N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Oraux blancs

02011

{exo02011}

Exercice 1. *Centrale PSI 19*. Soit $P_n = X(1-X)(1-\frac{X}{2})\dots(1-\frac{X}{n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie Info

1. Écrire la fonction **Python** `P(n, x)` qui retourne $P_n(x)$.
2. Tracer $P_n(x)$ pour $n \in [\![0, 10]\!]$ et $x \in [0, 1]$. Commenter.
3. Écrire la fonction `Max(n)` qui retourne l'abscisse x_n du point réalisant le maximum global de P_n sur $[0, 1]$.
4. Calculer $x_n \ln n$ pour $n = 10^k$ avec $k \in [\![1, 5]\!]$. Commenter.

Partie Maths

5. Montrer que P_n admet un maximum global sur $[0, 1]$ atteint en un point unique appartenant à $]0, 1[$.
6. En considérant la fonction $x \mapsto \ln P_n(x)$, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{1-x_n}$
7. En déduire un équivalent de x_n.
8. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que : $\forall u \in [0, \frac{1}{2}],\ |\ln(1-u) + u| \leqslant Cu^2$
9. En déduire un équivalent de $P_n(x_n)$.

Correction

Soit $P_n = X(1-X)(1-\frac{X}{2})\dots(1-\frac{X}{n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

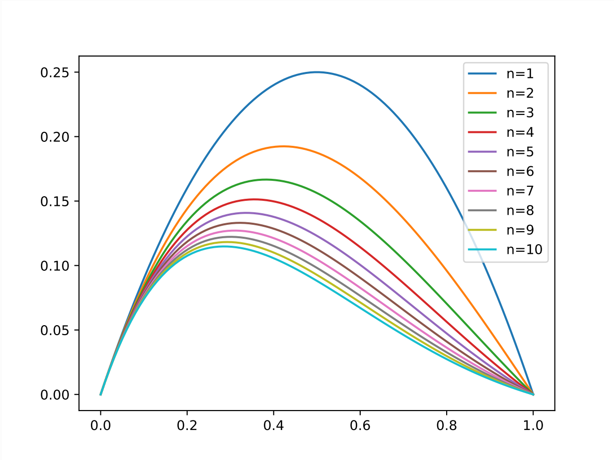
Partie Info

1. On propose

```python
import numpy as np
import scipy.optimize as resol

def P(n,x):
    res = x
    for k in range(1,n+1):
        res *= (1-x/k)
    return res


X = np.linspace(0,1,100)
for i in range(1,11):
    Y = [P(i,x) for x in X]
    s = "n="+str(i)
    plt.plot(X,Y,label=s)
plt.legend()
plt.show()
```

On obtient

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com



P_n a un unique maximum, et les abscisses du maximum, ainsi que sa valeur, semblent tendre vers 0.

2.

3. On ne peut calculer qu'une valeur approchée !

```python
def x(n):
    X = np.linspace(0,1,101)
    im = 0
    m = P(n,im/100)
    for k in range(len(X)):
        if P(n,k/100)>P(n,im/100):
            im = k
    return im/100
```

4. On a l'impression de quelque chose qui converge !

```python
K = [10**k for k in range(1,6)]
L = [x(n)*np.log(n) for n in K]
```

et on a

```python
>>> L
[0.6677496769682733, 0.8289306334778564, 0.8980081862676779,
 0.9210340371976184, 0.9210340371976183]
```

Partie Maths

5. La fonction P_n est continue sur le **segment** $[0,1]$ donc elle y est bornée et atteint ses bornes, en particulier son maximum. S'annulant en 0 et en 1, le maximum est atteint sur $]0,1[$. Pour l'unicité, sortons du cadre !
La fonction P_n admet n racines, en $0,1,\dots,n$. Donc, par n applications successives du théorème de Rolle, P_n' admet $n-1$ racines, dans chaque intervalle $]i,i+1[$ ($i \in [\![0,n-1]\!]$). En particulier, P_n' n'admet qu'une racine sur $]0,1[$, donc P_n n'admet qu'un point critique. Comme le maximum de P_n est atteint à l'intérieur de $]0,1[$, il est donc unique !

6. On remarque que pour x sur $]0,1[$, $P_n(x) < 1$, donc un maximum de P_n est un maximum de $\ln \circ P_n$ (par croissance de ln), et $\ln \circ P_n$ est strictement négatif. Or,

$$\ln(P_n(x)) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{x}{k}\right) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k-x) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k).$$

En x_n, la fonction ci-dessus est maximale, donc (point intérieur) la dérivée est nulle, i.e.

$$\frac{1}{x_n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-x_n}=0,$$

donc

$$\frac{1}{x_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-x_n}$$

Comme $x_n\in]0,1[$, $0<k-x_n<k$, donc $\dfrac{1}{k-x_n}>\dfrac{1}{k}$, d'où l'inégalité de gauche.

De plus, $x_n<1$ donc $k-x_n>k-1$ donc (sauf pour $k=1$, $\dfrac{1}{k-x_n}<\dfrac{1}{k-1}$). Donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-x_n}<\frac{1}{1-x_n}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}\leqslant\frac{1}{1-x_n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

7. Par la minoration par la série harmonique, $\dfrac{1}{x_n}$ tend vers $+\infty$, donc $x_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc, comme

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n),$$

on en déduit que $\dfrac{1}{1-x_n}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$, donc $\dfrac{1}{x_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$, i.e. $\boxed{x_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\ln(n)}}$.

(remarque : on retrouve l'équivalent de la série harmonique en remarquant, par une comparaison série-intégrale, que

$$\ln(k+1)-\ln(k)\leqslant\frac{1}{k}\leqslant\ln(k)-\ln(k-1),$$

et en sommant.

8. La fonction $u\mapsto\ln(1-u)$ est $\mathscr{C}^2$ sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, donc sa dérivée seconde, continue sur le segment $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, y est bornée (en valeur absolue) par un certain $C>0$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 permet de conclure que $\forall u\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, $|\ln(1-u)+u|\leqslant Cu^2$

9. L'idée est d'utiliser

$$\ln(P_n(x_n))=\ln(x_n)+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{x_n}{k}\right).$$

Par la question précédente,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{x_n}{k}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{x_n}{k}\right|\leqslant C\sum_{k=1}^{n}\frac{x_n^2}{k^2}=o(x_n),$$

car la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ converge. D'où

$$\ln(P_n(x_n))=\ln(x_n)-x_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+o(x_n).$$

Or, comme $x_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\ln(n)}$, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$,

$$P_n(x_n)=\mathrm{e}^{\ln(x_n)-1+o(1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}x_n\times\mathrm{e}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\mathrm{e}\ln(n)}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Python corrobore bien le résultat !

16009

Exercice 2. *Centrale PSI 19*. (RMS 1036) Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1 - e^{-t}}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$. Soit $H : x \mapsto \sin(x) \displaystyle\int_0^x f(t)\cos(t)dt - \cos(x) \int_0^x f(t)\sin(t)dt$. On note enfin $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $y'' + y = f$.

1. Montrer que H est définie sur $\mathbb{R}$ et tracer son graphe sur $[0, 10]$.
2. Soit a un réel. Montrer qu'il existe une unique solution g_a de $(\mathcal{E})$ telle que $g_a(0) = a$ et $g_a'(0) = 0$. Tracer les graphes de g_a et $g_a - H$ sur $[0, 10]$ pour $a = 1, 2$ et 5.
3. Soit a un réel. Montrer qu'il existe une unique solution h_a de $(\mathcal{E})$ telle que $h_a(0) = 0$ et $h_a'(0) = a$. Tracer les graphes de h_a et $h_a - H$ sur $[0, 10]$ pour $a = 1, 2$ et 5.
4. Émettre une conjecture sur H et la prouver.
5. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1 + t^2} dt$. Montrer que F est solution de $(\mathcal{E})$.
6. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.
7. Que peut-on dire de $H - F$? Et de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$?

Correction

(RMS 1036) Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1 - e^{-t}}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$.

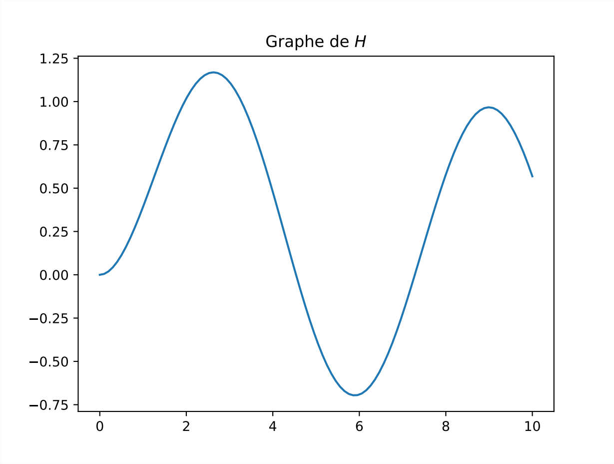
Soit $H : x \mapsto \sin(x) \displaystyle\int_0^x f(t)\cos(t)dt - \cos(x) \int_0^x f(t)\sin(t)dt$. On note enfin $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $y'' + y = f$.

(a) **Définition de H.**

Graphe de H. On propose

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integr

def f(t):
    if abs(t)<10**(-6):
        return 0
    else:
        return (1-np.exp(-t))/t

def H(f,x):
    def a(t):
        return f(t)*np.cos(t)
    def b(t):
        return f(t)*np.sin(t)
    return np.sin(x)*integr.quad(a,0,x)[0] - np.cos(x)*integr.quad(b,0,x)[0]

X = np.linspace(0,10,100)
Y = [H(f,x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.title("Graphe de $H$")
plt.show()
```

et on obtient

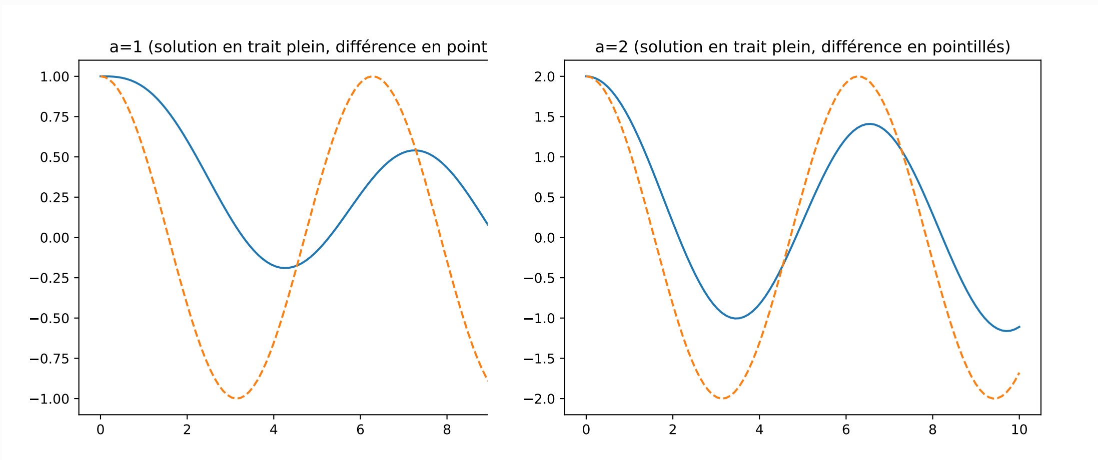


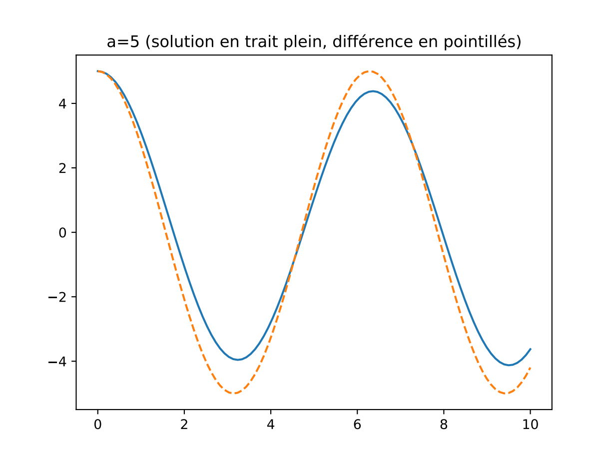
Montrer que H est définie sur $\mathbb{R}$ et tracer son graphe sur $[0, 10]$.

(b) Pour les deux questions qui suivent, il s'agit de l'existence et de l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy linéaire. On tape :

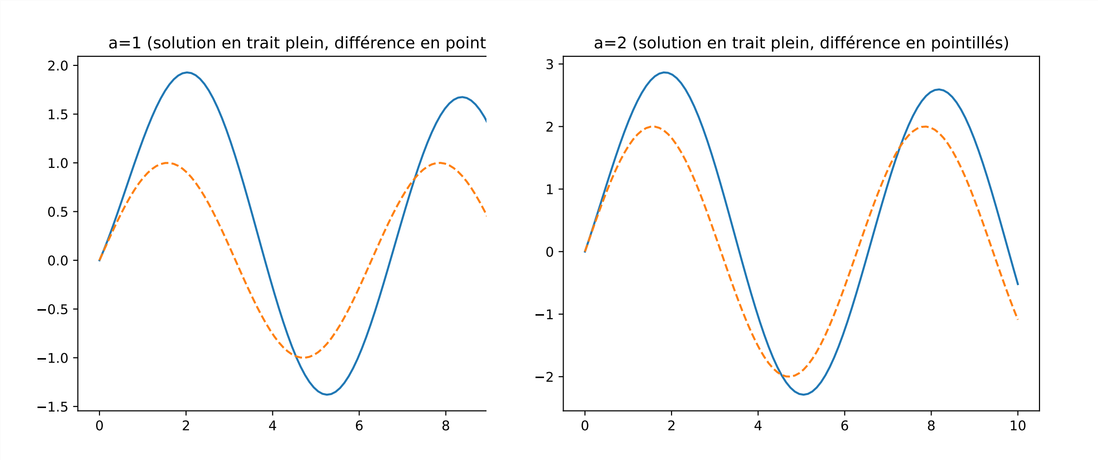
```
def F(Y,t):
    return [Y[1],f(t)-Y[0]]

