Oraux blancs

02011

{exo02011}

Exercice 1. *Centrale PSI 19*. Soit $P_n = X(1-X)(1-\frac{X}{2})\dots(1-\frac{X}{n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie Info

1. Écrire la fonction **Python** `P(n,x)` qui retourne $P_n(x)$.
2. Tracer $P_n(x)$ pour $n \in [\![0, 10]\!]$ et $x \in [0, 1]$. Commenter.
3. Écrire la fonction `Max(n)` qui retourne l'abscisse x_n du point réalisant le maximum global de P_n sur $[0, 1]$.
4. Calculer $x_n \ln n$ pour $n = 10^k$ avec $k \in [\![1, 5]\!]$. Commenter.

Partie Maths

5. Montrer que P_n admet un maximum global sur $[0, 1]$ atteint en un point unique appartenant à $]0, 1[$.
6. En considérant la fonction $x \mapsto \ln P_n(x)$, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{1-x_n}$
7. En déduire un équivalent de x_n.
8. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que : $\forall u \in [0, \frac{1}{2}],\ |\ln(1-u) + u| \leqslant Cu^2$
9. En déduire un équivalent de $P_n(x_n)$.

16009

Exercice 2. *Centrale PSI 19*. (RMS 1036) Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$. Soit $H : x \mapsto \sin(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\cos(t)dt - \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt$. On note enfin $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $y'' + y = f$.

1. Montrer que H est définie sur $\mathbb{R}$ et tracer son graphe sur $[0, 10]$.
2. Soit a un réel. Montrer qu'il existe une unique solution g_a de $(\mathcal{E})$ telle que $g_a(0) = a$ et $g_a'(0) = 0$. Tracer les graphes de g_a et $g_a - H$ sur $[0, 10]$ pour $a = 1, 2$ et 5.
3. Soit a un réel. Montrer qu'il existe une unique solution h_a de $(\mathcal{E})$ telle que $h_a(0) = 0$ et $h_a'(0) = a$. Tracer les graphes de h_a et $h_a - H$ sur $[0, 10]$ pour $a = 1, 2$ et 5.
4. Émettre une conjecture sur H et la prouver.
5. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}dt$. Montrer que F est solution de $(\mathcal{E})$.
6. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.
7. Que peut-on dire de $H - F$? Et de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$?

12050

{exo12050}

Exercice 3. *Centrale PSI 19*. Pour $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M_u est combinaison linéaire de trois matrices indépendantes de u et dont l'une est le carré d'une l'autre.
2. Écrire un programme qui renvoie M_u. Calculer $M_{7,-14,1} \times M_{1,2,3}$ et $M_{1,2,3} \times M_{7,-14,1}$.
3. Soit $M = \{M_u, \quad u \in \mathbb{R}^3\}$. Quelle est la structure de M ? Cet ensemble est-il stable par $\times$? La loi $\times$ est-elle commutative dans M ?
4. Montrer que M_u est semblable à $\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a - \frac{1}{2}(b+c) & -\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) & a - \frac{1}{2}(b+c) \end{pmatrix}$.
5. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M_u soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
6. Soit $S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$, $T = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad a + b + c = 1\}$ et $T' = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad a + b + c = -1\}$. Montrer que M_u est une matrice orthogonale si et seulement si $u \in S \cap (T \cup T')$.

08014

{exo08014}

Exercice 4. *Centrale PSI 19*. (RMS 130 1039) On effectue des tirages dans une urne contenant initialement deux boules rouges et une boule noire. À chaque étape, on tire au hasard une boule dans l'urne, puis on la replace dans l'urne et on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur.
On note X_k la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée au k-ième tirage est rouge et 0 sinon.
On note S_n le nombre de boules rouges tirées après n tirages. On convient de poser $S_0 = 0$.

1. Écrire une fonction simulant n tirages et revoyant la liste `[S0,...,Sn]`.
2. Écrire une fonction renvoyant $\mathbb{E}(S_n)$ pour n allant de 0 à 20. Tracer la ligne brisée représentant $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que $S_n = k$.
4. Déterminer une relation entre $\mathbb{E}(S_{n+1})$ et $\mathbb{E}(S_n)$.
5. En déduire $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n.
6. Déterminer la loi de X_k.

