16009

Exercice 2. (RMS 1036) Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$. Soit $H : x \mapsto \sin(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\cos(t)dt - \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt$. On note enfin $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $y'' + y = f$.

1. Montrer que H est définie sur $\mathbb{R}$ et tracer son graphe sur $[0, 10]$.
2. Soit a un réel. Montrer qu'il existe une unique solution g_a de $(\mathcal{E})$ telle que $g_a(0) = a$ et $g_a'(0) = 0$. Tracer les graphes de g_a et $g_a - H$ sur $[0, 10]$ pour $a = 1, 2$ et 5.
3. Soit a un réel. Montrer qu'il existe une unique solution h_a de $(\mathcal{E})$ telle que $h_a(0) = 0$ et $h_a'(0) = a$. Tracer les graphes de h_a et $h_a - H$ sur $[0, 10]$ pour $a = 1, 2$ et 5.
4. Émettre une conjecture sur H et la prouver.
5. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}dt$. Montrer que F est solution de $(\mathcal{E})$.
6. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.
7. Que peut-on dire de $H - F$? Et de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$?

Correction

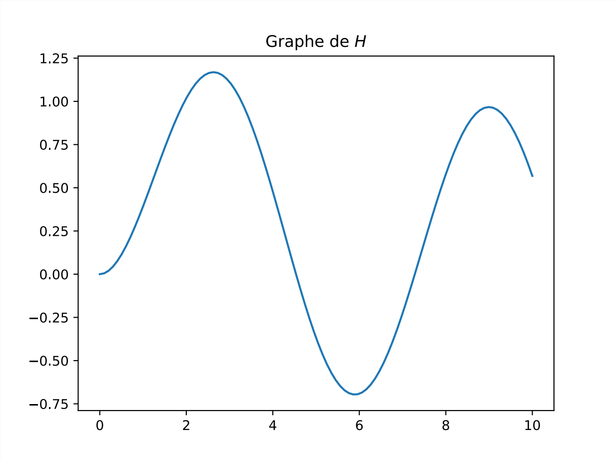
(RMS 1036) Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$. Soit $H : x \mapsto \sin(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\cos(t)dt - \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt$. On note enfin $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $y'' + y = f$.

(a) **Définition de H.**

Graphe de H. On propose

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integr

def f(t):
    if abs(t)<10**(-6):
        return 0
    else:
        return (1-np.exp(-t))/t

def H(f,x):
    def a(t):
        return f(t)*np.cos(t)
    def b(t):
        return f(t)*np.sin(t)
    return np.sin(x)*integr.quad(a,0,x)[0] - np.cos(x)*integr.quad(b,0,x)[0]

