

Pour $\alpha \in \mathbf{R}_+$ et $\beta \in \mathbf{R}_+$ on pose $I_{\alpha,\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta \sin^2 t} dt$ et $J_\beta = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^\beta \sin^2 t)^2} dt$.

1) Montrer que si $\beta = 0$ alors $I_{\alpha,\beta}$ est divergente. Dans la suite, on supposera $\beta > 0$.

2) Pour $x > -1$, justifier l'existence de $\varphi(x) = \int_0^\pi \frac{d\theta}{1+x \sin^2 \theta}$ et de $\psi(x) = \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1+x \sin^2 \theta)^2}$.

3) Montrer que $\varphi(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+x \sin^2 \theta}$; puis calculer $\varphi(x)$ en posant $t = \tan \theta$.

4) Montrer que $I_{\alpha,\beta}$ est de même nature que la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta \sin^2 t} dt$.

5) Montrer que : $\frac{n^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+(n+1)^\beta \pi^\beta}} \leq u_n \leq \frac{(n+1)^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+n^\beta \pi^\beta}}$.

En déduire un équivalent de u_n , puis une CNS pour que $I_{\alpha,\beta}$ soit convergente.

6) Soit $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{t}{1+t^5 \sin^2 t} dt$.

Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$. Préciser l'expression de $F'(x)$.

Quel est le comportement de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$? Et celui de $F'(x)$?

7) Soit $f(x) = \frac{\pi^2 x^2}{x^5 + \pi^5 \sin^2 \frac{\pi}{x}}$. En posant $x = \frac{\pi}{t}$, justifier la convergence de $\int_0^1 f(x) dx$.

8) Soit $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$. Montrer que $S_n \geq \pi^2 n^2$. Conclusion?

9) Justifier l'existence puis calculer la valeur de $W = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2}$.

(on pourra effectuer, en la justifiant, une intégration par parties en posant $u(t) = \frac{t}{2}$ et $v(t) = \frac{-1}{1+t^2}$)

10) En déduire la valeur de $\psi(x)$, puis montrer que $\psi(x) \sim \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

11) Soit $w_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t^2}{(1+t^\beta \sin^2 t)^2} dt$.

Trouver un équivalent de w_n . En déduire une CNS pour que J_β soit convergente.

12) Montrer que si (u_n) est suite de réels positifs telle que la série de terme général u_n converge, alors la série de terme général u_n^2 converge.

13) Soit g une fonction continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs positives.

L'intégrabilité de g sur $[0, +\infty[$ entraîne-t-elle celle de g^2 ?