14020

Exercice 5. *Centrale PSI 23*. On pose $J_n(x) = \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$.

1. Déterminer le domaine de définition D de J_n.
2. Calculer $J_n(x)$ pour tout $x \in D$.
3. On pose $u_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0,n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   (a) Déterminer $u(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t)$.
   (b) Tracer sous Python $u_n(t)$ pour $n \in \{2,5,10\}$ et $u(t)$ (on choisira une valeur de x).
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n u_n(t)\mathrm{d}t = \Gamma(x)$.
4. (a) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   (b) Démontrer que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.
   (c) Montrer que $\Gamma(n) = (n-1)\,!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Tracer la fonction Γ sous Python.
5. (a) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln(t))^k \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente pour $x \in D$ et $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur D et donner ses dérivées k-ièmes.
6. Montrer qu'il existe $c \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.
7. Tracer alors le tableau de variations de Γ.
8. Écrire en Python un script permettant de tracer les dérivées k-ièmes de Γ. Conjecturer les limites en 0 et en $+\infty$.
9. Donner les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction Γ et de $\Gamma^{(k)}$.

12051

{exo12051}

Exercice 6. *Centrale PSI 19*. (RMS 130 993) Soit n un entier naturel. On considère la matrice $A_{n+1} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $a_{j-1,j} = j-1$, $a_{j+1,j} = n+1-j$ pour tout j et dont tous les autres coefficients sont nuls.

1. Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie A_{n+1}.
2. Déterminer avec Python les valeurs propres de A_{n+1}. Que peut-on conjecturer ?
3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ canoniquement associé à la matrice A_{n+1}. Montrer qu'il existe un polynôme Q ne dépendant pas de n tel que pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = QP' + nXP$.
4. En déduire les éléments propres de u.
5. La matrice A_{n+1} est-elle diagonalisable ?

08015

{exo08015}

Exercice 7. *Centrale PSI 21*. (RMS 1035) On dispose de n urnes $U_1, \dots, U_n$ et n boules numérotées de 1 à n, que l'on place indépendamment dans les urnes, chaque boule ayant la probabilité $\frac{1}{n}$ d'être placée dans l'urne U_i pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$. On note X_n le nombre d'urnes vides après le placement des n boules.

1. Écrire une fonction Python `different` qui prend une liste `L` et qui renvoie le nombre d'éléments distincts de `L`. Par exemple, `different([1,2,3,1,2])` renvoie 3 .
2. Écrire une fonction Python `simulX` qui prend un entier n et renvoie une simulation de X_n.
3. Écrire une fonction Python `esperanceX` qui prend en entrée un entier n et renvoie une valeur approchée de $E(X_n)$. Tracer $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n pour $n \in [\![1, 15]\!]$. Que peut-on conjecturer ? Faire de même pour la variance.
4. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire valant 1 si l'urne U_i est vide, 0 sinon. Déterminer la loi de Y_i, son espérance et sa variance. Vers quoi tendent l'espérance et la variance quand n tend vers $+\infty$?
5. Montrer que $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Est-ce que la loi de X_n est binomiale ?
6. Calculer l'espérance de X_n.
7. Calculer la covariance de Y_i et Y_j pour $i \neq j$. En déduire la variance de X_n. En donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$.

08016

{exo18016}

Exercice 8. *Centrale PSI 22*. (RMS 2022-2023 1128) Considérons une urne comportant initialement une boule rouge et une boule bleue. Chaque boule tirée est remise dans l'urne avec une boule supplémentaire de la même couleur. Soient X_n et Y_n les variables aléatoires égales aux nombres de boules rouges et bleues après le n-ième tirage. (si $n = 0$, on considère la situation initiale, avec une boule rouge, une boule bleue)

On pose, pour $u, v \in \mathbb{R}$, $P_n(u, v) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X_n = i, Y_n = j)\, u^i v^j$.