X = np.linspace(0,10,100)
Y = [H(f,x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.title("Graphe de $H$")
plt.show()
```

et on obtient

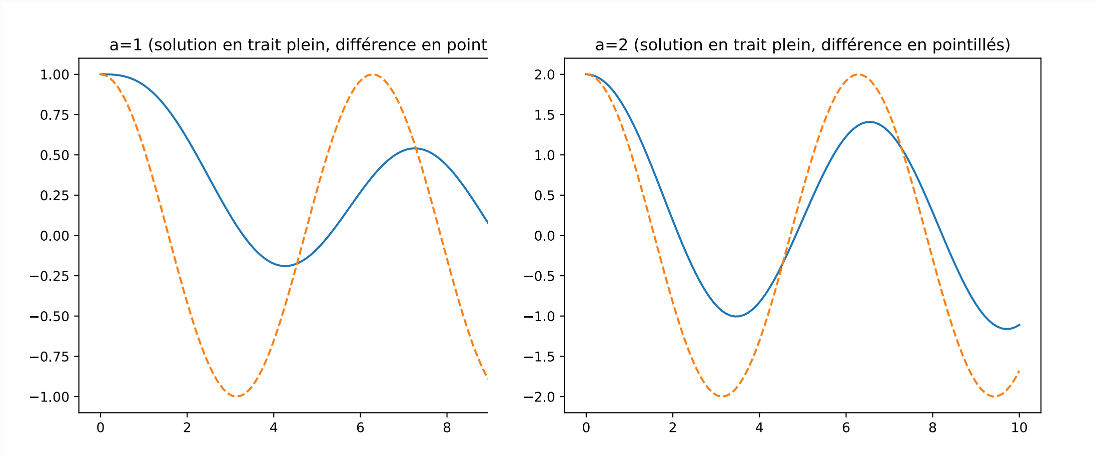


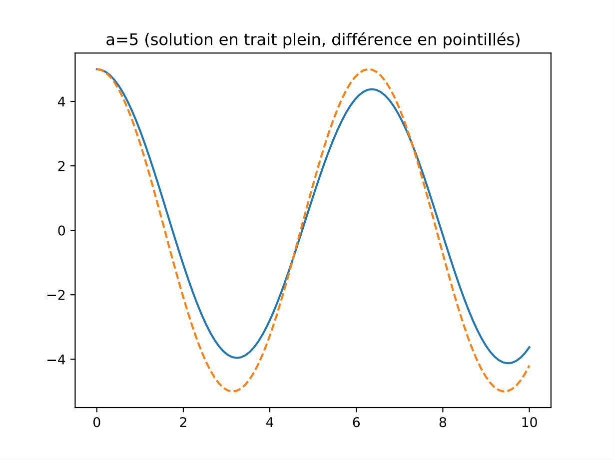
Montrer que H est définie sur $\mathbb{R}$ et tracer son graphe sur $[0, 10]$.

(b) Pour les deux questions qui suivent, il s'agit de l'existence et de l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy linéaire. On tape :

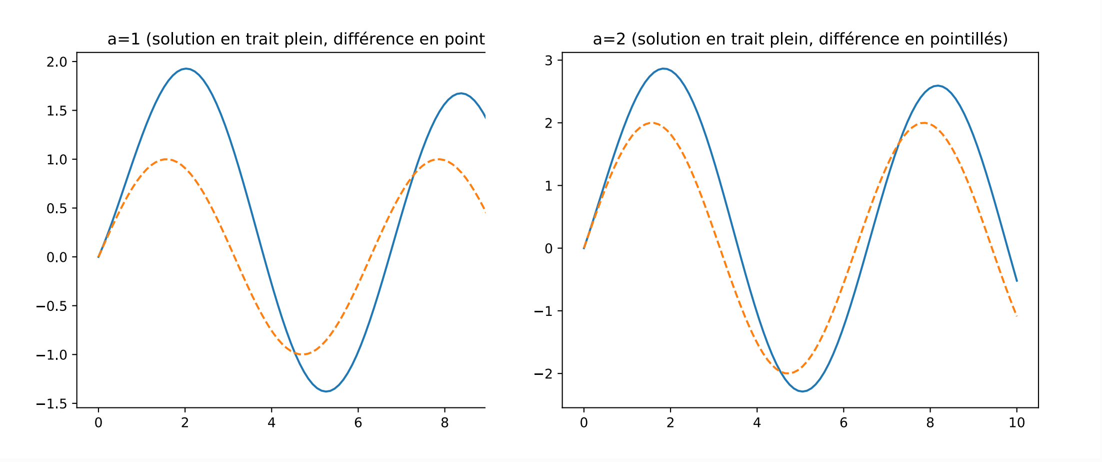
```
def F(Y,t):
    return [Y[1],f(t)-Y[0]]