a=5
X = np.linspace(0,10,100)
Y = [H(f,x) for x in X]
sol = integr.odeint(F,[a,0],X)
Z = [sol[i][0]-Y[i] for i in range(len(Y))]
plt.plot(X,sol[:,0])
plt.plot(X,Z,'--')
plt.show()
```

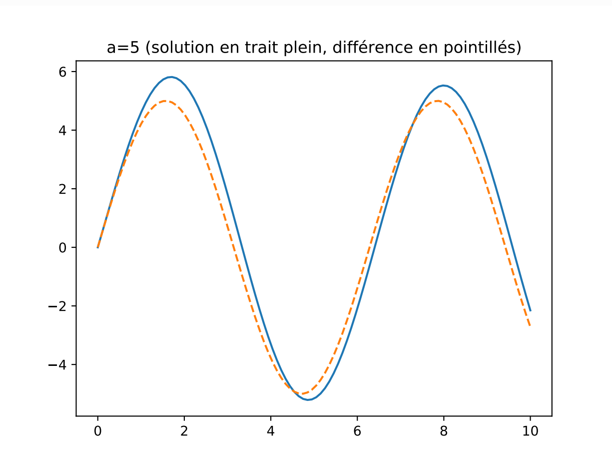
obtient les graphes suivants : pour la première série





pour la deuxième série





On voit les deux fonctions qui semblent se rapprocher quand a croît...

(c)

(d) Quand on y pense, on voit que la différence des solutions semble être une belle sinusoïdale, i.e. une solution de l'équation homogène ! Peut-être que H est solution de l'équation différentielle ! Vérifions-le. Les fonctions $x \mapsto \int_0^x \sin(t) f(t) dt$ et

$x \mapsto \displaystyle\int_0^x \cos(t)f(t)dt$ sont clairement dérivables, comme primitives de fonctions continues. Ainsi, H est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}H'(x) &= \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + \sin(x)f(x)\cos(x) + \sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt - \cos(x)f(t)\sin(x)\\ &= \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + \sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}H''(x) &= -\sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + \cos(x)f(x)\cos(x) + \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt + \sin(x)f(x)\sin(x)\\ &= -H(x) + f(x),\end{aligned}$$

donc H est bien solution de l'équation différentielle (non homogène) !

(e) Là, il faut déjà démontrer que F est deux fois dérivable ! On pose $g(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$.

- pour tout x dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux donc intégrable sur le segment $[0,1]$.
- pour tout t dans $[0,1]$, $x \mapsto g(x,t)$ est deux fois dérivable, de dérivée $x \mapsto -t\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ et de dérivée seconde $x \mapsto t^2\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$.
- pour tout x dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto\mapsto -t\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est cpm, intégrable.
- soit $a \in \mathbb{R}$ et $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,1]$. Alors
$$\left|t^2\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{t^2e^{-at}}{1+t^2},$$
fonction intégrable sur $[0,1]$ et indépendante de x.

Donc, d'après le théorème de classe $\mathscr{C}^k$ des intégrales à paramètres, F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$F(x) + F''(x) = \int_0^1 \frac{(1+t^2)e^{-xt}}{1+t^2} = \int_0^1 e^{-xt}dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^x = \frac{1-e^{-x}}{x} = f(t),$$

donc F est solution de $(\mathcal{E})$. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$. Montrer que F est solution de $(\mathcal{E})$.

(f) Là, on répond aussi vite qu'en physique ! L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$ est $\{A\sin(t) + B\cos(t),\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$.

(g) Comme H et F sont deux solutions de l'équation, elles diffèrent de $A\sin(t) + B\cos(t)$. Or,

- $H(0) = H'(0) = 0$.
- $F(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = [\operatorname{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ et $F'(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\ln(2)$.

Donc
$$F(x) = H(x) + \frac{\pi}{4}\cos(x) - \frac{1}{2}\ln(2)\sin(x).$$

De manière générale, si y est une solution de l'équation différentielle avec $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$,
$$y(x) = H(x) + y_0\cos(x) - y_1\sin(x).$$

12050

{exo12050}

Exercice 3. *Centrale PSI 19*. Pour $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M_u est combinaison linéaire de trois matrices indépendantes de u et dont l'une est le carré d'une l'autre.
2. Écrire un programme qui renvoie M_u. Calculer $M_{7,-14,1} \times M_{1,2,3}$ et $M_{1,2,3} \times M_{7,-14,1}$.
3. Soit $M = \{M_u, \quad u \in \mathbb{R}^3\}$. Quelle est la structure de M ? Cet ensemble est-il stable par $\times$? La loi $\times$ est-elle commutative dans M ?
4. Montrer que M_u est semblable à $\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a - \frac{1}{2}(b+c) & -\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) & a - \frac{1}{2}(b+c) \end{pmatrix}$.
5. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M_u soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
6. Soit $S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$, $T = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad a + b + c = 1\}$ et $T' = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad a + b + c = -1\}$. Montrer que M_u est une matrice orthogonale si et seulement si $u \in S \cap (T \cup T')$.

Correction

1. On écrit que
$$M_u = a\mathrm{I}_3 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
De plus, on remarque que si $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2$ et réciproquement !
2. On propose

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

def M(u):
    [a,b,c] = u
    return np.array([[a,b,c],[c,a,b],[b,c,a]])

u = [7,-14,1]
v = [1,2,3]
print(M(u).dot(M(v)))
print(M(v).dot(M(u)))
```

En testant avec plusieurs valeurs, on a vraiment l'impression de commutativité !
3. On n'a pas beaucoup de structures à notre disposition... Essayons de démontrer que M est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On peut le faire à la main, ou remarquer que l'application
$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \\ u \mapsto M_u \end{array} \right.$$

est linéaire : si $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda u + v) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda a + d \\ \lambda b + e \\ \lambda c + f \end{pmatrix}\right) = (\lambda a + d)\mathrm{I}_3 + (\lambda b + e)J + (\lambda c + f)J^2 = \lambda\varphi(u) + \varphi(v).$$

Ainsi, $M = \mathrm{Im}(\varphi)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Cet ensemble est stable par $\times$. En remarquant que $J^3 = \mathrm{I}_3$, on a, en prenant les mêmes notations que précédemment,

$$\begin{aligned} M_u \times M_v &= (a\mathrm{I}_3 + bJ + cJ^2) \times (d\mathrm{I}_3 + eJ + fJ^2) \\ &= (ad + bf + ce)\mathrm{I}_3 + (ae + bd + cf)J + (af + be + cd)J^2 \\ &= M_v \times M_u. \end{aligned}$$

Donc M est stable par produit, et $\times$ est commutative dans M.

4. J'ai d'abord commencé cette question en voulant résoudre un système : c'est un peu bête ! En effet, si l'on prend la matrice J, elle est diagonalisable, de polynôme caractéristique égal à

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 1,$$

donc J est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$ où $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. Donc J^2 est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}$.
Ainsi, M_u est semblable à

$$\begin{pmatrix} a + b + c & 0 & 0 \\ 0 & a + jb + j^2c & 0 \\ 0 & 0 & a + j^2b + jc \end{pmatrix}$$

Or, $a + jb + j^2c = a - \dfrac{1}{2}(b + c) + i\dfrac{sqrt3}{2}(b - c) = \alpha + i\beta$ et $a + j^2b + jc = a - \dfrac{1}{2}(b + c) - i\dfrac{sqrt3}{2}(b - c) = \alpha i\beta$.
Mais si U est un vecteur propre (complexe) associé à $\alpha - i\beta$, en posant $U = V + iW$, on remarque que $AU = AV + iAW = \alpha U - i\beta U = (\alpha V + \beta W)V + i(\alpha W - \beta V)$, d'où la forme de la matrice dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V, W\right)$!

5. Calculons le polynôme caractéristique de M_u ! Par déterminant par blocs, c'est

$$(X - (a + b + c)) \times \left(\left(X - a + \frac{1}{2}(b + c)\right)^2 + \frac{3}{4}(b - c)^2\right).$$

on remarque que le deuxième terme est irréductible sur $\mathbb{R}$, sauf si $b - c = 0$. Si $b = c$, alors la matrice est clairement diagonalisable.

6. On pose $P_m = X^3 - X^2 + m$, avec $m \in \{-0,1; 0; 0,1; 0,2\}$; tracer les courbes des différents polynômes P_m sur l'intervalle $[-1, \frac{3}{2}]$.

7. Trouver une C.N.S. sur m pour que P_m admette trois racines réelles.

 N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

8. Il faut que les colonnes de M_u soient de norme 1, i.e. que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. De plus, il faut que les colonnes soient orthogonales, i.e. que $ab + ca + bc = 0$.
Si c'est le cas, alors

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ca + bc) = 1$$

donc $a + b + c = \pm 1$. La réciproque est évidente.

Il y avait deux autres questions sur le sujet que j'ai trouvé, mais qui étaient décorrélées du reste

1. On pose $P_m = X^3 - X^2 + m$, avec $m \in \{-0,1; 0; 0,1; 0,2\}$; tracer les courbes des différents polynômes P_m sur l'intervalle $[-1, \frac{3}{2}]$.

2. Trouver une C.N.S. sur m pour que P_m admette trois racines réelles.

08014

{exo08014}

Exercice 4. *Centrale PSI 19*. (RMS 130 1039) On effectue des tirages dans une urne contenant initialement deux boules rouges et une boule noire. À chaque étape, on tire au hasard une boule dans l'urne, puis on la replace dans l'urne et on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur.
On note X_k la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée au k-ième tirage est rouge et 0 sinon.
On note S_n le nombre de boules rouges tirées après n tirages. On convient de poser $S_0 = 0$.

1. Écrire une fonction simulant n tirages et revoyant la liste `[S0,...,Sn]`.
2. Écrire une fonction renvoyant $\mathbb{E}(S_n)$ pour n allant de 0 à 20. Tracer la ligne brisée représentant $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que $S_n = k$.
4. Déterminer une relation entre $\mathbb{E}(S_{n+1})$ et $\mathbb{E}(S_n)$.
5. En déduire $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n.
6. Déterminer la loi de X_k.

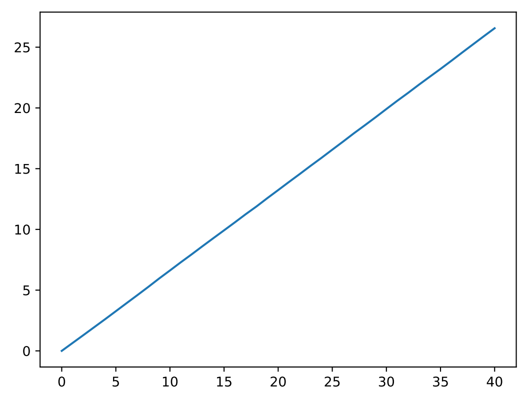
Correction

(RMS 130 1039)

1.
2. On propose

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd

def simu(n):
    L = [0,1,1] #0 = noire, 1 = rouge
    res = [0]
    for i in range(n):
        k = len(L)
        x = rd.randint(k)
        Sn = res[-1]+(L[x]==1)
        res.append(Sn)
        L.append(L[x])
    return res

def esp(n,M):
    L = np.zeros(n+1)
    for _ in range(M):
        L+=np.array(simu(n))
    return L/M

X = range(21)
Y = esp(20,1000)
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

On trouve quelque chose d'assez remarquable pour des simulations en probas : l'espérance a clairement l'air linéaire !



3. Si $S_n = k$, on a pioché k boules rouges et $n-k$ boules noires. Ainsi, l'urne contient $n+3$ boules, dont $k+2$ boules rouges et $n-k+1$ noires. Donc

$$\mathbb{P}_{S_n=k}(X_{n+1}=1) = \frac{k+2}{n+3} \text{ et } \mathbb{P}_{S_n=k}(X_{n+1}=1) = \frac{n-k+1}{n+3}.$$

4. On calcule

$$\mathbb{E}(S_{n+1}) = \mathbb{E}(S_n + X_{n+1}) = \mathbb{E}(S_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}).$$

Mais

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{P}(X_{n+1}=1) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_{S_n=k}(X_{n+1}=1)\mathbb{P}(S_n=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{n+3}\mathbb{P}(S_n=k) \\ &= \frac{1}{n+3}\left(\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(S_n=k) + 2\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n=k)\right) \\ &= \frac{1}{n+3}\mathbb{E}(S_n) + \frac{2}{n+3}\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}(S_{n+1}) = \frac{n+4}{n+3}\mathbb{E}(S_n) + \frac{2}{n+3}.$$

En faisant une simulation python, on remarque que les courbes coïncident vraiment très bien !

5. On aurait envie de dire que $\mathbb{E}(S_n)$ est linéaire en fonction de n (étant donnée la simulation). Essayons $\mathbb{E}(S_n) = \alpha n$! Alors $\mathbb{E}(S_{n+1}) = \dfrac{\alpha n(n+4)+2}{n+3}$. On veut $\mathbb{E}(S_{n+1}) = \alpha(n+1)$, donc nécessairement

$$\alpha(n+1)(n+3) = \alpha n(n+4) + 2,$$

i.e. $\alpha n^2 + 4\alpha n + 3\alpha = \alpha n^2 + 4n\alpha + 2$, donc $\alpha = \dfrac{2}{3}$.

On montre alors immédiatement par récurrence que $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{2}{3}n$.

6. On en déduit que X_n est une variable de Bernoulli de paramètre

$$\mathbb{P}(X_n=1) = \frac{1}{n+3}\mathbb{E}(S_n) + \frac{2}{n+3} = \frac{2n}{3(n+3)} + \frac{2}{n+3} = \frac{2n+6}{3(n+3)} = \frac{2}{3}.$$

14020

Exercice 5. *Centrale PSI 23*. On pose $J_n(x) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$.

1. Déterminer le domaine de définition D de J_n.
2. Calculer $J_n(x)$ pour tout $x \in D$.
3. On pose $u_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0,n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   (a) Déterminer $u(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t)$.
   (b) Tracer sous Python $u_n(t)$ pour $n \in \{2, 5, 10\}$ et $u(t)$ (on choisira une valeur de x).
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n u_n(t)\mathrm{d}t = \Gamma(x)$.
4. (a) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   (b) Démontrer que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.
   (c) Montrer que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Tracer la fonction Γ sous Python.
5. (a) Démontrer que $\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln(t))^k e^{-t}\, \mathrm{d}t$ est convergente pour $x \in D$ et $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur D et donner ses dérivées k-ièmes.
6. Montrer qu'il existe $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.
7. Tracer alors le tableau de variations de Γ.
8. Écrire en Python un script permettant de tracer les dérivées k-ièmes de Γ. Conjecturer les limites en 0 et en $+\infty$.
9. Donner les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction Γ et de $\Gamma^{(k)}$.

Correction

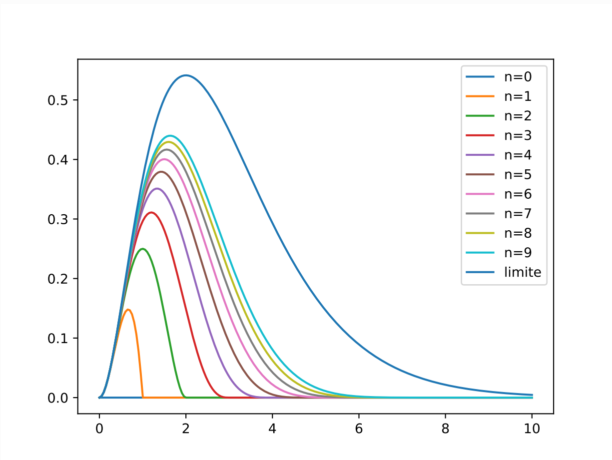
(exercice ultra-long et ultra-classique sur la fonction gamma) On pose $J_n(x) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$.