1. Écrire une fonction Python `simulation` qui prend une argument entier n, qui simule n tirages et renvoie le nombre de boules rouges à l'issue du n-ième tirage.
2. Écrire une fonction Python `moyenne` qui prend en argument deux entiers n et N, qui simule N fois une expérience de n tirages et renvoie une liste où le terme d'indice i est la moyenne du nombre d'expériences se terminant avec i boules rouges. Que remarque-t-on, en testant avec $N = 10000$ et n prenant plusieurs valeurs ?
3. Soient $n \in \mathbb{N}$, i et $j \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\mathbb{P}(X_{n+1} = i, Y_{n+1} = j)$ en fonction des probabilités $\mathbb{P}(X_n = i - 1, Y_n = j)$ et $\mathbb{P}(X_n = i, Y_n = j - 1)$.
4. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(u, v) = \dfrac{1}{n+2}\left(u^2 \dfrac{\partial P_n}{\partial u}(u, v) + v^2 \dfrac{\partial P_n}{\partial v}(u, v)\right)$
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(u, v) = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^{k+1} v^{n+1-k}$. Est-ce en adéquation avec la première question ?
6. Modifier la fonction `simulation` afin qu'elle renvoie 1 si la dernière boule tirée est rouge. Modifier la fonction `moyenne` afin qu'elle renvoie le nombre moyen de tirages se terminant par une boule rouge. Commenter.

17037

{exo17037}

Exercice 9. *Centrale PSI 22*. (RMS 2022/2023 1099)

1. Écrire une fonction Python qui prend un entier n et renvoie une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à coefficients aléatoires dans [0,1[. Calculer les valeurs propres et des vecteurs propres de quelques-unes de ses matrices. Que peut-on conjecturer sur le signe de la valeur propre maximale ? Sur le signe des coordonnées d'un vecteur propre associé ?

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres et α leur maximum. Soit $\Phi : X \longmapsto \langle X, MX \rangle$

2. Justifier l'existence de α. Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \Phi(X) \leqslant \alpha \|X\|^2$ et qu'il y a égalité si et seulement si X appartient au sous-espace propre de M associé à α.
3. Soit $C = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}); \|X\| = 1 \text{ et } \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \geqslant 0 \right\}$. Montrer que Φ est bornée sur C et admet un maximum $\mu \leqslant \alpha$.
4. Soient X un vecteur propre unitaire de M associé à α et $W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les composantes sont les valeurs absolues des composantes de X. Montrer que $W \in C$ et en déduire que $\mu \geqslant |\alpha|$.
5. Conclure que $\alpha \geqslant 0$ puis que M admet un vecteur propre positif et unitaire associé à α.
6. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!], |\lambda_j| \leqslant \alpha$.

20007

{exo20007}

Exercice 10. *Centrale PSI 22*. (RMS 2022/2023 1117) On munit l'espace E des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues et bornées de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in E$, on pose $\Phi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(xt) \frac{f(t)}{1+t^2} dt$

1. Montrer que Φ défini sur E, et que c'est un endomorphisme continu de E.
2. Soit g l'image par Φ de la fonction constante égale à 1 . Avec Python, tracer g sur le segment $[0, 1000]$ et émettre une conjecture sur la limite de g.
3. Calculer la limite de g en $+\infty$.
4. Étudier la dérivabilité de g et calculer sa dérivée.
5. Calculer $g(x) + g\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On pourra utiliser Python pour intuiter le résultat.

16010

Exercice 11. Centrale PSI 22 Soit $q : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ continue. On s'intéresse à l'équation différentielle $(E_{a,b})\, y'' + (1+q)y = 0, y(0) = a$, et $y'(0) = b$. {exo16010}

1. Tracer avec Python les solutions pour $(a, b) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$ et pour les fonctions $q : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$, $q : t \mapsto \sin(t) \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $q : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$. et $q : t \mapsto \dfrac{-t^2}{2\,(1+t^2)}$. On tracera ces solutions sur l'intervalle $[0, 50]$. Pour quelles fonctions q la solution semble-t-elle bornée ?

On suppose que q est intégrable sur $\mathbf{R}^+$.

