = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!$$

(d) On propose

```python
def gamma(x):
    def f(t):
        return t**(x-1)*np.exp(-t)
    return integr.quad(f,0,np.inf)[0]

X = np.linspace(0.1,5,200)
plt.plot(X,[gamma(x) for x in X])
plt.show()
```

On obtient



5. (a) Soit $x \in D$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $a > 0$, $\ln(t)^k \underset{x \to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^a}\right)$. Ainsi, si on prend $a = \frac{x}{2}$, on a

$$t^{x-1}\ln(t)^k \mathrm{e}^{-t} = t^a \mathrm{e}^{-t} t^{a-1} \mathrm{e}^{-t} \underset{t \to 0}{=} o(t^{a-1}),$$

intégrable en 0. De même, on écrit que

$$t^{x-1}\ln(t)^k \mathrm{e}^{-t} = \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} t^{x-1}\ln(t)^k\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right),$$

intégrable en $+\infty$. D'où le résultat !

(b) Il s'agit d'un théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$ des intégrales à paramètres. On dit que

- pour tout x, $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue et intégrable,
- pour tout t, $x \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est $\mathscr{C}^\infty$, de dérivée k-ième $t \mapsto \ln(t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$, fonction aussi continue et intégrable,
- (problème de la domination qui doit être locale) **soit** $a > 0$. Alors, si $x \in [a, +\infty[$,

$$|\ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}| \leqslant |\ln(t)^k t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}|,$$

fonction continue, intégrable, indépendante de x.

Donc, par le théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$ des intégrales à paramètres, Γ est dérivable sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. On remarque que $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$. Comme Γ est continue sur $[1, 2]$, dérivable sur $]1, 2[$, par le théorème de Rolle, il existe $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.

7. Soit $x < c$. Alors

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt = \int_0^1 \ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt + \int_1^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Or, pour $t \in]0,1[$, $\ln(t) < 0$ et $t^{x-1} > t^{c-1}$ donc

$$\int_0^1 \ln(t) t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt < \int_0^1 \ln(t) t^{c-1} \mathrm{e}^{-t} dt.$$

De même, pour $t \geqslant 1$, $\ln(t) \geqslant 0$ et $t^{x-1} \leqslant t^{c-1}$ donc

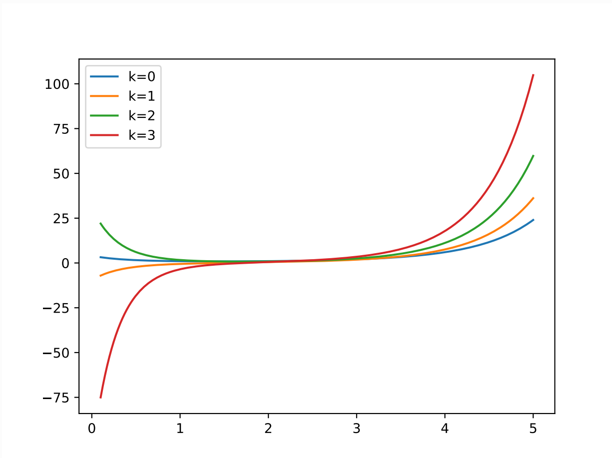
$$\int_1^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt \leqslant \int_1^{+\infty} \ln(t) t^{c-1} \mathrm{e}^{-t} dt,$$

donc $\Gamma(x) \leqslant \Gamma(c) \leqslant 0$, donc Γ décroît sur $]0, c]$. De même, Γ croît sur $[c, +\infty[$.

8. On propose

```python
def gamma(k,x):
    def f(t):
        return np.log(t)**k*t**(x-1)*np.exp(-t)
    return integr.quad(f,0.01,np.inf)[0]

X = np.linspace(0.1,5,200)
for k in range(4):
    s = 'k='+str(k)
    plt.plot(X,[gamma(k,x) for x in X],label = s)
plt.legend()
plt.show()
```

On obtient



9. On a l'impression que $\Gamma^{(k)}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que $\Gamma^{(k)}(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \mathrm{sgn}(k) \times \infty$. Montrons-le : déjà, on note

$$f(x) = \int_0^1 \ln(t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt \text{ et } g(x) = \int_1^{+\infty} \ln(t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt$$

- limite en $+\infty$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors
  - $t \mapsto \ln(t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}$ est continue.
  - pour tout $t < 1$, $\ln(t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
  - pour $x \geqslant 1$, $|\ln(t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}| \leqslant |\ln(t)|^k \mathrm{e}^{-t}$, intégrable en 0.

  Par théorème de la double limite, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On montre de même que $g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc que $\Gamma(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

- limite en 0. Là, le problème est qu'on ne peut pas faire de domination uniforme, donc le théorème de la double limite ne s'applique pas. Cependant, pour tout $t \geqslant 1$, pour tout $x \leqslant 1$, $0 \leqslant \ln(t)t^{x-1}e^{-t} \leqslant \ln(t)e^{-t}$ donc g est bornée au voisinage de 0. On se focalise donc sur f. On remarque simplement que :
  — si k est pair, pour tout $t \leqslant \frac{1}{e}$, $0 \leqslant t^{x-1}\frac{1}{e} \leqslant \ln(t)^k t^{x-1}e^{-t}$, donc $g(x) \geqslant \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{e}dt = \frac{1}{xe} \underset{x\to 0\to +}{\longrightarrow} \infty$.
  — si k est impair, on fait de même, mais en faisant attention au sens des inégalités !

