**Définition 1** On dit qu'une fonction est continue par morceaux sur un segment lorsque :
i) elle n'y admet qu'un nombre fini de points de discontinuité *et*
ii) elle possède en chacun de ces points une limite finie à droite et à gauche.
On dit qu'une fonction est continue par morceaux sur un intervalle $I$ lorsqu'elle l'est *sur tout segment* inclus dans $I$.

**Remarque 1** Toute fonction continue par morceaux sur un segment est la somme d'une fonction continue et d'une fonction en escaliers. On peut alors définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment comme étant la somme des deux intégrales correspondantes.

**Remarque 2** On ne change pas la valeur de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment en changeant les valeurs de cette fonction en un nombre fini de points.

**Proposition 1** Si $f \in \mathscr{CM}([a,b])$ et $c \in [a,b]$ alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

**Définition 2** Soit $f$ une application continue par morceaux sur un intervalle $[a,b[$. Si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie quand $x$ tend vers $b$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *convergente.*

**Remarque 3** On définit de même la convergence de l'intégrale d'une application continue par morceaux sur un intervalle $]a,b]$. Enfin, l'intégrale sur un intervalle $]a,b[$ est dite convergente lorsque les intégrales sur $]a,c]$ et sur $[c,b[$ le sont pour $a<c<b$.

**Intégrales de référence :** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^a}$ ; $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^a}$ ; $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ ; $\displaystyle\int_0^1\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

**Remarque 4** Linéarité, positivité, relation de Chasles et croissance.

**Proposition 2** L'intégrale d'une application positive et continue par morceaux sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$) converge SSI $x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (resp. $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$) est majorée sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$).

**Corollaire** Si $0\leqslant f\leqslant g$, la convergence de $\int_a^b g$ implique celle de $\int_a^b f$.

**Proposition 3** Si $\varphi : ]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ et si $f : ]a,b[\to\mathbf{C}$ est continue, alors $\int_\alpha^\beta(f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ est convergente si et seulement si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. Et si tel est le cas, les deux intégrales sont égales.

**Remarque 5** Adaptation au cas où $\varphi$ est strictement décroissante.

**Proposition 4** Intégration par parties sur un intervalle quelconque : si $f$ et $g$ sont de classe $C^1$ sur $]a,b[$ et si $f(t)g(t)$ admet une limite finie en $a$ et en $b$ alors $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, avec $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ en cas de convergence.

**Définition 3** Si $I$ est un intervalle de borne inférieure (éventuellement infinie) $a$ et de borne supérieure (éventuellement infinie) $b$, on dit que $f$ est *intégrable* sur $I$ lorsque $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente. (On dit aussi que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.)

**Proposition 5** Si l'intégrale de $f$ sur un intervalle $I$ est absolument convergente,
alors elle est convergente et $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$ *(inégalité triangulaire)*.

**Proposition 6** L'ensemble $L^1(I,\mathbf{K})$ des fonctions intégrables sur $I$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

**Proposition 7** Si $f$ est continue et intégrable sur $I$, alors $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$ implique $f=0$.

**Proposition 8** Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$.

i) Si $f(x) = O\big(g(x)\big)$ quand $x$ tend vers $b$, alors l'intégrabilité de $g$ implique celle de $f$.

ii) Si $f(x)\sim g(x)$ quand $x$ tend vers $b$, alors l'intégrabilité de $g$ est équivalente à celle de $f$.