2. Soit $z : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)f(t)dt$ avec f continue sur $\mathbf{R}^+$. Démontrer que z est deux fois dérivable et calculer $z'' + z$.
3. Soit y une solution de $(E_{a,b})$. Démontrer que, pour $t \in \mathbf{R}^+, 0 \leqslant |y(t)| \leqslant |a| + |b| + \displaystyle\int_0^x |q(t)||y(t)|dt$. *On considèrera $w = y - z$ où z est définie à la question précédente, et f est judicieusement choisie.*
4. En déduire que y est bornée.
5. La condition « q intégrable » est-elle suffisante/nécessaire pour que les solutions de $(E_{a,b})$ soient bornées ?

08017

{exo08017}

Exercice 12. *Centrale PC 23*. Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, réelles, de même loi, telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(\varepsilon_k = 1) = P(\varepsilon_k = -1) = 1/2$$

On note $X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}\varepsilon_k$ et $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\ln(k)}{k}\right)^2$.

1. Montrer que X_n a une espérance et une variance, en donner une expression.

2. Montrer que la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n}$ diverge et que S_n converge. On note alors $S_n \longrightarrow S$.

3. Montrer que $P(X_n \geqslant a) \leqslant \frac{S_n}{a^2} \leqslant \frac{S}{a^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

4. Tests python

(a) Écrire un code qui par une fonction `estim(a,n)` renvoie $P(M_n \geqslant a)$ sur 10000 simulations. Tracer cette probabilité en fonction de a.

(b) Écrire une fonction $S(a, n)$ qui renvoie $\frac{S_n}{a^2}$.

(c) Conjecturer le signe de $P(M_n \geqslant a) - \frac{S_n}{a^2}$.

5. Prouver la conjecture précédente.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^{+*} P\left(\frac{M_n}{\sqrt{\ln(n)}} \geqslant a\right) \longrightarrow 0$.

09045

{exo09045}

Exercice 13. *Centrale PC 22*. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables géométriques indépendantes de paramètre $p \in]0,1[$. Soit $q = 1-p$. Poul $\omega \in \Omega$, on définit

$$C(\omega) = \max\left\{n \in \mathbb{N}^*; X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant X_n(\omega)\right\}$$

1. Pour $k \in \mathrm{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(X_1 \geqslant k)$, $\mathbf{P}(X_2 \geqslant X_1, X_1 = k)$ puis $\mathbf{P}(C \geqslant 2)$.
2. Écrire une fonction python `geomCr(q)` qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire C.
3. Programmer une fonction `nbGeomCr(q)` qui renvoie la moyenne de C observée au cours de 1000 réalisations. On suppose que C a une variance. Pourquoi peut-on dire que `nbGeomCr(q)` est une valeur acceptable de $\mathbb{E}(C)$? {conj1109}
4. Tracer `nbGeomCr(q)` en fonction de $q \in]0,1[$. Que peut-on conjecturer sur les limites aux bornes ?
5. Pour $k \in \mathrm{N}^*$, montrer que :
$$\mathbf{P}(X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k) = \frac{(1-q)^n q^{n(k-1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}.$$
6. Calculer $\mathbb{E}(C)$ en fonction de q.
7. Démontrer les propriétés conjecturées à la question 4..

04029

{exo04029}

Exercice 14. *Centrale PC 22*. (RMS 2022-2023 1136) Pour a, b dans C, on pose $D_1(a,b) = a$ et, pour tout $n \geqslant 2$,

$$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & 2b & 0 & & (0) \\ 1 & a & b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & b \\ (0) & & & 1 & a \end{vmatrix} \text{ et } A_n(b) = \begin{pmatrix} 0 & -2b & 0 & & (0) \\ -1 & 0 & -b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & -b \\ (0) & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $D_n(a,b)$ pour $n \leqslant 3$
2. Donner une relation de récurrence linéaire reliant $D_n(a,b), D_{n+1}(a,b)$ et $D_{n+2}(a,b)$.
3. Coder en Python une fonction `D(n,a,b)` renvoyant $D_n(a,b)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $a \mapsto D_n(a,b)$ est polynomiale à coefficients réels, et donner son degré.
5. Pour $b \in [\![1, n]\!]$ et $n \in [\![3, 5]\!]$, donner une représentation graphique de $a \mapsto D_n(a,b)$ sur $[-2\sqrt{b}, 2\sqrt{b}]$. Conjecturer le nombre et la localisation des zéros de $a \mapsto D_n(a,b)$.
6. Supposant vraie la conjecture de la question précédente, que peut-on dire de la réduction de la matrice $A_n(b)$?
7. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $T_0 = 1, T_1 = X$ et $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ pour $n \geqslant 0$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, donner une expression simple des termes de la suite $(T_n(\cos\theta))_n$.
8. Calculer les racines du polynôme T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. Déterminer alors les zéros de $a \longmapsto D_n(a,b)$ en fonction du nombre complexe b.