1. Par critère de convergence des intégrales de Riemann, $J_n(x)$ est convergente en 0 si, et seulement si $x > 0$.
2. Soit $x \in D$. Alors en faisant une intégration par parties (en dérivant $(1-u)^n$ et en intégrant u^{x-1}, et comme les valeurs aux bornes sont nulles (en intégrant u^{x-1} on a du u^x, nul en 0), on obtient
$$J_n(x) = \frac{n}{x}J_{n-1}(x+1) = \frac{n(n-1)}{x(x+1)}J_{n-2}(x+2) = \cdots = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}J_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$
3. (a) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Pour n assez grand, $t \in [0,n]$, donc
$$u_n(t) = t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = t^{x-1}e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t^{x-1}e^{-t}.$$
   (b) C'est une question utile en fait : elle sert pour la convergence dominée de la suite. On propose

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def un(n,t,x):
    if t<n:
        return t**(x-1)*(1-t/n)**n
    else:
        return 0

def u(t,x):
    return t**(x-1)*np.exp(-t)

x=3

T = np.linspace(0,10,200)

for n in range(10):
    Un = [un(n,t,x) for t in T]
    s = 'n='+str(n)
    plt.plot(T,Un,label=s)

U = [u(t,x) for t in T]
plt.plot(T,U,label='limite')
plt.legend()
plt.show()
```

et on obtient



On voit que $u_n(t) \leqslant u(t)$.

(c) Il s'agit d'appliquer proprement un théorème de convergence dominée. Soit $x > 0$. Alors

- pour tout n, $t \mapsto u_n(t)$ est continue par morceaux,
- pour tout t dans $\mathbb{R}_+^*$, $u_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$,
- pour tout t dans $\mathbb{R}_+^*$, grâce à l'inégalité $In(1+h) \leqslant h$,

$$u_n(t) = t^{x-1}e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leqslant t^{x-1}e^{-n\frac{t}{n}} = u(t),$$

intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et indépendante de n.

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, $\int_0^n u_n(t)dt = \int_0^{+\infty} u_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \Gamma(x)$.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On fait, dans $\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, une IPP en intégrant t^{x-1} et en dérivant e^{-t}. On obtient le résultat.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors par le changement de variables $s = \frac{t}{n}$, on obtient

$$\int_0^n u_n(t)dt = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^1 (ns)^{x-1}(1-s)^n nds = n^x J_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

D'où le résultat !

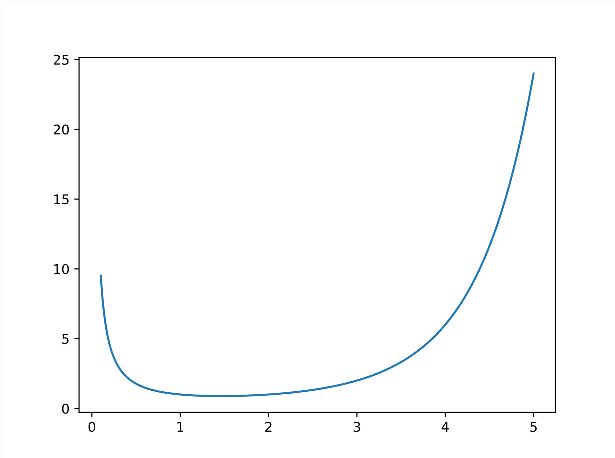
(c) On peut utiliser l'une des deux questions précédentes. Par récurrence immédiate,

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!$$

(d) On propose

```python
def gamma(x):
    def f(t):
        return t**(x-1)*np.exp(-t)
    return integr.quad(f,0,np.inf)[0]

X = np.linspace(0.1,5,200)
plt.plot(X,[gamma(x) for x in X])
plt.show()
```

On obtient



5. (a) Soit $x \in D$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $a > 0$, $\ln(t)^k \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^a}\right)$. Ainsi, si on prend $a = \frac{x}{2}$, on a

$$t^{x-1}\ln(t)^k e^{-t} = t^a e^{-t} t^{a-1} e^{-t} \underset{t\to 0}{=} o(t^{a-1}),$$

intégrable en 0. De même, on écrit que

$$t^{x-1}\ln(t)^k e^{-t} = \left(e^{-\frac{t}{2}} t^{x-1}\ln(t)^k\right) e^{-\frac{t}{2}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{t}{2}}\right),$$

intégrable en $+\infty$. D'où le résultat !

(b) Il s'agit d'un théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$ des intégrales à paramètres. On dit que

- pour tout x, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et intégrable,
- pour tout t, $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est $\mathscr{C}^\infty$, de dérivée k-ième $t \mapsto \ln(t)^k t^{x-1}e^{-t}$, fonction aussi continue et intégrable,
- (problème de la domination qui doit être locale) **soit** $a > 0$. Alors, si $x \in [a, +\infty[$,

$$|\ln(t)t^{x-1}e^{-t}| \leqslant |\ln(t)^k t^{a-1} e^{-t}|,$$

fonction continue, intégrable, indépendante de x.

Donc, par le théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$ des intégrales à paramètres, Γ est dérivable sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. On remarque que $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$. Comme Γ est continue sur $[1, 2]$, dérivable sur $]1, 2[$, par le théorème de Rolle, il existe $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.

7. Soit $x < c$. Alors

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^1 \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Or, pour $t \in]0,1[$, $\ln(t) < 0$ et $t^{x-1} > t^{c-1}$ donc

$$\int_0^1 \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt < \int_0^1 \ln(t)t^{c-1}e^{-t}dt.$$

De même, pour $t \geqslant 1$, $\ln(t) \geqslant 0$ et $t^{x-1} \leqslant t^{c-1}$ donc

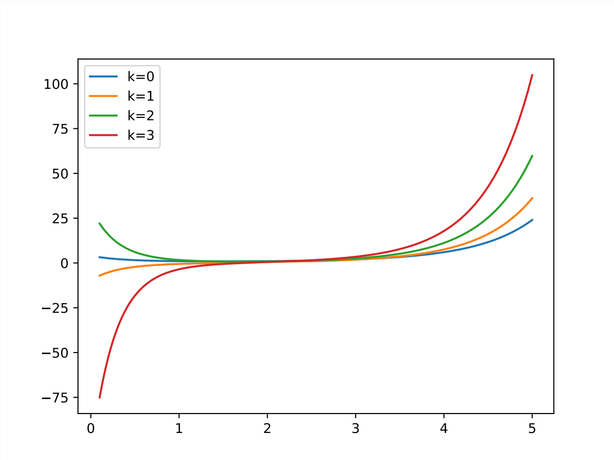
$$\int_1^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt \leqslant \int_1^{+\infty} \ln(t)t^{c-1}e^{-t}dt,$$

donc $\Gamma(x) \leqslant \Gamma(c) \leqslant 0$, donc Γ décroît sur $]0,c]$. De même, Γ croît sur $[c,+\infty[$.

8. On propose

```
def gamma(k,x):
    def f(t):
        return np.log(t)**k*t**(x-1)*np.exp(-t)
    return integr.quad(f,0.01,np.inf)[0]

X = np.linspace(0.1,5,200)
for k in range(4):
    s = 'k='+str(k)
    plt.plot(X,[gamma(k,x) for x in X],label = s)
plt.legend()
plt.show()
```

On obtient



9. On a l'impression que $\Gamma^{(k)}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que $\Gamma^{(k)}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \operatorname{sgn}(k)\times\infty$. Montrons-le : déjà, on note

$$f(x) = \int_0^1 \ln(t)^k t^{x-1}e^{-t}dt \text{ et } g(x) = \int_1^{+\infty} \ln(t)^k t^{x-1}e^{-t}dt$$

- limite en $+\infty$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors
  — $t \mapsto \ln(t)^k t^{x-1}e^{-t}$ est continue.
  — pour tout $t < 1$, $\ln(t)^k t^{x-1}e^{-t} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  — pour $x \geqslant 1$, $|\ln(t)^k t^{x-1}e^{-t}| \leqslant |\ln(t)|^k e^{-t}$, intégrable en 0.

  Par théorème de la double limite, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On montre de même que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc que $\Gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

- limite en 0. Là, le problème est qu'on ne peut pas faire de domination uniforme, donc le théorème de la double limite ne s'applique pas. Cependant, pour tout $t \geqslant 1$, pour tout $x \leqslant 1$, $0 \leqslant \ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \leqslant \ln(t)\mathrm{e}^{-t}$ donc g est bornée au voisinage de 0. On se focalise donc sur f. On remarque simplement que :
  - si k est pair, pour tout $t \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $0 \leqslant t^{x-1}\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant \ln(t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$, donc $g(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}}dt = \frac{1}{x\mathrm{e}} \underset{x\to 0\to +}{\longrightarrow} \infty$.
  - si k est impair, on fait de même, mais en faisant attention au sens des inégalités !

12051

{exo12051}

Exercice 6. *Centrale PSI 19*. (RMS 130 993) Soit n un entier naturel. On considère la matrice $A_{n+1} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $a_{j-1,j} = j-1$, $a_{j+1,j} = n+1-j$ pour tout j et dont tous les autres coefficients sont nuls.

1. Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie A_{n+1}.
2. Déterminer avec Python les valeurs propres de A_{n+1}. Que peut-on conjecturer ?
3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ canoniquement associé à la matrice A_{n+1}. Montrer qu'il existe un polynôme Q ne dépendant pas de n tel que pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = QP' + nXP$.
4. En déduire les éléments propres de u.
5. La matrice A_{n+1} est-elle diagonalisable ?

Correction

(RMS 130 993) Soit n un entier naturel. On considère la matrice $A_{n+1} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $a_{j-1,j} = j-1$, $a_{j+1,j} = n+1-j$ pour tout j et dont tous les autres coefficients sont nuls.

1. On propose

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

def A(n):
    res = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        if i>0:
            res[i-1,i] = i
        if i<n-1:
            res[i+1,i]=n-i-1
    return res

for n in range(1,5):
    print(alg.eigvals(A(n)))
```

Objectivement, le fait que la matrice soit décrite avec $n+1$, et que les tableaux python commencent à 0, est un problème : j'ai dû m'y prendre à 2 fois.

2. On obtient

```
[0.]
[ 1. -1.]
[-2.00000000e+00 -1.73255507e-16  2.00000000e+00]
[-3. -1.  3.  1.]
```

La matrice semble être diagonalisable (valeurs propres deux à deux distinctes), et, si λ est valeur propre, $-\lambda$ semble aussi l'être.

3. Soit j dans $[\![0, n]\!]$. Alors $u(1) = nX$, $u(X^n) = nX^{n-1}$.

$$u(X^j) = jX^{j-1} + (n-j)X^{j+1} = jX^{j-1}(1-X^2) + nX.X^j = Q(X) \times (X^j)' + nX(X^j),$$

avec $Q = 1 - X^2$.
D'où le résultat, par linéarité !

4. On recherche alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et P non nul tels que $u(P) = \lambda P$, i.e.

$$(1-X^2)P' + nXP = \lambda P,$$

donc
$$P' - \frac{nX-\lambda}{X^2-1}P = 0,$$
donc $P : x \mapsto \alpha.\exp(A(x))$, où A est une primitive de $x \mapsto \dfrac{nx-\lambda}{x^2-1} = \dfrac{n-\lambda}{2(x-1)} + \dfrac{n+\lambda}{2(x+1)}$, i.e. $\dfrac{n-\lambda}{2}\ln(|x-1|) + \dfrac{n+\lambda}{2}\ln|x+1|$ donc
$$P : x \mapsto \alpha|x-1|^{\frac{n-\lambda}{2}} + \alpha|x+1|^{\frac{n+\lambda}{2}}.$$
Afin que P soit un polynôme, il faut que $\dfrac{n-\lambda}{2}$ et $\dfrac{n+\lambda}{2}$ soient des entiers, pairs, entre 0 et n. Ainsi, λ doit être égal à $\{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}$. Réciproquement, de tels λ fonctionnent.
Et Python corrobore nos résultats !

5. La matrice est donc diagonalisable : elle a n valeurs propres distinctes !

08015

{exo08015}

Exercice 7. *Centrale PSI 21*. (RMS 1035) On dispose de n urnes $U_1, \dots, U_n$ et n boules numérotées de 1 à n, que l'on place indépendamment dans les urnes, chaque boule ayant la probabilité $\frac{1}{n}$ d'être placée dans l'urne U_i pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$. On note X_n le nombre d'urnes vides après le placement des n boules.

1. Écrire une fonction Python `different` qui prend une liste `L` et qui renvoie le nombre d'éléments distincts de `L`. Par exemple, `different([1,2,3,1,2])` renvoie 3 .
2. Écrire une fonction Python `simulX` qui prend un entier n et renvoie une simulation de X_n.
3. Écrire une fonction Python `esperanceX` qui prend en entrée un entier n et renvoie une valeur approchée de $E(X_n)$. Tracer $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n pour $n \in [\![1, 15]\!]$. Que peut-on conjecturer ? Faire de même pour la variance.
4. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire valant 1 si l'urne U_i est vide, 0 sinon. Déterminer la loi de Y_i, son espérance et sa variance. Vers quoi tendent l'espérance et la variance quand n tend vers $+\infty$?
5. Montrer que $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Est-ce que la loi de X_n est binomiale ?
6. Calculer l'espérance de X_n.
7. Calculer la covariance de Y_i et Y_j pour $i \neq j$. En déduire la variance de X_n. En donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$.

Correction

(RMS 1035) On dispose de n urnes $U_1, \dots, U_n$ et n boules numérotées de 1 à n, que l'on place indépendamment dans les urnes, chaque boule ayant la probabilité $\frac{1}{n}$ d'être placée dans l'urne U_i pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$. On note X_n le nombre d'urnes vides après le placement des n boules.

1. On propose

```python
def different(L):
    listelt = []
    for x in L:
        if x not in listelt:
            listelt.append(x)
    return len(listelt)
```

2. On propose alors

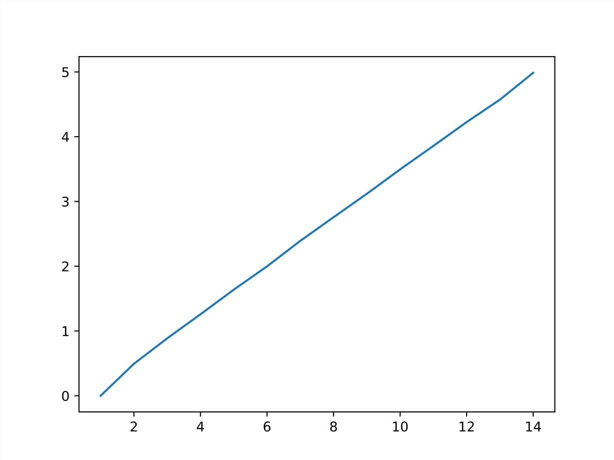
```python
def simulx(n):
    L = []
    for i in range(n):
        L.append(rd.randint(1,n+1))
    return n-different(L)
```

3. On propose

```python
def esperance(n,N):
    res = 0
    for _ in range(N):
        res += simulx(n)
    return res/N

N = list(range(1,15))
E = [esperance(n,10000) for n in N]
```

```python

plt.plot(N,E)
plt.show()
```

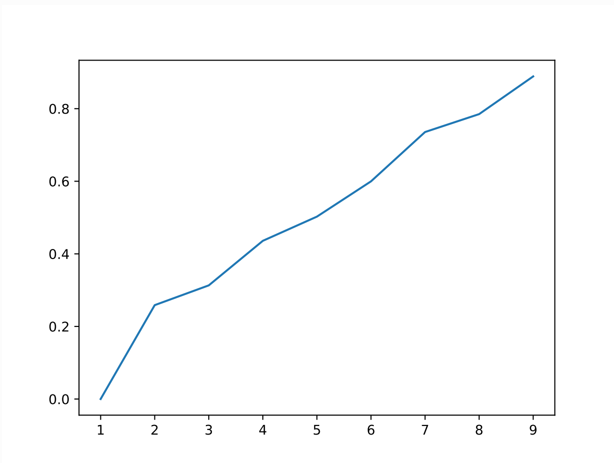
On obtient



L'espérance a l'air linéaire en fonction de n.
Pour la variance, c'est différent.

```python
def variance(n,N):
    res1 = 0
    res2 = 0
    for _ in range(N):
        res1 += simulx(n)**2
        res2 += simulx(n)
    return res1/N - (res2/N)**2

N = list(range(1,10))
V = [variance(n,20000) for n in N]

plt.plot(N,V)
plt.show()
```

On obtient



 N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

On a vaguement quelque chose de linéaire... c'est moins clair !