12049

Exercice 15. Notons u l'application linéaire qui à $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ associe B définie par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad B_i = \sum_{k=1}^{n} A_k - A_i = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} A_k,$$

où A_k est la k ème colonne de la matrice A.

1. Écrire une fonction en Python qui renvoie l'image d'une matrice par u.

Correction

On propose

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

def u(A):
    n,p = np.shape(A)
    res = np.zeros((n,p))
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            coef = 0
            for k in range(p):
                if k!=j:
                    coef += A[i,k]
            res[i,j] = coef
    return res
```

2. À l'aide du script, évaluer u pour certaines matrices dans le cas où $n = 2$ et $n = 3$.

3. L'endomorphisme u est-il un automorphisme ?

Correction

u est un endomorphisme en dimension finie. Pour savoir s'il s'agit d'un automorphisme, il suffit de vérifier si $\ker(u) = 0$. Soit $C \in \ker(u)$. Alors

$$\begin{cases} C_2 + C_3 \cdots + C_n = 0 \\ C_1 + C_3 + \cdots + C_n = 0 \\ \vdots \\ C_1 + C_2 + \cdots + C_{n-1} = 0 \end{cases}$$

En sommant toutes les lignes, on a $(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} C_i\right) = 0$, donc $\sum_{i=1}^{n} C_i = 0$. Donc, en combinant avec la i-ème ligne, $C_i = 0$. D'où $C = 0$, donc $\ker(u) = \{0\}$, donc u est injective donc, par le théorème du rang, bijective.

4. Déterminer la nature géométrique de u ainsi que ses éléments caractéristiques pour $n = 2$.

Correction

On remarque qu'en dimension 2, u inverse les colonnes 1 et 2 de la matrice. Ainsi, en notant $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$,
$$u^2 = \mathrm{Id}_E,$$
donc u est une symétrie. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, M_1 et M_2 ses colonnes. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned}
M \in \ker(u - \mathrm{Id}_E) &\Leftrightarrow u(M) = M \\
&\Leftrightarrow M_1 = M_2 \\
&\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \\
&\Leftrightarrow M \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

De même, on a les équivalences

$$\begin{aligned}
M \in \ker(u + \mathrm{Id}_E) &\Leftrightarrow u(M) = -M \\
&\Leftrightarrow M_1 = -M_2 \\
&\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \\
&\Leftrightarrow M \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

5. Exprimer $\det(u(A))$ en fonction de $\det(A)$.

Correction

On note $A_1, \dots, A_n$ les colonnes de A et $B_1, \dots, B_n$ les colonnes de $u(A)$. Alors

$$\begin{aligned}
\det(u(A)) &= \det(B_1, \dots, B_n) \\
&= \det(B_1 + \cdots + B_n, B_2, \dots, B_n) \text{ par opérations sur les colonnes} \\
&= \det((n-1)(A_1 + \cdots + A_n), B_2, \dots, B_n) \\
&= (n-1)\det(A_1 + \cdots + A_n, B_2, \dots, B_n) \text{ par linéarité par rapport à la première variable} \\
&= (n-1)\det(A_1 + \cdots + A_n, -A_2, -A_3, \dots, -A_n) \text{ en faisant, pour tout } i,\ C_i \leftarrow C_i - C_1 \\
&= (-1)^{n-1}(n-1)\det(A_1 + \cdots + A_n, A_2, \dots, A_n) \text{ par multilinéarité} \\
&= (-1)^{n-1}(n-1)\det(A_1, \dots, A_n) \text{ en faisant, pour tout } i,\ C_1 \leftarrow C_1 - C_i \\
&= (-1)^{n-1}(n-1)\det(A).
\end{aligned}$$

6. Déterminer un polynôme annulateur de u de degré 2 .

Correction

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

On prend $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B = u(A)$, $C = u^2(A)$. Alors

$$\begin{aligned}
C_i &= \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} B_k \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} B_k\right) - B_i \\
&= (n-1)\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right) - \sum_{j=1}^{n} A_j + A_i \\
&= (n-2)\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right) + A_i \\
&= (n-2)\left(\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} A_j\right) + (n-1)A_i \\
&= (n-2)B_i + (n-1)A_i,
\end{aligned}$$

donc

$$u^2 - (n-2)u - (n-1)\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)},$$

donc $X^2 - (n-2)X - (n-1)$ annule u. Remarque : pour $n = 2$, on retrouve bien $u^2 = \mathrm{Id}_E$.

7. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Correction

On remarque que

$$X^2 - (n-2)X - (n-1) = (X+1)(X-(n-1)),$$

donc u est annulé par un polynôme scindé à racines simples, donc u est diagonalisable.

8. Soit J la matrice dont les coefficients valent tous 1 . On pose $U = J - I_n$. Exprimer les colonnes de AU. Qu'en concluez-vous ?

Correction

On remarque aisément que $u(A) = AU$. Tous les résultats précédents se retrouvent avec cette considération (automorphisme, polynôme annulateur, réduction).