a=5
X = np.linspace(0,10,100)
Y = [H(f,x) for x in X]
sol = integr.odeint(F,[a,0],X)
Z = [sol[i][0]-Y[i] for i in range(len(Y))]
plt.plot(X,sol[:,0])
plt.plot(X,Z,'--')
plt.show()
```

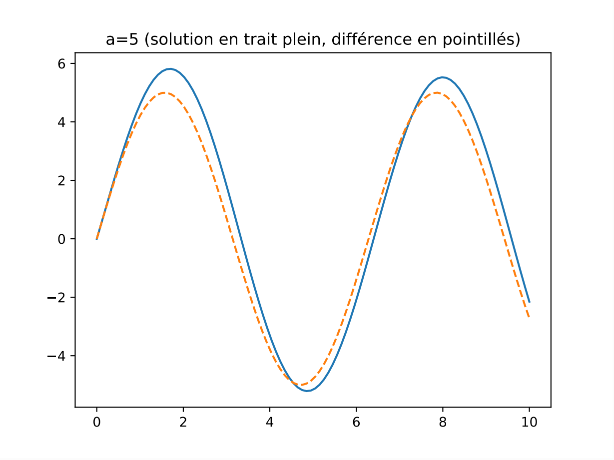
obtient les graphes suivants : pour la première série





pour la deuxième série





On voit les deux fonctions qui semblent se rapprocher quand a croît...

(c)

(d) Quand on y pense, on voit que la différence des solutions semble être une belle sinusoïdale, i.e. une solution de l'équation homogène ! Peut-être que H est solution de l'équation différentielle ! Vérifions-le. Les fonctions $x \mapsto \int_0^x \sin(t) f(t) dt$ et

$x \mapsto \displaystyle\int_0^x \cos(t)f(t)dt$ sont clairement dérivables, comme primitives de fonctions continues. Ainsi, H est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}H'(x) &= \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + \sin(x)f(x)\cos(x) + \sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt - \cos(x)f(t)\sin(x)\\ &= \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + \sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}H''(x) &= -\sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + \cos(x)f(x)\cos(x) + \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt + \sin(x)f(x)\sin(x)\\ &= -H(x) + f(x),\end{aligned}$$

donc H est bien solution de l'équation différentielle (non homogène) !

(e) Là, il faut déjà démontrer que F est deux fois dérivable ! On pose $g(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$.

- pour tout x dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux donc intégrable sur le segment $[0,1]$.
- pour tout t dans $[0,1]$, $x \mapsto g(x,t)$ est deux fois dérivable, de dérivée $x \mapsto -t\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ et de dérivée seconde $x \mapsto t^2\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$.
- pour tout x dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto\mapsto -t\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ est cpm, intégrable.
- soit $a \in \mathbb{R}$ et $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,1]$. Alors
$$\left|t^2\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{t^2\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2},$$
fonction intégrable sur $[0,1]$ et indépendante de x.

Donc, d'après le théorème de classe $\mathscr{C}^k$ des intégrales à paramètres, F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$F(x) + F''(x) = \int_0^1 \frac{(1+t^2)\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} = \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}dt = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\right]_0^x = \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = f(t),$$

donc F est solution de $(\mathcal{E})$. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}dt$. Montrer que F est solution de $(\mathcal{E})$.

(f) Là, on répond aussi vite qu'en physique ! L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$ est $\{A\sin(t) + B\cos(t),\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$.

(g) Comme H et F sont deux solutions de l'équation, elles diffèrent de $A\sin(t) + B\cos(t)$. Or,

- $H(0) = H'(0) = 0$.
- $F(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ et $F'(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\ln(2)$.

Donc
$$F(x) = H(x) + \frac{\pi}{4}\cos(x) - \frac{1}{2}\ln(2)\sin(x).$$

De manière générale, si y est une solution de l'équation différentielle avec $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$,
$$y(x) = H(x) + y_0\cos(x) - y_1\sin(x).$$

 nlaillet.math@gmail.com

12050

Exercice 3. Pour $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M_u est combinaison linéaire de trois matrices indépendantes de u et dont l'une est le carré d'une l'autre.
2. Écrire un programme qui renvoie M_u. Calculer $M_{7,-14,1} \times M_{1,2,3}$ et $M_{1,2,3} \times M_{7,-14,1}$.
3. Soit $M = \{M_u, \quad u \in \mathbb{R}^3\}$. Quelle est la structure de M ? Cet ensemble est-il stable par $\times$? La loi $\times$ est-elle commutative dans M ?
4. Montrer que M_u est semblable à $\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a - \frac{1}{2}(b+c) & -\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) & a - \frac{1}{2}(b+c) \end{pmatrix}$.
5. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M_u soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
6. Soit $S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$, $T = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad a + b + c = 1\}$ et $T' = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad a + b + c = -1\}$. Montrer que M_u est une matrice orthogonale si et seulement si $u \in S \cap (T \cup T')$.

Correction

1. On écrit que

$$M_u = a\mathrm{I}_3 + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, on remarque que si $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2$ et réciproquement !

2. On propose

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

def M(u):
    [a,b,c] = u
    return np.array([[a,b,c],[c,a,b],[b,c,a]])

u = [7,-14,1]
v = [1,2,3]
print(M(u).dot(M(v)))
print(M(v).dot(M(u)))
```

En testant avec plusieurs valeurs, on a vraiment l'impression de commutativité !

