

Exercice 1 (Mines-Télécom 22) Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in]0, 1[$ on pose $f_n(x) = \frac{x^{2n+1} \ln x}{x^2 - 1}$.

- a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est intégrable sur $]0, 1[$. Soit $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$.
- b) Déterminer la limite de I_n quand n tend vers l'infini.
- c) Calculer $I_k - I_{k+1}$. En déduire que $I_n = \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 2 (Mines-Télécom 2017)

- a) Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x^3)^{1/3}}$.
- b) En posant $x = \frac{1}{1+t^3}$ puis $t = \frac{1}{u}$ montrer que $I = \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2 - u + 1}$, puis calculer I .

Exercice 3 (TPE-IVP 2017) Soit $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+1/n} dx$ et $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+1/n} dx$.

- a) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sont bien définies.
- b) Montrer que la suite (v_n) est convergente.
- c) Calculer $\int_0^1 \frac{1}{x+1/n} dx$.
- d) En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.