**Exercice 1** *(Mines-Ponts 21)* Soit $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.
Déterminer $(a, b)$ pour que la série de terme général $u_n$ soit convergente et calculer alors la somme.

**Exercice 2** *(Mines-Télécom 23)*
Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n+\sqrt{n}}\right)$.

**Exercice 3** *(Mines-Télécom 23)* Soit $a_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(\sin t)^{2n}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que la suite $(a_n)$ est bien définie et déterminer sa limite quand $n$ tend vers $+\infty$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ (1+4n^2)a_n = (4n^2-2n)a_{n-1}$.

c) Soit $b_n = a_n\sqrt{n}$. Établir la convergence de la série de terme général $\ln\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)$.

d) Déterminer la nature de la série de terme général $a_n$.

**Exercice 4** *(Centrale 18, avec Python)* On note : $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$, $u_n = \frac{\omega^n}{n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) La suite $(S_n)_n$ semble-t-elle converger ? Si oui, donner une approximation de sa limite $S$.

b) Soit $I = \int_0^1 \frac{\omega - t}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de $I$.
Par la méthode des rectangles, trouver une valeur approchée de $I$.

c) Comparer $I$ à $S$. Que peut-on conjecturer ? Démontrer cette conjecture.

d) Donner la valeur exacte de $I$.

e) Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de complexes vérifiant : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ a_{n+3} = a_n$. On pose $u_n = \frac{a_n}{n}$.
Montrer que la série de terme général $u_n$ converge si et seulement si $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.