4. Déjà, Y_i est à valeurs dans $\{0,1\}$, donc c'est une variable de Bernoulli. Ensuite, si on note B_k l'urne de la boule k,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_i=1) &= \mathbb{P}(B_1 \neq i, B_2 \neq i, \ldots, B_n \neq i)\\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k \neq i) \text{ par indépendance}\\ &= \mathbb{P}(B_1 \neq i)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\end{aligned}$$

Donc $Y_i \sim \mathcal{B}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(Y_i) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{e}} \text{ et } \mathbb{V}(Y_i) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

5. X_n est le nombre d'urnes vides, donc $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. La loi de X_N n'a aucune chance d'être binomiale, car les variables $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ne sont pas indépendantes. En particulier, $\mathbb{P}(X_n = n) = 0$... (il est impossible que toutes les urnes soient vides !)

6. L'espérance est linéaire, donc

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n,$$

ce qui explique son côté quasi-linéaire !

7. Là, on écrit que

$$\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathbb{E}(Y_iY_j) - \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_j).$$

Or, Y_iY_j est aussi une variable de Bernoulli ! Et

$$\mathbb{P}(Y_iY_j=1) = \mathbb{P}(Y_i=1, Y_j=1) = \mathbb{P}(B_1 \notin \{i,j\}, \ldots, B_n \notin \{i,j\}) = \mathbb{P}(B_1 \notin \{i,j\})^n = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n.$$

Ainsi,

$$\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_n) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i) + \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} \operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)\\ &= n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) + n(n-1)\left[\left(1-\frac{2}{n}\right)^n - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}\right].\end{aligned}$$

On remarque que quand n tend vers $+\infty$,

$$n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) = n\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) + o(n) \underset{n\to+\infty}{=} n\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + o(n)$$

puis

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} &= \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)}-\mathrm{e}^{2n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}\\ &= \mathrm{e}^{n\left(-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}-\mathrm{e}^{2n\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\\ &= \mathrm{e}^{-2-\frac{2}{n}+o\left(\frac{2}{n}\right)}-\mathrm{e}^{-2-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\\ &= \mathrm{e}^{-2}\left(-\mathrm{e}^{\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\mathrm{e}^{-2}\frac{1}{n},\end{aligned}$$

Ainsi,

$$n(n-1)\left[\left(1-\frac{2}{n}\right)^n-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}\right]\underset{n\to+\infty}{=}-n\mathrm{e}^{-2}+o(n),$$

donc

$$\mathbb{V}(X_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}n\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$$

08016

{exo18016}

Exercice 8. *Centrale PSI 22*. (RMS 2022-2023 1128) Considérons une urne comportant initialement une boule rouge et une boule bleue. Chaque boule tirée est remise dans l'urne avec une boule supplémentaire de la même couleur. Soient X_n et Y_n les variables aléatoires égales aux nombres de boules rouges et bleues après le n-ième tirage. (si $n = 0$, on considère la situation initiale, avec une boule rouge, une boule bleue)
On pose, pour $u, v \in \mathbb{R}$, $P_n(u, v) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X_n = i, Y_n = j)\, u^i v^j$.

1. Écrire une fonction Python `simulation` qui prend une argument entier n, qui simule n tirages et renvoie le nombre de boules rouges à l'issue du n-ième tirage.
2. Écrire une fonction Python `moyenne` qui prend en argument deux entiers n et N, qui simule N fois une expérience de n tirages et renvoie une liste où le terme d'indice i est la moyenne du nombre d'expériences se terminant avec i boules rouges. Que remarque-t-on, en testant avec $N = 10000$ et n prenant plusieurs valeurs ?
3. Soient $n \in \mathbb{N}$, i et $j \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\mathbb{P}(X_{n+1} = i, Y_{n+1} = j)$ en fonction des probabilités $\mathbb{P}(X_n = i - 1, Y_n = j)$ et $\mathbb{P}(X_n = i, Y_n = j - 1)$.
4. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(u, v) = \dfrac{1}{n+2}\left(u^2 \dfrac{\partial P_n}{\partial u}(u, v) + v^2 \dfrac{\partial P_n}{\partial v}(u, v)\right)$
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(u, v) = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^{k+1} v^{n+1-k}$. Est-ce en adéquation avec la première question ?
6. Modifier la fonction `simulation` afin qu'elle renvoie 1 si la dernière boule tirée est rouge. Modifier la fonction `moyenne` afin qu'elle renvoie le nombre moyen de tirages se terminant par une boule rouge. Commenter.

Correction

1.
2. On propose, pour les deux premières questions,

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def compte(x,L):
    res = 0
    for elt in L:
        if elt == x:
            res += 1
    return res

def simulation(n):
    L = [0,1] #0 représente rouge, 1 bleu
    for k in range(n):
        r = rd.randint(0,len(L))
        L.append(L[r])
    return compte(0,L)

def moyenne(n,N):
    L = [0 for k in range(n+2)]
    for k in range(N):
        x = simulation(n)
```

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

```
            L[x]+=1
    return [x/N for x in L]
```

On obtient, par exemple

```
>>> moyenne(2,10000)
[0.0, 0.3388, 0.3263, 0.3349]

>>> moyenne(3,10000)
[0.0, 0.2444, 0.2562, 0.2502, 0.2492]

>>> moyenne(4,10000)
[0.0, 0.1994, 0.1999, 0.1999, 0.2029, 0.1979]
```

On a l'impression que la loi est uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

3. On utilise la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i, Y_{n+1} = j)$$
$$= \mathbb{P}_{X_n=i-1,Y_n=j}(X_{n+1} = i, Y_{n+1} = j)\mathbb{P}(X_n = i-1, Y_n = j) + \mathbb{P}_{X_n=i,Y_n=j-1}(X_{n+1} = i, Y_{n+1} = j)\mathbb{P}(X_n = i, Y_n = j-1)$$

En effet,

$$\mathbb{P}_{X_n=k,Y_n=\ell}(X_{n+1} = i, Y_{n+1} = j) = 0 \text{ si } (k, \ell) \notin \{(i-1, j), (i, j-1)\}.$$

De plus,

$$\mathbb{P}_{X_n=i-1,Y_n=j}(X_{n+1} = i, Y_{n+1} = j) = \frac{i-1}{i+j-1}$$
$$\mathbb{P}_{X_n=i,Y_n=j-1}(X_{n+1} = i, Y_{n+1} = j) = \frac{j-1}{i+j-1}.$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i, Y_{n+1} = j) = \frac{i-1}{i+j-1}\mathbb{P}(X_n = i-1, Y_n = j) + \frac{j-1}{i+j-1}\mathbb{P}(X_n = i, Y_n = j-1).$$

4. Déjà, il faut **absolument** commencer par simplifier cette horrible expression ! En effet, après le n-ième tirage, il y a toujours $n+2$ boules dans l'urne ! Ainsi, à n fixé, $\mathbb{P}(X_n = i, Y_n = j)$ est éventuellement non nul seulement si $1 \leqslant i \leqslant n+1$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$ et $i + j = n + 2$. Ainsi,

$$P_n(u, v) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(X_n = i, Y_n = n+2-i)u^i v^{n+2-i}.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

On en déduit donc que

$$
\begin{aligned}
&P_{n+1}(u,v)\\
&=\sum_{i=1}^{n+2}\mathbb{P}(X_{n+1}=i,Y_{n+1}=n+3-i)u^iv^{n+3-i}\\
&=\sum_{i=1}^{n+2}\frac{i-1}{n+2}\mathbb{P}(X_n=i-1,Y_n=n+3-i)u^iv^{n+3-i}+\frac{j-1}{n+2}\mathbb{P}(X_n=i,Y_n=n+2-i)u^iv^{n+3-i}\\
&=\sum_{i=1}^{n+2}\frac{i-1}{n+2}\mathbb{P}(X_n=i-1,Y_n=n+3-i)u^iv^{n+3-i}+\sum_{i=1}^{n+2}\frac{j-1}{n+2}\mathbb{P}(X_n=i,Y_n=n+2-i)u^iv^{n+3-i}\\
&=\sum_{i=2}^{n+2}\frac{i-1}{n+2}\mathbb{P}(X_n=i-1,Y_n=n+3-i)u^iv^{n+3-i}+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{n+2-i}{n+2}\mathbb{P}(X_n=i,Y_n=n+2-i)u^iv^{n+3-i}\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{n+2}\mathbb{P}(X_n=k,Y_n=n+2-k)u^{k+1}v^{n+2-k}+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{n+2-i}{n+2}\mathbb{P}(X_n=i,Y_n=n+2-i)u^iv^{n+3-i}\\
&=\frac{u^2}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(X_n=k,Y_n=n+2-k)ku^{k-1}v^{n+2-k}+\frac{v^2}{n+2}\sum_{i=1}^{n+1}\mathbb{P}(X_n=i,Y_n=n+2-i)u^i(n+2-i)v^{n+1-i}\\
&=\frac{u^2}{n+2}\frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v)+\frac{v^2}{n+2}\frac{\partial P_n}{\partial v}(u,v).
\end{aligned}
$$

5. On montre par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P_n(u,v)=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u^{k+1}v^{n+1-k}$.

L'initialisation est claire : pour $n=0$, le seul couple (i,j) tel que $\mathbb{P}(X_0=i,Y_0=j)\neq 0$ est $(i,j)=(1,1)$. Ainsi, $P_0(u,v)=uv$, ce qui est cohérent.
Pour l'**hérédité**, soit $n\in\mathbb{N}$ tel que la propriété est vraie. Alors

$$P_n(u,v)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u^{k+1}v^{n+1-k}.$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
P_{n+1}(u,v)&=\frac{u^2}{n+2}\frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v)+\frac{v^2}{n+2}\frac{\partial P_n}{\partial v}(u,v)\\
&=\frac{u^2}{n+2}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(k+1)u^kv^{n+1-k}+\frac{v^2}{n+2}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u^{k+1}(n+1-k)v^{n-k}\\
&=\frac{u^2}{n+2}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}ku^{k-1}v^{n+2-k}+\frac{v^2}{n+2}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u^{k+1}(n+1-k)v^{n-k}\\
&=\frac{u^2}{n+2}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}ku^{k-1}v^{n+2-k}+\frac{v^2}{n+2}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}u^{k+1}(n+1-k)v^{n-k}\\
&=\frac{1}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{n+1}(k+n+1-k)u^{k+1}v^{n+2-k}=\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1}u^{k+1}v^{n+2-k},
\end{aligned}
$$

d'où l'hérédité et le résultat ! Ceci signifie donc que pour tout k dans $[\![1,n+1]\!]$, $\mathbb{P}(X_n=k,Y_n=n+1-k)=\dfrac{1}{n+1}$. Mais comme $\{X_n=k\}=\{Y_n=n+1-k\}$, on en déduit que $\mathbb{P}(X_n=k)=\dfrac{1}{n+1}$. En d'autres termes, $X_n\sim\mathcal{U}([\![1,n+1]\!])$.

6. On propose

```
def simulation2(n):
    L = [0,1] #0 représente rouge, 1 bleu
    for k in range(n):
        r = rd.randint(0,len(L))
        L.append(L[r])
    return L[-1]==0

def moyenne2(n,N):
    res = 0
    for k in range(N):
        res += simulation2(n)
    return res/N
```

On obtient

```
>>> moyenne2(3,10000)
0.4955

>>> moyenne2(4,10000)
0.5038

>>> moyenne2(5,10000)
0.4943

>>> moyenne2(13,10000)
0.5061
```

On en déduit que si D_n est l'indicatrice de l'événement « la dernière boule tirée est rouge » , alors $D_n \sim \mathscr{B}(1/2)$. On peut le démontrer grâce à la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_n = 1) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_{X_{n-1}=k}(D_n = 1)\mathbb{P}(X_{n-1} = k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n} k\\ &= \frac{1}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

17037

{exo17037}

Exercice 9. *Centrale PSI 22*. (RMS 2022/2023 1099)

1. Écrire une fonction Python qui prend un entier n et renvoie une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à coefficients aléatoires dans $[0,1[$. Calculer les valeurs propres et des vecteurs propres de quelques-unes de ses matrices. Que peut-on conjecturer sur le signe de la valeur propre maximale ? Sur le signe des coordonnées d'un vecteur propre associé ?

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres et α leur maximum. Soit $\Phi : X \longmapsto \langle X, MX\rangle$

2. Justifier l'existence de α. Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\Phi(X) \leqslant \alpha\|X\|^2$ et qu'il y a égalité si et seulement si X appartient au sous-espace propre de M associé à α.
3. Soit $C = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) ; \|X\| = 1 \text{ et } \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \geqslant 0 \right\}$. Montrer que Φ est bornée sur C et admet un maximum $\mu \leqslant \alpha$.
4. Soient X un vecteur propre unitaire de M associé à α et $W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les composantes sont les valeurs absolues des composantes de X. Montrer que $W \in C$ et en déduire que $\mu \geqslant |\alpha|$.
5. Conclure que $\alpha \geqslant 0$ puis que M admet un vecteur propre positif et unitaire associé à α.
6. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_j| \leqslant \alpha$.

Correction

1. Pour le coup, c'est presque une fausse planche python. Ici, il n'y a presque rien à faire, c'est donc scandaleux si vous ne faites rien ! Je propose

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
import numpy.random as rd


def matal(n):
    res = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(i+1):
            x = rd.random()
            res[i,j] = x
            res[j,i] = x
    return res

n=3
A = matal(n)
L,V = alg.eig(A)
print(L)
print(V)
```

On obtient, en faisant tourner quelques fois le programme, des choses comme ça :

```
>>> (executing cell "" (line 1 of "2022-PSI-Centrale-02-python.py"))
[ 1.42585277  0.47535392 -0.6207192 ]
[[ 0.15957033  0.98346864 -0.08559642]
 [ 0.74473708 -0.17684276 -0.64350084]
 [ 0.648      -0.03893682  0.76064442]]
```

```

>>> (executing cell "" (line 1 of "2022-PSI-Centrale-02-python.py"))
[ 1.65890221  0.62628409 -0.38440796]
[[-0.50940758 -0.74690833 -0.42735449]
 [-0.63377719  0.66157571 -0.40080425]
 [-0.58209139 -0.0666748   0.81038515]]

>>> (executing cell "" (line 1 of "2022-PSI-Centrale-02-python.py"))
[ 2.23156908 -0.50429237  0.33004413]
[[ 0.58024481  0.79629274 -0.17097903]
 [ 0.54934101 -0.53764239 -0.63966016]
 [ 0.60128231 -0.27723369  0.74940047]]
```

Que peut-on en dire ? On a l'impression que la plus grande valeur propre est toujours strictement positive, toujours strictement supérieure à 1 même, et que le vecteur propre associé a trois coordonnées de même signe (donc on peut le choisir positif).

2. Le maximum de n nombres existe toujours, donc α existe. Soit désormais $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. M est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormée. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ une telle base. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ n réels tels que $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Alors

$$\begin{aligned}
\Phi(X) &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i M e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i \right\rangle \quad = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \text{ car la base } (e_1, \dots, e_n) \text{ est orthonormée.} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i^2 \leqslant \alpha \|X\|^2 .
\end{aligned}$$

De plus, l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\alpha - \lambda_i)}_{\geqslant 0} x_i^2 = 0$, i.e. si et seulement si pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $(\alpha - \lambda_i)x_i^2 = 0$, i.e. ou bien $\lambda_i = \alpha$, ou bien $x_i = 0$, i.e. si et seulement si X est dans le sous-espace propre associé à α (il n'a des composantes non nulles que sur les e_i vérifiant $\lambda_i = \alpha$).