12049

{exo12049}

Exercice 15. *Centrale PSI 24*. Notons u l'application linéaire qui à $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ associe B définie par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad B_i = \sum_{k=1}^{n} A_k - A_i = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} A_k,$$

où A_k est la k ème colonne de la matrice A.

1. Écrire une fonction en Python qui renvoie l'image d'une matrice par u.
2. À l'aide du script, évaluer u pour certaines matrices dans le cas où $n = 2$ et $n = 3$.
3. L'endomorphisme u est-il un automorphisme ?
4. Déterminer la nature géométrique de u ainsi que ses éléments caractéristiques pour $n = 2$.
5. Exprimer $\det(u(A))$ en fonction de $\det(A)$.
6. Déterminer un polynôme annulateur de u de degré 2 .
7. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
8. Soit J la matrice dont les coefficients valent tous 1 . On pose $U = J - I_n$. Exprimer les colonnes de AU. Qu'en concluez-vous ?

16008

{exo16008}

Exercice 16. *Centrale PSI 24*. Soit $(E) : \left(1+x^2\right) y'' + xy' - \dfrac{y}{4} = 0$.

{qu1}

1. (a) Justifier qu'il existe une unique fonction y solution de (E) vérifiant $y(0) = \sqrt{3}$ et $y'(0) = 0$.

(b) Tracer en python la fonction de la question précédente. *On aura intérêt à utiliser les deux tableaux de temps* `T1 = np.arange(0,1,0.01)` *et* `T2 = np.arange(0,-1,-0.01)`

2. (a) Trouver toutes les solutions de (E) développable en série entière sur $]-1,1[$.

(b) Montrer que toute solution de (E) est développable en série entière.

(c) En déduire une deuxième façon de tracer le graphe de la fonction de la question 1.

3. (a) Si h est une solution de (E), déterminer l'équation différentielle vérifiée par $g = h \circ \mathrm{sh}$.

(b) En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

exo03015

{exo03015}

Exercice 17. *Centrale PSI 24*. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(n)$. Pour $x \in [0, \pi/2]$, on pose

$$\varepsilon_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0, \pi/4[\\ 1 \text{ si } x \in [\pi/4, \pi/2] \end{cases} \quad \text{et, pour } n \in \mathbb{N}^*, \varepsilon_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k(x) u_k + u_n > x \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. (a) Écrire une fonction Python traçant une ligne polygonale reliant les points $M_k = (k, u_k)$ pour $k \in [\![1, 50]\!]$. Conjecture ? {conj1}

(b) Écrire une fonction Python d'argument x et N renvoyant $(\varepsilon_0(x), \ldots, \varepsilon_N(x))$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k(x) u_k$.

Tester cette fonction pour $x = 0, \dfrac{1}{2}, 1, 2, \pi$ et, à chaque fois, $N = 20$. Observations et conjecture ?

2. (a) Étudier la monotonie de (u_n) et sa convergence éventuelle.

(b) Donner un équivalent de u_n.

3. (a) Étudier la convergence de la série $\sum \varepsilon_n(x) u_n$.

(b) Démontrer la conjecture de la question 1.b

4. Généralisation. Soit (u_n) une suite vérifiant l'hypothèse (H) suivante : $\sum u_n$ est convergente et (u_n) est décroissante positive. On note λ la somme de la série $\sum u_n$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$. Montrer que $\sum \varepsilon_n u_n$ converge. On note S sa somme. Montrer que $S \in [0, \lambda]$.

On cherche à savoir à quelle condition la propriété (P) suivante est vraie :

$$\forall x \in [0, \lambda], \exists (\varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R_{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Donner la condition nécessaire et suffisante cherchée en fonction de (R_n).