3. On n'a pas beaucoup de structures à notre disposition... Essayons de démontrer que M est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On peut le faire à la main, ou remarquer que l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \\ u \mapsto M_u \end{array} \right.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

est linéaire : si $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda u + v) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda a + d \\ \lambda b + e \\ \lambda c + f \end{pmatrix}\right) = (\lambda a + d)\mathrm{I}_3 + (\lambda b + e)J + (\lambda c + f)J^2 = \lambda\varphi(u) + \varphi(v).$$

Ainsi, $M = \mathrm{Im}(\varphi)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Cet ensemble est stable par $\times$. En remarquant que $J^3 = \mathrm{I}_3$, on a, en prenant les mêmes notations que précédemment,

$$\begin{aligned} M_u \times M_v &= (a\mathrm{I}_3 + bJ + cJ^2) \times (d\mathrm{I}_3 + eJ + fJ^2) \\ &= (ad + bf + ce)\mathrm{I}_3 + (ae + bd + cf)J + (af + be + cd)J^2 \\ &= M_v \times M_u. \end{aligned}$$

Donc M est stable par produit, et $\times$ est commutative dans M.

4. J'ai d'abord commencé cette question en voulant résoudre un système : c'est un peu bête ! En effet, si l'on prend la matrice J, elle est diagonalisable, de polynôme caractéristique égal à

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 1,$$

donc J est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$ où $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. Donc J^2 est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}$.
Ainsi, M_u est semblable à

$$\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+jb+j^2c & 0 \\ 0 & 0 & a+j^2b+jc \end{pmatrix}$$

Or, $a + jb + j^2c = a - \frac{1}{2}(b+c) + i\frac{sqrt3}{2}(b-c) = \alpha + i\beta$ et $a + j^2b + jc = a - \frac{1}{2}(b+c) - i\frac{sqrt3}{2}(b-c) = \alpha i\beta$.
Mais si U est un vecteur propre (complexe) associé à $\alpha - i\beta$, en posant $U = V + iW$, on remarque que $AU = AV + iAW = \alpha U - i\beta U = (\alpha V + \beta W)V + i(\alpha W - \beta V)$, d'où la forme de la matrice dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V, W\right)$!

5. Calculons le polynôme caractéristique de M_u ! Par déterminant par blocs, c'est

$$(X - (a+b+c)) \times \left(\left(X - a + \frac{1}{2}(b+c)\right)^2 + \frac{3}{4}(b-c)^2\right).$$

on remarque que le deuxième terme est irréductible sur $\mathbb{R}$, sauf si $b - c = 0$. Si $b = c$, alors la matrice est clairement diagonalisable.

6. On pose $P_m = X^3 - X^2 + m$, avec $m \in \{-0,1; 0; 0,1; 0,2\}$; tracer les courbes des différents polynômes P_m sur l'intervalle $[-1, \frac{3}{2}]$.

7. Trouver une C.N.S. sur m pour que P_m admette trois racines réelles.

8. Il faut que les colonnes de M_u soient de norme 1, i.e. que $a^2+b^2+c^2=1$. De plus, il faut que les colonnes soient orthogonales, i.e. que $ab+ca+bc=0$.
Si c'est le cas, alors

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ca+bc) = 1$$

donc $a+b+c=\pm 1$. La réciproque est évidente.

Il y avait deux autres questions sur le sujet que j'ai trouvé, mais qui étaient décorrélées du reste

1. On pose $P_m = X^3 - X^2 + m$, avec $m \in \{-0,1; 0; 0,1; 0,2\}$; tracer les courbes des différents polynômes P_m sur l'intervalle $[-1, \frac{3}{2}]$.

2. Trouver une C.N.S. sur m pour que P_m admette trois racines réelles.