3. La partie C est une partie fermée, car c'est une intersection finie de fermés :

- la sphère unité S est fermée comme image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $X \mapsto \|X\|$,
- si i est fixé, la partie $A_i = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ x_i \geqslant 0 \right\}$ est fermée comme image réciproque de $\mathbb{R}_+$ par l'application continue $X \mapsto X_i$.

Ainsi, $C = A \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ est un fermé. De plus C est bornée car pour tout X dans C, $\|X\| = 1$. L'application Φ, continue (comme composée d'applications continues) sur le fermé borné C, est donc bornée sur C et y admet un maximum μ. Mais pour tout X dans C, $\Phi(X) \leqslant \alpha \|X\|^2 = \alpha$, donc $\mu \leqslant \alpha$.

4. On note $(x_1, \dots, x_n)$ les composantes de X et $(w_1, \dots, w_n)$ celles de W. Alors pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $w_i = |x_i| \geqslant 0$, et $\|W\|^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Ainsi, $W \in C$.

Mais

$$\Phi(W) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i^2 = \alpha \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ \lambda_i = \alpha}} w_i^2.$$

Donc $\alpha \leqslant \mu$. Mais, de plus,

$$\Phi(W) = \sum_{i=1}^{n} [MW]_i w_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{[M]_{ij}}_{\geqslant 0} w_j w_i \geqslant 0.$$

Donc $\alpha \geqslant 0$, donc on a bien $|\alpha| \leqslant \mu$.

5. On a déjà montré que $\alpha \geqslant 0$. Il reste à démontrer que W est bien un vecteur propre associé à α. Ceci est évident car $\Phi(W) = \alpha \|W\|^2$, donc, d'après ce que l'on a établi précédemment, W est un vecteur propre associé à α.
On n'avait vraiment pas besoin de C, mais si on veut l'utiliser, voilà : on a démontré que $\mu = \alpha$. Ainsi on dispose de Y à coordonnées positives tel que $\Phi(Y) = \alpha \|Y\|^2$ donc, par la question 2, Y est vecteur propre associé à α à coordonnées positives...

6. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_i, de norme 1. Alors $\Phi(Y) = \lambda_i$. Mais alors

$$\begin{aligned}
|\lambda_i| &= |\Phi(Y)| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [M]_{ij} y_i y_j \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [M]_{ij} |y_i||y_j| \text{ car } M \text{ est à coefficients positifs.} \\
&\leqslant \Phi(Z), \text{ où } Z \text{ est le vecteur des valeurs absolues des coordonnées de } Y. \\
&\leqslant \alpha \|Z\|^2 = \alpha,
\end{aligned}$$

d'où le résultat désiré !

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

20007

{exo20007}

Exercice 10. *Centrale PSI 22*. (RMS 2022/2023 1117) On munit l'espace E des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues et bornées de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in E$, on pose $\Phi(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} \text{Arctan}(xt)\frac{f(t)}{1+t^2}dt$

1. Montrer que Φ défini sur E, et que c'est un endomorphisme continu de E.
2. Soit g l'image par Φ de la fonction constante égale à 1 . Avec Python, tracer g sur le segment $[0, 1000]$ et émettre une conjecture sur la limite de g.
3. Calculer la limite de g en $+\infty$.
4. Étudier la dérivabilité de g et calculer sa dérivée.
5. Calculer $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$. On pourra utiliser Python pour intuiter le résultat.

Correction

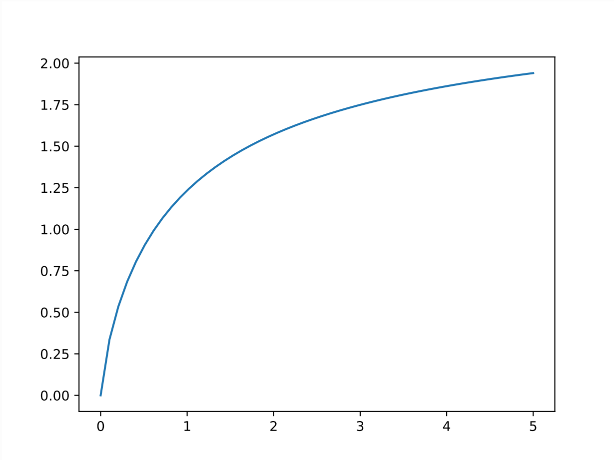
(RMS 2022/2023 1117) On munit l'espace E des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues et bornées de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in E$, on pose $\Phi(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} \text{Arctan}(xt)\frac{f(t)}{1+t^2}dt$

1. Déjà, Φ est clairement linéaire (si elle est définie). Ensuite, on montre en même temps que Φ est un définie, à valeurs dans E et qu'il est continu. Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout t dans $\mathbb{R}$,
$$\left|\text{Arctan}(xt)\frac{f(t)}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{\|f\|_\infty}{1+t^2}.$$
Ainsi :
   - $t \mapsto \text{Arctan}(xt)\frac{f(t)}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
   - En intégrant, on obtient que pour tout x dans $\mathbb{R}$,
   $$|\Phi(f)(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{\|f\|_\infty}{1+t^2}dt = \|f\|_\infty$$
   Donc $\Phi(f)$ est bornée sur $\mathbb{R}$
   - de plus, pour tout t, $x \mapsto \text{Arctan}(xt)\frac{f(t)}{1+t^2}$ est continue et pour tous t et x, on a borné $\mapsto \text{Arctan}(xt)\frac{f(t)}{1+t^2}$ par une fonction intégrable, indépendante de x. Donc par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, $\Phi(f)$ est continue.
   - Φ est donc un endomorphisme et on a montré que pour toute fonction f, $\|\Phi(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Donc Φ est continu.
2. On propose

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integr

def Phi(x):
    def f(t):
        return np.arctan(x*t)/(1+t**2)
    return integr.quad(f,0,np.inf)[0]

X = np.linspace(0,5)
Y = [Phi(x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

On obtient



On a l'impression que la fonction converge en $+\infty$.

3. On veut appliquer un théorème de convergence dominée à paramètre continu. On note $f(x,t) = \dfrac{\text{Arctan}(tx)}{1+t^2}$. Alors

- pour tout x, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable,
- pour tout t, $f(x,t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{1+t^2}$.
- pour tous t et x, $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{1+t^2}$, intégrable et indépendante de x.

Donc, par le théorème de convergence dominée de paramètre continu,

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

4. Allez, on fait (encore !) un théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- pour tout x, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{(1+(tx)^2)(1+t^2)}$.
- si $a < b$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$, alors pour tout x dans $[a,b]$, pour tout t dans $\mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{t}{(1+(tx)^2)(1+t^2)}\right| \leqslant \frac{t}{(1+(ta)^2)(1+t^2)},$$

  intégrable et indépendant de x.

Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, on en déduit que g est dérivable sur $[a,b]$. Comme a et b ont été choisis de manière quelconque, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+(xt)^2)(1+t^2)}dt.$$

Pour déterminer la dérivabilité en 0, écrivons un taux d'accroissement :

$$\frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{xt}\frac{t}{1+t^2}dt.$$

L'idée est de dire que pour x très petit, $\dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{xt}$ est presque 1, donc g est presque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,dt = +\infty$.

Pour bien écrire les choses, on remarque que si $s \leqslant 1$, $\dfrac{\operatorname{Arctan}(s)}{s} \geqslant \dfrac{\pi}{4} \geqslant 1$.

On fixe $x > 0$. Alors si $t \leqslant \dfrac{1}{x}$, $tx \leqslant 1$. Donc

$$g(x) \geqslant \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{tx}\frac{t}{1+t^2}\,dt \geqslant \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty.$$

Ainsi, g n'est pas dérivable en 0 !

5. En traçant le graphe, on a l'impression que $g(x) + g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi^2}{4}$. Le plus simple, à mon avis, est de poser $h(x) = g(x) + g\left(\dfrac{1}{x}\right)$, et d'écrire, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x) - \frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+(xt)^2)(1+t^2)}\,dt - \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+\left(\frac{t}{x}\right)^2)(1+t^2)}\,dt. \end{aligned}$$

Dans la deuxième intégrale, on pose $s = \dfrac{t}{x}$. Alors on obtient

$$\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+\left(\frac{t}{x}\right)^2)(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{sx}{(1+s^2)(1+(sx)^2)}x\,ds = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+(xt)^2)(1+t^2)}\,dt.$$

On en déduit que $h'(x) = 0$, donc h est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc égal à sa limite en $+\infty$, égale à $\dfrac{\pi^2}{4}$. Calculer $g(x) + g(1x)$. On pourra utiliser Python pour intuiter le résultat.

16010

Exercice 11. Centrale PSI 22 Soit $q : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ continue. On s'intéresse à l'équation différentielle $(E_{a,b})\, y'' + (1+q)y = 0, y(0) = a$, et $y'(0) = b$. {exo16010}

1. Tracer avec Python les solutions pour $(a,b) \in \{(1,0),(0,1)\}$ et pour les fonctions $q : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$, $q : t \mapsto \sin(t)\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $q : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$. et $q : t \mapsto \dfrac{-t^2}{2\,(1+t^2)}$. On tracera ces solutions sur l'intervalle $[0,50]$. Pour quelles fonctions q la solution semble-t-elle bornée ?

On suppose que q est intégrable sur $\mathbf{R}^+$.

2. Soit $z : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)f(t)dt$ avec f continue sur $\mathbf{R}^+$. Démontrer que z est deux fois dérivable et calculer $z'' + z$.
3. Soit y une solution de $(E_{a,b})$. Démontrer que, pour $t \in \mathbf{R}^+, 0 \leqslant |y(t)| \leqslant |a| + |b| + \displaystyle\int_0^x |q(t)||y(t)|dt$. *On considèrera $w = y - z$ où z est définie à la question précédente, et f est judicieusement choisie.*
4. En déduire que y est bornée.
5. La condition « q intégrable » est-elle suffisante/nécessaire pour que les solutions de $(E_{a,b})$ soient bornées ?

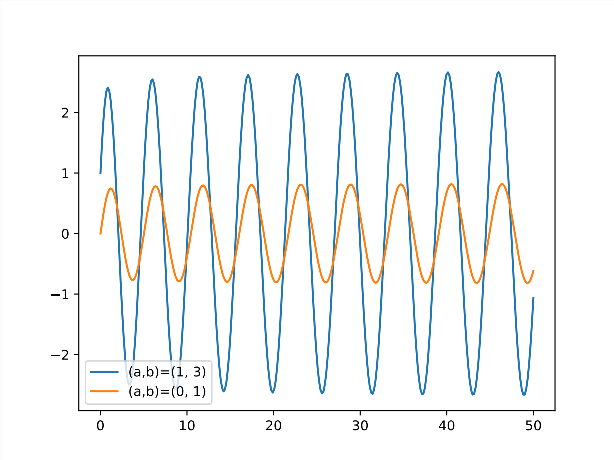
Correction

(RMS 2022-2023 1118) Soit $q : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ continue. On s'intéresse à l'équation différentielle $(E_{a,b})\, y'' + (1+q)y = 0, y(0) = a$, et $y'(0) = b$.

1. C'est un peu laborieux, mais on veut vérifier que vous savez maîtriser `odeint` et que vous savez, en posant $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, réécrire l'équation $Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -(1+q(t))y(t) \end{pmatrix}$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integr

def q(t):
    return 1/(1+t)**(1/2)

def F(Y,t):
    return [Y[1],-(1+q(t))*Y[0]]

T = np.linspace(0.01,50,300)

for (a,b) in [(1,3),(0,1)]:
    sol = integr.odeint(F,[a,b],T)
    s = "(a,b)="+str((a,b))
    plt.plot(T,sol[:,0],label = s)
plt.legend()
plt.show()
```

On obtient par exemple



Je ne sais pas faire de commentaire intelligent sur cette question. À première vue, toutes les solutions ont l'air bornées :(

2. Alors, là, on pourrait croire à une dérivation d'intégrales à paramètres, mais, en fait,
$$z(x) = \int_0^x (\sin(x)\cos(t) - \sin(t)\cos(x)) f(t)dt = \sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt - \cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt.$$
Ainsi, z est dérivable comme somme/produit de fonctions dérivables et
$$\begin{aligned} z'(x) &= \cos(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \sin(x)\cos(x)f(x) + \sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt - \cos(x)\sin(x)f(x) \\ &= \cos(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt. \end{aligned}$$
Donc z' est dérivable comme somme/produit de fonctions dérivables et
$$\begin{aligned} z''(x) &= -\sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \cos^2(x)f(x) + \cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt + \sin^2(x)f(x) \\ &= \int_0^x (\cos(x)\sin(t) - \sin(x)\cos(t))f(t)dt + f(x) = -z(x) + f(x). \end{aligned}$$
Donc $z'' + z = f$.
3. On pose $f = -qy$ et z comme ci-dessus. Alors $z''+z = -qy$, donc, comme $y''+y = -qy$, si on pose $w = y - z$, $w'' + w = 0$. Donc on dispose de A et B tels que $w = A\cos(x) + B\sin(x)$. Comme $w(0) = y(0) - z(0) = a - 0$ et $w'(0) = y'(0) - z'(0) = b - 0$, on en déduit que $y - z = a\cos(x) + b\sin(x)$, donc
$$y(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^x \sin(x-t)y(t)q(t)dt.$$
Ainsi,
$$|y(x)| \leqslant |a| + |b| + \int_0^x |y(t)||q(t)|dt.$$
4. C'est une question difficile, c'est un résultat qui s'appelle le Lemme de Gronwall. Je pense que les examinateurs s'attendaient à ce que cette question soit discutée au moment de la présentation orale, et non pas préparée au brouillon.
Les choses intelligentes à dire sont les suivantes : si on avait égalité, on aurait, en posant $h = |y|$,
$$h(x) = |a| + |b| + \int_0^x h|q|$$

donc, en dérivant,

$$h' = h|q|$$

donc $h = Ce^{\int_0^x q}$, et, en évaluant en 0, $C = |a| + |b|$. Comme on a une inégalité, on peut essayer de démontrer que, en fait

$$|y(x)| \leqslant (|a| + |b|)e^{\int_0^x |q(t)|dt},$$

ou, inégalité plus forte mais en fait plus simple à démontrer, on va vérifier que

$$|a| + |b| + \int_0^x |y(t)||q(t)|dt \leqslant (|a| + |b|)e^{\int_0^x |q(t)|dt}.$$

Pourquoi vérifier cette inégalité-là ? Parce qu'on se dit qu'on peut la démontrer en étudiant une fonction que l'on dérivera ! On pose alors

$$\varphi : x \mapsto \frac{|a| + |b| + \int_0^x |y(t)||q(t)|dt}{(|a| + |b|)e^{\int_0^x |q(t)|dt}}.$$

Alors φ est dérivable et pour tout x,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{|y(x)||q(x)|e^{\int_0^x |q(t)|dt} - \left(|a| + |b| + \int_0^x |y(t)||q(t)|dt\right).|q(x)|e^{\int_0^x |q(t)|dt}}{e^{2\int_0^x |q(t)|dt}} \\ &= e^{\int_0^x |q(t)|dt}|q(x)|\frac{|y(x)| - \left(|a| + |b| + \int_0^x |y(t)||q(t)|dt\right)}{e^{2\int_0^x |q(t)|dt}} \leqslant 0.\end{aligned}$$

Donc φ est décroissante. Comme $\varphi(0) = 1$, on en déduit que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\varphi(x) \leqslant 1$, ce qui correspond à l'inégalité désirée !
Ainsi, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$|y(x)| \leqslant (|a| + |b|)e^{\int_0^x |q(t)|dt} \leqslant |y(x)| \leqslant (|a| + |b|)e^{\int_0^{+\infty} |q(t)|dt},$$

donc y est bornée.

5. Si q est intégrable, y est bornée. Mais la réciproque est fausse, il suffit de prendre q constante positive non nulle, qui n'est pas intégrable mais qui assure le caractère borné de y (oscillateur harmonique).

08017

{exo08017}

Exercice 12. *Centrale PC 23*. Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, réelles, de même loi, telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(\varepsilon_k = 1) = P(\varepsilon_k = -1) = 1/2$$

On note $X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}\varepsilon_k$ et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)^2$.

1. Montrer que X_n a une espérance et une variance, en donner une expression.

2. Montrer que la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n}$ diverge et que S_n converge. On note alors $S_n \longrightarrow S$.

3. Montrer que $P(X_n \geqslant a) \leqslant \frac{S_n}{a^2} \leqslant \frac{S}{a^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

4. Tests python

(a) Écrire un code qui par une fonction `estim(a,n)` renvoie $P(M_n \geqslant a)$ sur 10000 simulations. Tracer cette probabilité en fonction de a.

(b) Écrire une fonction $S(a, n)$ qui renvoie $\frac{S_n}{a^2}$.

(c) Conjecturer le signe de $P(M_n \geqslant a) - \frac{S_n}{a^2}$.

5. Prouver la conjecture précédente.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^{+*} P\left(\frac{M_n}{\sqrt{\ln(n))}} \geqslant a\right) \longrightarrow 0$.

Correction

Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, réelles, de même loi, telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N} P(\varepsilon_k = 1) = P(\varepsilon_k = -1) = 1/2$$

On note $X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}\varepsilon_k$ et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)^2$.

1. X_n est une somme finie de variables aléatoires, donc elle admet une espérance et une variance. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}\mathbb{E}(\varepsilon_k) = 0,$$

et, par indépendance,

$$\mathbb{V}(X_n) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)^2 \mathbb{V}(\varepsilon_k) = S_n.$$

2. On remarque que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ donc la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n}$ diverge. Ensuite, $n^{3/2}\frac{\ln(n)^2}{n^2} = \frac{\ln(n)^2}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Donc, par comparaison à une série de Rieman, (S_n) converge.

3. On écrit que

$$\mathbb{P}(X_n \geqslant a) \leqslant \mathbb{P}(|X_n| \geqslant a) = \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X_n)}{a^2} = \frac{S_n}{a^2} \leqslant \frac{S}{a^2},$$

par l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff et croissance de (S_n).

4. Une très grosse erreur serait de faire une fonction `X(n)` et de faire n appels, de `X(1),...,X(n)` pour chercher qui est le plus grand. Le problème avec cela, c'est que l'on change les valeurs prises par ε_k. On propose donc plutôt

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def eps():
    x = rd.binomial(1,1/2)
    if x==0:
        return -1
    else:
        return 1

def M(n):
    res = 0
    maxi = 0
    for k in range(2,n+1):
        res += eps()*np.log(k)/k
        if res>maxi:
            maxi = res
    return maxi

def proba(n,a):
    res = 0
    for _ in range(10000):
        if M(n)>a:
            res += 1
    return res/10000

def somme(n,a):
    res = 0
    for k in range(1,n+1):
        res += np.log(k)**2/(k**2)
    return res/a**2
```

Avec plusieurs tests, on conjecture $\mathbb{P}(M_n \geqslant a) \leqslant \dfrac{S_n}{a^2}$.

5. On va considérer le premier k pour lequel $X_k \geqslant a$. On note donc A_k l'événement

$$\{X_1 < a, \dots, X_{k-1} < a, X_k \geqslant a\}.$$

Alors remarque que

$$\{M_n \geqslant a\} = \bigsqcup_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k.$$

On montre d'abord que $\mathbb{E}(X_n^2 \mathbb{1}_{A_k}) \geqslant a^2 \mathbb{P}(A_k)$. Pour ce faire, on écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n^2 \mathbb{1}_{A_k}) &= \mathbb{E}((X_n - X_k + X_k)^2 \mathbb{1}_{A_k}) \\ &= \mathbb{E}((X_n - X_k)^2 \mathbb{1}_{A_k}) + 2\mathbb{E}((X_n - X_k) X_k \mathbb{1}_{A_k}) + \mathbb{E}(X_k^2 \mathbb{1}_{A_k}).\end{aligned}$$

Or, $\mathbb{E}((X_n - X_k)^2 \mathbb{1}_{A_k}) \geqslant 0$, et, par le lemme des coalitions, $(X_n - X_k) \perp\!\!\!\perp X_k \mathbb{1}_{A_k}$, donc

$$\mathbb{E}((X_n - X_k) X_k \mathbb{1}_{A_k}) = \mathbb{E}(X_n - X_k)\mathbb{E}(X_k \mathbb{1}_{A_k}) = 0,$$

car les ε_k sont d'espérance nulle. Enfin, $\mathbb{E}(X_k^2 \mathbb{1}_{A_k}) \geqslant a^2 \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_k}) = a^2 \mathbb{P}(A_k)$, ce qui prouve le résultat. On conclut en disant que

$$\mathbb{P}(M_n \geqslant a) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \leqslant \frac{1}{a^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_k} X_n^2) = \frac{1}{a^2} \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}\right) X_n^2\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X_n^2)}{a^2} = \frac{S_n}{a^2}.$$

6. C'est une application immédiate...

09045

{exo09045}

Exercice 13. *Centrale PC 22*. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables géométriques indépendantes de paramètre $p \in]0,1[$. Soit $q = 1-p$. Poul $\omega \in \Omega$, on définit

$$C(\omega) = \max\left\{n \in \mathbb{N}^* ; X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant X_n(\omega)\right\}$$

1. Pour $k \in \mathrm{N}^*$, calculer $\mathbf{P}\left(X_1 \geqslant k\right)$, $\mathbf{P}\left(X_2 \geqslant X_1, X_1 = k\right)$ puis $\mathbf{P}(C \geqslant 2)$.
2. Écrire une fonction python `geomCr(q)` qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire C.
3. Programmer une fonction `nbGeomCr(q)` qui renvoie la moyenne de C observée au cours de 1000 réalisations. On suppose que C a une variance. Pourquoi peut-on dire que `nbGeomCr(q)` est une valeur acceptable de $\mathbb{E}(C)$? {conj1109}
4. Tracer `nbGeomCr(q)` en fonction de $q \in]0,1[$. Que peut-on conjecturer sur les limites aux bornes ?
5. Pour $k \in \mathrm{N}^*$, montrer que :

$$\mathbf{P}\left(X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k\right) = \frac{(1-q)^n q^{n(k-1)}}{(1-q)\left(1-q^2\right)\cdots\left(1-q^n\right)}.$$

6. Calculer $\mathbb{E}(C)$ en fonction de q.
7. Démontrer les propriétés conjecturées à la question 4..

Correction

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables géométriques indépendantes de paramètre $p \in]0,1[$. Soit $q = 1-p$. Poul $\omega \in \Omega$, on définit

$$C(\omega) = \max\left\{n \in \mathbb{N}^* ; X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant X_n(\omega)\right\}$$

1. C'est une question de cours :

$$\mathbb{P}(X_1 \geqslant k) = \sum_{i\geqslant k} pq^{i-1} = pq^{k-1}\frac{1}{1-q} = q^{k-1}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(X_2 \geqslant X_1, X_1 = k\right) = \mathbb{P}(X_2 \geqslant k, X_1 = k) &= \mathbb{P}(X_2 \geqslant k)\mathbb{P}(X_1 = k) \text{ par indépendance.}\\ &= q^{k-1}pq^{k-1} = pq^{2k-2}.\end{aligned}$$

Enfin,

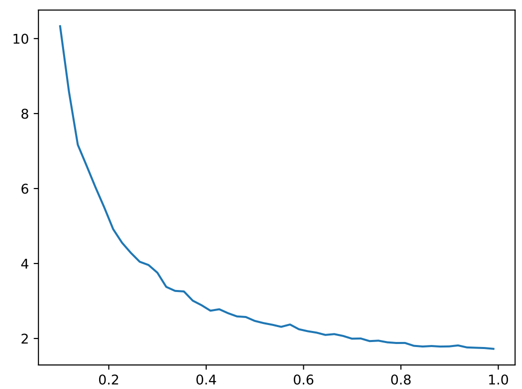
$$\mathbb{P}(C \geqslant 2) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant X_2) = \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(X_1 = k, X_1 \leqslant X_2) = \sum_{k\geqslant 1} p(q^2)^{k-1} = p\frac{1}{1-q^2}.$$

2.
3.
4. La difficulté est de bien comprendre ce que l'on cherche à faire avec python. En fait, on appelle des variables géométriques jusqu'à ce qu'une soit inférieure strictement à la précédente. Pour les trois questions python, on propose

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd

```

```python
def geomCr(q):
    res = 1
    xk = rd.geometric(q)
    xk1 = rd.geometric(q)
    while xk<=xk1:
        res +=1
        y = rd.geometric(q)
        xk,xk1 = xk1,y
    return res

def nbgeomCr(q):
    res = 0
    for _ in range(1000):
        res += geomCr(q)
    return res/1000

X = np.linspace(0.1,0.99)
Y = [nbgeomCr(q) for q in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

C'est la loi faible des grands nombres qui assure le bon fonctionnement de la fonction `nbgeomCr(q)`. On obtient



On a l'impression que $\mathbb{E}(C) \underset{q\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ et $\mathbb{E}(C) \underset{q\to 1}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

5. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$. On démontre le résultat par récurrence sur n le nombre de variables aléatoires considérées.
L'**initialisation** fonctionne bien car

$$\mathbb{P}(X_1 \geqslant k) = q^{k-1} = \frac{(1-q)q^{1\times(k-1)}}{1-q}.$$

Pour l'hérédité, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété est vraie. Alors si $k \in \mathrm{N}^*$, montrer que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(X_{n+1} \geqslant X_n \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k\right) &= \sum_{i \geqslant k} \mathbf{P}\left(X_{n+1} \geqslant X_n \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k, X_1 = i\right) \text{ en décomposant sur un s.c.e.} \\
&= \sum_{i \geqslant k} \mathbf{P}\left(X_{n+1} \geqslant X_n \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant i, X_1 = i\right) \\
&= \sum_{i \geqslant k} \mathbf{P}\left(X_{n+1} \geqslant X_n \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant i\right) \mathbb{P}\left(X_1 \geqslant i\right) \text{ par indépendance.} \\
&= \sum_{i \geqslant k} \frac{(1-q)^n q^{n(i-1)}}{(1-q)\left(1-q^2\right)\cdots\left(1-q^n\right)}(1-q)q^{i-1} \text{ par hypothèse de récurrence.} \\
&= \frac{(1-q)^{n+1}}{(1-q)\left(1-q^2\right)\cdots\left(1-q^n\right)} \sum_{i \geqslant k} q^{(n+1)(i-1)} \\
&= \frac{(1-q)^{n+1}}{(1-q)\left(1-q^2\right)\cdots\left(1-q^n\right)} \frac{1}{1-q^{n+1}},
\end{aligned}$$

d'où l'hérédité et le résultat !

6. On utilise la jolie formule (que l'on ne peut pas exiger de vous et que l'on peut vous demander de redémontrer)

$$\mathbb{E}(C) = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(C \geqslant n).$$

Mais

$$\mathbb{P}(C \geqslant n) = \mathbb{P}(X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1) = \mathbb{P}(X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant 1) = \frac{(1-q)^n}{(1-q)\left(1-q^2\right)\cdots\left(1-q^n\right)}.$$

On en déduit donc que

$$\mathbb{E}(C) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(1-q)^n}{(1-q)\left(1-q^2\right)\cdots\left(1-q^n\right)}$$

7. Il faut majorer ou minorer convenablement les termes généraux des séries. On peut remarquer que $\mathbb{E}(C) = \sum_{n \geqslant 1} f_n$ où

$$f_n : q \mapsto \frac{(1-q)^n}{(1-q)\left(1-q^2\right)\cdots\left(1-q^n\right)} = \frac{1}{1(1+q)(1+q+q^2)\ldots(1+q+\cdots+q^n)}.$$

On sépare alors les deux cas

- **lorsque** $q \to 0$ Je fixe A, je fixe $M > 0$. Alors pour $N > M$,

$$\mathbb{E}(C) \geqslant \sum_{k=1}^{N} f_k(q) \underset{q \to 0}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{N} f_k(0) = N > M,$$

  donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout q dans $[1-\varepsilon, 1]$, $\mathbb{E}(C) \geqslant M$. C'est la définition de « $\mathbb{E}(C) \underset{q \to 0}{\longrightarrow} +\infty$ ».

- **lorsque** $q \to 1$ On remarque que pour tout n, $(1+q+\cdots+q^n) \geqslant 1+q$, donc pour q dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$f_n(q) \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^n},$$

 nlaillet.math@gmail.com

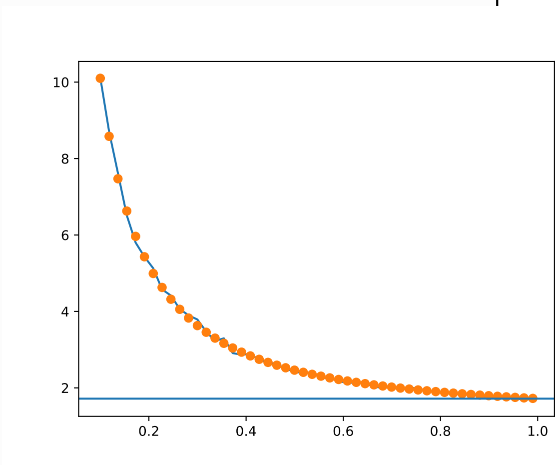
d'où la convergence normale de la série $\sum f_n$. Donc, par théorème de double limite,

$$\mathbb{E}(C) \underset{q\to 1}{\longrightarrow} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1(1+1)(1+1+1^2)\dots(1+1+\dots+1^n)} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}-1.$$

Petit bonus, on illustre le fait que l'expression trouvée et la limite sont les bonnes

```python
def f(q):
    res = 1
    x = 1
    for k in range(2,1001):
        x*=(1-q)/(1-q**k)
        res += x
    return res

X = np.linspace(0.1,0.99)
Y = [nbgeomCr(q) for q in X]
Z = [f(q) for q in X]
plt.plot(X,Y)
plt.plot(X,Z,'o')
plt.axhline(np.exp(1)-1)
plt.show()
```

On obtient



04029

{exo04029}

Exercice 14. *Centrale PC 22*. (RMS 2022-2023 1136) Pour a, b dans C, on pose $D_1(a,b) = a$ et, pour tout $n \geqslant 2$,

$$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & 2b & 0 & & (0) \\ 1 & a & b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & b \\ (0) & & & 1 & a \end{vmatrix} \text{ et } A_n(b) = \begin{pmatrix} 0 & -2b & 0 & & (0) \\ -1 & 0 & -b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & -b \\ (0) & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $D_n(a,b)$ pour $n \leqslant 3$
2. Donner une relation de récurrence linéaire reliant $D_n(a,b), D_{n+1}(a,b)$ et $D_{n+2}(a,b)$.
3. Coder en Python une fonction `D(n,a,b)` renvoyant $D_n(a,b)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $a \mapsto D_n(a,b)$ est polynomiale à coefficients réels, et donner son degré.
5. Pour $b \in [\![1,n]\!]$ et $n \in [\![3,5]\!]$, donner une représentation graphique de $a \mapsto D_n(a,b)$ sur $[-2\sqrt{b}, 2\sqrt{b}]$. Conjecturer le nombre et la localisation des zéros de $a \mapsto D_n(a,b)$.
6. Supposant vraie la conjecture de la question précédente, que peut-on dire de la réduction de la matrice $A_n(b)$?
7. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $T_0 = 1, T_1 = X$ et $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ pour $n \geqslant 0$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, donner une expression simple des termes de la suite $(T_n(\cos\theta))_n$.
8. Calculer les racines du polynôme T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. Déterminer alors les zéros de $a \longmapsto D_n(a,b)$ en fonction du nombre complexe b.

Correction

(RMS 2022-2023 1136)

1. Pour $n = 1$, $D_n(a,b) = a$. Pour $n = 2$, $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & 2b \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 2b$. Pour $n = 3$,

$$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & 2b & 0 \\ 1 & a & 2b \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 2b \\ 1 & a \end{vmatrix} - 2b\begin{vmatrix} 1 & 2b \\ 0 & a \end{vmatrix} = a(a^2-2b) - 2ba = a^3 - 4ba.$$

2. Il s'agit presque du calcul du déterminant tridiagonal...mais **attention !** Le coefficient de la première ligne, deuxième colonne est différent des autres. Il ne faut donc pas toucher à cette première ligne. On calcule alors en développant selon la **dernière** ligne.

$$\begin{aligned} D_{n+2}(a,b) &= \begin{vmatrix} a & 2b & 0 & & (0) \\ 1 & a & b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & b \\ (0) & & & 1 & a \end{vmatrix}_{[n+2]} \\ &= aD_{n+1}(a,b) - \begin{vmatrix} a & 2b & 0 & & (0) \\ 1 & a & b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 1 & a & 0 \\ (0) & & & 1 & b \end{vmatrix}_{[n+1]} \\ &= aD_{n+1}(a,b) - bD_n(a,b), \end{aligned}$$

en développant le dernier déterminant selon la dernière colonne. D'où la relation de récurrence linéaire.

3. Question amusante, car on a plusieurs possibilités :

(a) on utilise directement les modules d'algèbre linéaire.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.linalg as alg

def D(n,a,b):
    M = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i == j:
                M[i,j] = a
            elif i == j+1:
                M[i,j] = 1
            elif i+1 == j:
                if i == 0:
                    M[i,j] = 2*b
                else:
                    M[i,j] = b
    return alg.det(M)
```

(b) on utilise la relation de récurrence

```python
def Dbis(n,a,b):
    un,unp1 = a,a**2-2*b #initialisation
    for i in range(n-1):
        un,unp1 = unp1,a*unp1 - b*un
    return un
```

(c) on calcule D_n grâce à la relation de récurrence linéaire (déconseillé, cela fait faire des erreurs de calculs inutiles...)

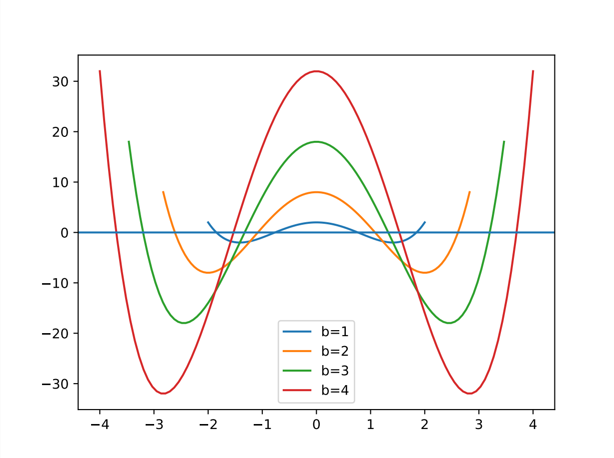
4. Si on avait calculé l'expression exacte, on aurait pu s'en sortir directement. Mais d'autres arguments sont possibles :

- « le déterminant est une expression polynomiale en les coefficients » (c'est un peu une formule magique du cours, mais on peut le dire ainsi). De plus, en développant successivement sur la première ligne, on remarque qu'au maximum, on aura n « a » qui seront multipliés entre eux. D'où un degré égal à n.
- dernier argument un peu massue : $D_n(a,b) = \chi_{A_n(b)}(a)$, et un polynôme caractéristique est un polynôme, de degré n. Bim.

5. On écrit

```python
n = 4
for b in range(1,n+1):
    X = np.linspace(-2*np.sqrt(b),2*np.sqrt(b),100)
    Y = [D(n,a,b) for a in X]
    s = "b="+str(b)
    plt.plot(X,Y,label=s)
plt.axhline(0)
plt.legend()
plt.show()
```

On obtient



On conjecture alors que $D_n(a,b)$ possède n zéros, dans l'intervalle.

6. On en déduit alors que la matrice $A_n(b)$ est une matrice de taille $n\times n$, qui possède n valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

7. Après l'ultra-classique déterminant tridiagonal, voici les non moins classiques polynômes de Tchebycheff. On démontre par récurrence que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
L'initialisation est évidente.
Pour l'**hérédité**, soit n tel que la proposition soit vraie aux rangs n et $n+1$. Alors

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta))\\
&= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)) - \cos(n\theta)\\
&= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) \text{ en utilisant } 2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b)+\cos(a-b).\\
&= \cos((n+2)\theta),
\end{aligned}$$

d'où l'hérédité et le résultat.

8. Par récurrence immédiate, T_n est de degré n. Ensuite, on remarque que si $k\in[\![0,n-1]\!]$,

$$T_n\left(\cos\left((2*k+1)\frac{\pi}{2n}\right)\right) = \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

donc T_n s'annule en tous les $\cos\left((2*k+1)\frac{\pi}{2n}\right)$. Ces réels étant deux à deux distincts, on en déduit les n racines de T_n.

9. On remarque que si on note $U_n(X) = \frac{1}{\sqrt{b}^n}D_n\left(2\sqrt{b}X, b\right)$, on a

$$\begin{aligned}
U_{n+2}(X) &= \frac{1}{\sqrt{b}^{n+2}}D_{n+2}\left(2\sqrt{b}X, b\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{b}^{n+2}}2\sqrt{b}XD_{n+1}\left(2\sqrt{b}X, b\right) - \frac{1}{\sqrt{b}^{n+2}}bD_n\left(2\sqrt{b}X, b\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{b}^{n+1}}2XD_{n+1}\left(2\sqrt{b}X, b\right) - \frac{1}{\sqrt{b}^{n}}D_n\left(2\sqrt{b}X, b\right)\\
&= 2XU_{n+1}(X) - U_n(X).
\end{aligned}$$

Donc (U_n) et (T_n) suivent la même relation de récurrence. De plus,

$$U_1(X) = \frac{1}{\sqrt{b}}D_1(2\sqrt{b}X, b) = 2X = 2T_1(X) \text{ et } U_2(X) = \frac{1}{b}(4bX^2-2b) = 4X^2-2 = 2(2X^2-1) = 2T_2(X).$$

Ainsi, par récurrence immédiate, $U_n(X) = 2T_n(X)$. Donc

$$\frac{1}{\sqrt{b}^n} D_n(2\sqrt{b}X, b) = 2T_n(X) \text{ donc } \boxed{D_n(X,b) = 2\sqrt{b}^n T_n\left(\frac{X}{2\sqrt{b}}\right)}.$$

Donc les zéros de $D_n(X,b)$ sont les $2\sqrt{b}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

12049

{exo12049}

Exercice 15. *Centrale PSI 24*. Notons u l'application linéaire qui à $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ associe B définie par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad B_i = \sum_{k=1}^{n} A_k - A_i = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} A_k,$$

où A_k est la k ème colonne de la matrice A.

1. Écrire une fonction en Python qui renvoie l'image d'une matrice par u.

Correction

On propose

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

def u(A):
    n,p = np.shape(A)
    res = np.zeros((n,p))
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            coef = 0
            for k in range(p):
                if k!=j:
                    coef += A[i,k]
            res[i,j] = coef
    return res
```

2. À l'aide du script, évaluer u pour certaines matrices dans le cas où $n = 2$ et $n = 3$.

3. L'endomorphisme u est-il un automorphisme ?

Correction

u est un endomorphisme en dimension finie. Pour savoir s'il s'agit d'un automorphisme, il suffit de vérifier si $\ker(u) = 0$. Soit $C \in \ker(u)$. Alors

$$\begin{cases} C_2 + C_3 \cdots + C_n = 0 \\ C_1 + C_3 + \cdots + C_n = 0 \\ \vdots \\ C_1 + C_2 + \cdots + C_{n-1} = 0 \end{cases}$$

En sommant toutes les lignes, on a $(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} C_i\right) = 0$, donc $\sum_{i=1}^{n} C_i = 0$. Donc, en combinant avec la i-ème ligne, $C_i = 0$. D'où $C = 0$, donc $\ker(u) = \{0\}$, donc u est injective donc, par le théorème du rang, bijective.

4. Déterminer la nature géométrique de u ainsi que ses éléments caractéristiques pour $n = 2$.

Correction

On remarque qu'en dimension 2, u inverse les colonnes 1 et 2 de la matrice. Ainsi, en notant $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$,

$$u^2 = \mathrm{Id}_E,$$

donc u est une symétrie. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, M_1 et M_2 ses colonnes. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} M \in \ker(u - \mathrm{Id}_E) &\Leftrightarrow u(M) = M \\ &\Leftrightarrow M_1 = M_2 \\ &\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow M \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

De même, on a les équivalences

$$\begin{aligned} M \in \ker(u + \mathrm{Id}_E) &\Leftrightarrow u(M) = -M \\ &\Leftrightarrow M_1 = -M_2 \\ &\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow M \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

5. Exprimer $\det(u(A))$ en fonction de $\det(A)$.

Correction

On note $A_1, \dots, A_n$ les colonnes de A et $B_1, \dots, B_n$ les colonnes de $u(A)$. Alors

$$\begin{aligned} \det(u(A)) &= \det(B_1, \dots, B_n) \\ &= \det(B_1 + \cdots + B_n, B_2, \dots, B_n) \text{ par opérations sur les colonnes} \\ &= \det((n-1)(A_1 + \cdots + A_n), B_2, \dots, B_n) \\ &= (n-1)\det(A_1 + \cdots + A_n, B_2, \dots, B_n) \text{ par linéarité par rapport à la première variable} \\ &= (n-1)\det(A_1 + \cdots + A_n, -A_2, -A_3, \dots, -A_n) \text{ en faisant, pour tout } i,\ C_i \leftarrow C_i - C_1 \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)\det(A_1 + \cdots + A_n, A_2, \dots, A_n) \text{ par multilinéarité} \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)\det(A_1, \dots, A_n) \text{ en faisant, pour tout } i,\ C_1 \leftarrow C_1 - C_i \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)\det(A). \end{aligned}$$

6. Déterminer un polynôme annulateur de u de degré 2 .

Correction

On prend $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B = u(A)$, $C = u^2(A)$. Alors

$$\begin{aligned} C_i &= \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} B_k \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} B_k \right) - B_i \\ &= (n-1) \left(\sum_{j=1}^{n} A_j \right) - \sum_{j=1}^{n} A_j + A_i \\ &= (n-2) \left(\sum_{j=1}^{n} A_j \right) + A_i \\ &= (n-2) \left(\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} A_j \right) + (n-1) A_i \\ &= (n-2) B_i + (n-1) A_i, \end{aligned}$$

donc

$$u^2 - (n-2)u - (n-1)\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)},$$

donc $X^2 - (n-2)X - (n-1)$ annule u. Remarque : pour $n = 2$, on retrouve bien $u^2 = \mathrm{Id}_E$.

7. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Correction

On remarque que

$$X^2 - (n-2)X - (n-1) = (X+1)(X-(n-1)),$$

donc u est annulé par un polynôme scindé à racines simples, donc u est diagonalisable.

8. Soit J la matrice dont les coefficients valent tous 1 . On pose $U = J - I_n$. Exprimer les colonnes de AU. Qu'en concluez-vous ?

Correction

On remarque aisément que $u(A) = AU$. Tous les résultats précédents se retrouvent avec cette considération (automorphisme, polynôme annulateur, réduction).

16008

{exo16008}

Exercice 16. *Centrale PSI 24*. Soit (E) : $\left(1+x^2\right)y''+xy'-\dfrac{y}{4}=0$.

{qu1}

1. (a) Justifier qu'il existe une unique fonction y solution de (E) vérifiant $y(0)=\sqrt{3}$ et $y'(0)=0$.

Correction

L'équation (E) se réécrit

$$y''+\frac{x}{1+x^2}y'-\frac{1}{4(1+x^2)}y=0.$$

Les fonctions $x\mapsto\dfrac{x}{1+x^2}$ et $x\mapsto-\dfrac{1}{4(1+x^2)}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc, par le théorème de Cauchy linéaire, (E) admet une unique solution vérifiant $y(0)=\sqrt{3}$ et $y'(0)=0$.

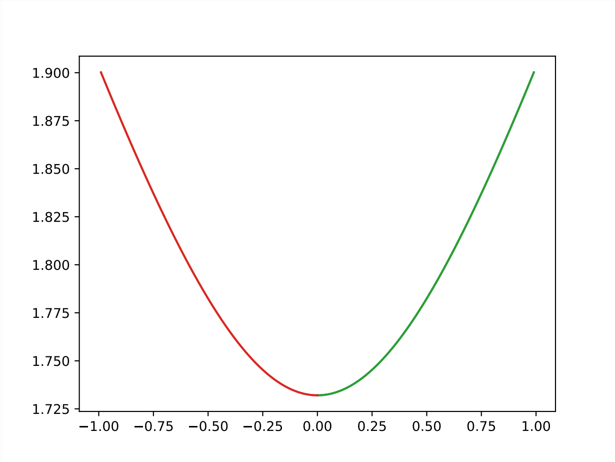
(b) Tracer en python la fonction de la question précédente. *On aura intérêt à utiliser les deux tableaux de temps* `T1 = np.arange(0,1,0.01)` *et* `T2 = np.arange(0,-1,-0.01)`

Correction

On propose

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integr

def f(X,t):
    return [X[1],-t/(1+t**2)*X[1] + 1/(4+4*t**2)*X[0]]

T1 = np.arange(0,1,0.01)
T2 = np.arange(0,-1,-0.01)

CI = [np.sqrt(3),0]

Y1 = integr.odeint(f,CI,T1)
Y2 = integr.odeint(f,CI,T2)

plt.plot(T1,Y1[:,0])
plt.plot(T2[::-1],Y2[:,0][::-1])
plt.savefig('exo16008-graphe.pdf')
plt.show()
```

Et on obtient



2. (a) Trouver toutes les solutions de (E) développable en série entière sur $]-1,1[$.

Correction

Analyse. Soit f une solution de E développable en série entière sur $]-1,1[$. Alors on dispose d'une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout x de $]-1,1[$,

$$f(x)=\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n.$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\left(1+x^2\right) f''+xf'-\frac{f}{4}\\
&=\left(1+x^2\right)\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n x^{n-2}+x\sum_{n\geqslant 1} na_n x^{n-1}-\frac{1}{4}\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\\
&=\sum_{k\geqslant 0}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k+\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)a_n x^n+\sum_{n\geqslant 0} na_n x^n-\frac{1}{4}\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\\
&=\sum_{n\geqslant 0}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}+\left[n(n-1)+n-\frac{1}{4}\right]a_n\right)x^n.
\end{aligned}$$

Comme f est solution de l'équation différentielle, on en déduit, par unicité du développement en série entière, que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=\frac{4n^2-1}{4}a_n,$$

donc que

$$a_{n+2}=-\frac{4n^2-1}{4(n+1)(n+2)}a_n=-\frac{(2n-1)(2n+1)}{4(n+1)(n+2)}a_n,$$

ou encore que

$$a_n=-\frac{(2n-5)(2n-3)}{4n(n-1)}a_{n-2}$$

Soit n pair. Alors $n = 2p$. On écrit alors que

$$\begin{aligned}
a_{2p} &= -\frac{(4p-3)(4p-5)}{4.(2p)(2p-1)} a_{2p-2} \\
&= \dots \\
&= (-1)^p \left(\frac{1}{4^p (2p)!} \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 4p-2 \\ k \text{ pair}}} k \right) a_0 \\
&= (-1)^p \frac{1}{4^p (2p)!} \frac{(4p-2)!}{2^{2p-1}(2p-1)!} a_0 \\
&= (-1)^p \frac{1}{(4p-1)2^{2p-1}} \binom{4p-1}{2p} a_0.
\end{aligned}$$

De même, pour $n = 2p+1$, on écrit que

$$\begin{aligned}
a_{2p+1} &= -\frac{(4p-3)(4p-1)}{2(2p+1)(2p)} a_{n-2} \\
&= \dots \\
&= (-1)^p \left(\frac{1}{2^{2p+1}(2p+2)!} \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 4p \\ k \text{ pair}}} k \right) a_1 \\
&= (-1)^p \frac{1}{2^{2p+1}(2p+1)!} \frac{(4p)!}{2^{2p}(2p)!} a_1 \\
&= (-1)^p \frac{1}{2^{4p+1}(4p+1)} \binom{4p+1}{2p} a_1.
\end{aligned}$$

Donc finalement, $f = a_0 \varphi + a_1 \psi$, où

$$\varphi(x) = \sum_{p \geqslant 0} \frac{(-1)^p}{(4p-1)2^{2p-1}} \binom{4p-1}{2p} x^{2p} \text{ et } \psi(x) = \sum_{p \geqslant 0} \frac{(-1)^p}{2^{4p+1}(4p+1)} \binom{4p+1}{2p} x^{2p+1}.$$

On vérifie à l'aide d'une règle de D'Alembert que le rayon de convergence de ces séries entières vaut 1.

(b) Montrer que toute solution de (E) est développable en série entière.

Correction

Les fonctions φ et ψ sont linéairement indépendantes, et solutions de (E), qui est une équation différentielle homogène du second ordre (en divisant par $1+x^2$, continu et qui ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$). Par théorème de structure, l'ensemble des solutions de (E) est un plan vectoriel, donc il est égal à $\mathrm{Vect}(\varphi, \psi)$, qui sont toutes deux développables en série entière.
Ainsi, toute solution de (E) est développable en série entière.

(c) En déduire une deuxième façon de tracer le graphe de la fonction de la question 1.

Correction

On peut tout à fait tracer les développements en série entière tronqués à 100.

```python
def phi(x):
    res = 0
    puiss = 1
    for k in range(100):
        res += puiss
        puiss = -puiss *x**2 * ((4*k-1)*(4*k+1))/(4*(2*k+1)*(2*k+2))
    return res

def psi(x):
    res = 0
    puiss = x
    for k in range(100):
        res += puiss
        puiss = -puiss *x**2 * ((2*(2*k+1)-1)*(2*(2*k+1)+1))/(4*(2*k+2)*(2*k+
    return res

def g(x):
    return a0*phi(x)+a1*psi(x)

a0 = np.sqrt(3)
a1 = 0

T = np.arange(-1,1,0.01)
Z = [g(x) for x in T]
plt.plot(T,Z,'--r')
plt.show()
```

De manière très impressionnante, les graphes se superposent absolument parfaitement !

3. (a) Si h est une solution de (E), déterminer l'équation différentielle vérifiée par $g = h \circ \mathrm{sh}$.

Correction

On remarque que g est deux fois dérivable et que, pour t dans $\mathbb{R}$,

$$g'(t) = \mathrm{ch}(t)h'(\mathrm{sh}(t)),$$

puis que

$$g''(t) = \mathrm{sh}(t)h'(\mathrm{sh}(t)) + \mathrm{ch}^2(t)h''(\mathrm{sh}(t))$$

Mais on sait que

$$(1+\mathrm{sh}^2(t))h''(\mathrm{sh}(t)) + \mathrm{sh}(t)h'(\mathrm{sh}(t)) - \frac{1}{4}h(t) = 0,$$

(b) En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Correction

On déduit de la question précédente que

$$g''(t) - \frac{1}{4}g(t) = 0,$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

donc $g(t) = \alpha e^{\frac{t}{2}} + \beta e^{-\frac{t}{2}}$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Enfin, on sait qu'on a les équivalences suivantes (exo de sup)

$$t = \mathrm{sh}(x) \Leftrightarrow x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

On en déduit que

$$h(x) = \alpha\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}.$$

Remarque. En mettant les conditions initiales $h(0) = \sqrt{3}$ et $h'(0) = 0$, on trouve $\alpha + \beta = \sqrt{3}$ et, après de longs calculs, $\dfrac{\alpha - \beta}{2} = 0$, donc $\alpha = \beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

exo03015

{exo03015}

Exercice 17. *Centrale PSI 24*. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(n)$. Pour $x \in [0, \pi/2]$, on pose

$$\varepsilon_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0, \pi/4[\\ 1 \text{ si } x \in [\pi/4, \pi/2] \end{cases} \qquad \text{et, pour } n \in \mathbb{N}^*, \varepsilon_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k(x) u_k + u_n > x \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

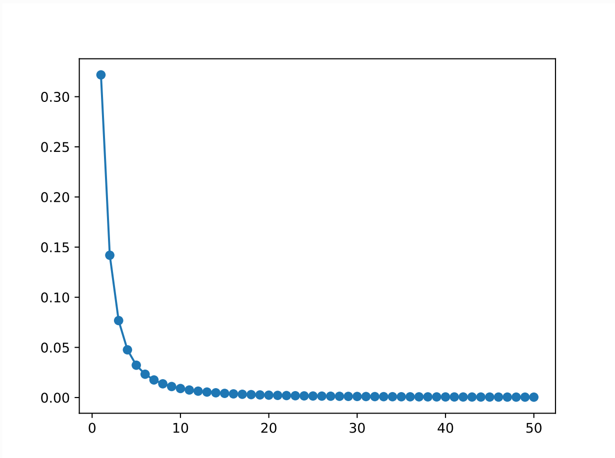
1. (a) Écrire une fonction Python traçant une ligne polygonale reliant les points $M_k = (k, u_k)$ pour $k \in [\![1, 50]\!]$. Conjecture ?

Correction

On propose

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

##Calcul de un

def u(n):
    return np.arctan(n+1) - np.arctan(n)

X = list(range(1,51))
Y = [u(n) for n in X]
plt.plot(X,Y, 'o-')
plt.show()
```

On obtient



{conj1}

(b) Écrire une fonction Python d'argument x et N renvoyant $(\varepsilon_0(x), \dots, \varepsilon_N(x))$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k(x) u_k$.

Tester cette fonction pour $x = 0, \dfrac{1}{2}, 1, 2, \pi$ et, à chaque fois, $N = 20$. Observations et conjecture ?

Correction

On propose

```python
def approx(x,N):
    if x>np.pi/4:
        res = u(0)
    else:
        res = 0
    for k in range(1,N-1):
        if res + u(k)<x:
            res += u(k)
    return res
```

On obtient

```
 >>> approx(0,20)
0

>>> approx(0.5,20)
0.49955747871629486

>>> approx(1,20)
0.9981299440890583

>>> approx(2,20)
1.5182132651839548

>>> approx(np.pi,20)
1.5182132651839548
```

On remarque que pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors la série semble tendre vers x.

2. (a) Étudier la monotonie de (u_n) et sa convergence éventuelle.

Correction

Par le théorème des accroissements finis, on dispose de $x_n \in [n, n+1]$ tel que

$$u_n = \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(n) = \frac{1}{1+x_n^2}(n+1-n) = \frac{1}{x_n^2}.$$

On a alors

$$\frac{1}{1+x_{n+1}^2} \leqslant \frac{1}{1+x_n^2},$$

d'où la décroissance de (u_n).

(b) Donner un équivalent de u_n.

Correction

On en déduit, comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

3. (a) Étudier la convergence de la série $\sum \varepsilon_n(x) u_n$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \varepsilon_n u_n \leqslant u_n$. Or, $\sum u_n$ converge par transformation suite-série car $(\text{Arctan}(n))$ converge vers $\frac{\pi}{2}$, et sa somme vaut $\frac{\pi}{2} - 0$, i.e. $\frac{\pi}{2}$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \varepsilon_n u_n$ converge. On note S sa somme. On a, par ce qui précède, $0 \leqslant S \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, i.e. $0 \leqslant S \leqslant \frac{\pi}{2}$.

(b) Démontrer la conjecture de la question 1.b

Correction

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k u_k$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$S_n \leqslant x \leqslant S_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Pour $n = 0$, si $x \leqslant \frac{\pi}{4}, \varepsilon_0 = 0$ et donc $S_0 = 0$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{2} - u_0 = \frac{\pi}{4}$. On a bien l'encadrement voulu ; si $x > \frac{\pi}{4}$, alors $\varepsilon_0 = 1$ et $S_0 = \frac{\pi}{4}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{4}$ donc, là encore, on a bien l'encadrement voulu. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n \leqslant x \leqslant S_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Alors ou bien $x \leqslant S_n + u_{n+1}$ et alors $\varepsilon_{n+1} = 0$ et donc $S_{n+1} = S_n$ d'où $S_{n+1} \leqslant x$ par hypothèse de récurrence. Par ailleurs comme $x \leqslant S_n + u_{n+1}$, on a $x \leqslant S_{n+1} + u_{n+1}$. Montrons donc que $u_{n+1} \leqslant \sum_{k=n+2}^{+\infty} u_k$. On a $\sum_{k=n+2}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n+2)$, donc il reste à montrer

$$\text{Arctan}(n+2) - \text{Arctan}(n+1) \leqslant \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n+2)$$

tan étant strictement croissante, il suffit de montrer (on applique tan) :

$$\frac{(n+2)-(n+1)}{1+(n+2)(n+1)} \leqslant \frac{1}{n+2}$$

ce qui équivaut à $n+2 \leqslant 1+(n+1)(n+2)$ et donc la propriété voulue est vraie et on a bien finalement $S_{n+1} \leqslant x \leqslant S_{n+1}+R_{n+1}$. Il reste à étudier le cas où $x > S_n+u_{n+1}$. Dans ce cas, $\varepsilon_{n+1} = 1$ et $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$. On a bien $S_{n+1} \leqslant x$ et par hypothèse de récurrence, $x \leqslant S_n + R_n$ or $S_n + R_n = S_n + u_{n+1} + R_{n+1} = S_{n+1} + R_{n+1}$ et donc $x \leqslant S_{n+1} + R_{n+1}$. Dans tous les cas on a bien vérifié l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$. On a vu (1.a.) que (S_n) converge et (R_n) converge vers 0 . En passant à la limite dans les inégalités prouvées par récurrence, x est la limite de (S_n) i.e. $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$.

4. Généralisation. Soit (u_n) une suite vérifiant l'hypothèse (H) suivante : $\sum u_n$ est convergente et (u_n) est décroissante positive. On note λ la somme de la série $\sum u_n$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$. Montrer que $\sum \varepsilon_n u_n$ converge. On note S sa somme. Montrer que $S \in [0, \lambda]$.

Correction

$\sum u_n$ est une série à termes positifs. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \varepsilon_n u_n \leqslant u_n$. Or $\sum u_n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \varepsilon_n u_n$ converge. En sommant les inégalités précédentes, on obtient $0 \leqslant S \leqslant \lambda$.

On cherche à savoir à quelle condition la propriété (P) suivante est vraie :

$$\forall x \in [0, \lambda], \exists (\varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R_{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Donner la condition nécessaire et suffisante cherchée en fonction de (R_n).

Correction

Pour espérer que tout $x \in [0, \lambda]$ s'écrive $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$, il ne faut pas qu'un terme de la série u_n soit plus grand que le reste de la série R_n. La condition nécéssaire et suffisante cherchée s'écrit donc $u_n \leqslant R_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons le. On suppose que tout $x \in [0, \lambda]$ s'écrit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$ avec $(\varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > R_{n_0}$. On choisit $x \in]R_{n_0}, u_{n_0}[$. On peut écrire $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$, avec $(\varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. S'il existe $n \in [\![0, n_0]\!]$ tel que $\varepsilon_n = 1$, alors $x \geqslant u_n \geqslant u_{n_0}$ (décroisance de (u_n)) : contradiction. Donc, pour tout $n \in [\![0, n_0]\!], \varepsilon_n = 0$.

$$x = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \varepsilon_n u_n \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} u_n \leqslant R_{n_0} : \text{ contradiction.}$$

Réciproquement, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant R_n$. Soit $x \in [0, \lambda]$. On construit (ε_n) par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, avec l'algorithme donné au début.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k u_k$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$S_n \leqslant x \leqslant S_n + R_n$$

Pour $n = 0$: ou bien $x \leqslant u_0$ et alors $\varepsilon_0 = 0$ et donc $S_0 = 0$, or $0 \leqslant x \leqslant u_0$ et donc $S_0 \leqslant x \leqslant S_0 + R_0$ ($u_0 \leqslant R_0$). Ou bien $x > u_0$ et alors $\varepsilon_0 = 1, S_0 = u_0$. On a alors $S_0 \leqslant x \leqslant S_0 + R_0$ car $S_0 + R_0 = \lambda$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n \leqslant x \leqslant S_n + R_n$. Ou bien $x \leqslant S_n + u_{n+1}$ et alors $\varepsilon_{n+1} = 0$. On a $S_{n+1} = S_n$ et donc par hypothèse de récurrence $S_{n+1} \leqslant x$. Mais on a aussi $x \leqslant S_n + u_{n+1} \leqslant S_n + R_{n+1} = S_{n+1} + R_{n+1}$. Ou bien $x > S_n + u_{n+1}$ et alors $\varepsilon_{n+1} = 1$, d'où $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$. Mais on a bien dans ce cas $S_{n+1} \leqslant x$ et comme par hypothèse de récurrence $x \leqslant S_n + R_n$, i.e. $x \leqslant S_n + u_{n+1} + R_{n+1}$, on a bien $x \leqslant S_{n+1} + R_{n+1}$. On a donc bien ce qu'on veut.

Comme S_n converge et comme R_n converge vers 0 , par passage à la limite dans les inégalités précédemment trouvées, x est la limite de S_n i.e. $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$.