

Exercice 1 (ENSEA 25) On souhaite déterminer les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

- Écrire le système sous forme matricielle : $X_{n+1} = AX_n$ avec $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
- Calculer A^n puis donner l'expression des trois suites en fonction de n et de a_0, b_0, c_0 .

Exercice 2 (Mines-Ponts 23) Soit (P) le plan d'équation $x - 2z - y = 0$ et u le vecteur $(1, 2, 1)$.

- Donner la matrice de la projection vectorielle sur (P) de direction u .
- Déterminer l'image par cette projection de la droite (D) d'équations $x - y + z = 0$ et $2x + y - 2z = 0$.

Exercice 3 (Navale 23) Dans un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E , on considère un projecteur p et un endomorphisme u vérifiant $u^n = \text{Id}_E$. On suppose que l'image de p est stable par u et l'on pose $q = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k \circ p \circ u^{n-k}$. Montrer que q est un projecteur dont le noyau est stable par u .

Exercice 4 (Centrale 23)

- Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de rang 1 ssi il existe Y et X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nuls tels que $A = XY^\top$.
- Soit A définie par $A_{i,j} = \sin(i+j)$. Déterminer le rang de A puis montrer qu'il existe C_1, C_2, D_1 et D_2 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telles que $A = (C_1, C_2)(D_1, D_2)^\top$.

Exercice 5 (Centrale 25) Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, tels que $f^2 = g^2 = \text{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$. On note $A_f = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $B_f = \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$.

- Montrer que $g(A_f) = B_f$ et $g(B_f) = A_f$. En déduire que la dimension de E est paire.
- Montrer que f et g peuvent être représentées dans une même base par $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (Centrale 2017) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ avec $A \in GL_p(\mathbf{R})$. Montrer que : $\text{rg}(M) = p \iff D = CA^{-1}B$.

Exercice 7 (CCINP 25) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E . On suppose que u est annulé par un polynôme dont 0 est racine simple.

- Que peut-on dire des coefficients de P ?
- Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$.
- Montrer que si u est nilpotent alors u est nul.

Exercice 8 (Centrale 22) On pose $Q_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $Q_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$. On s'intéresse à l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$, $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

- Montrer que (Q_n) est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
- Calculer $\Delta(Q_n)$.
- Déterminer l'image et noyau de Δ .
- Montrer que, pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X] : P = P(0) + \Delta(P)(0)Q_1 + \Delta^2(P)(0)Q_2 + \dots + \Delta^n(P)(0)Q_n$.

Exercice 9 (Mines-Ponts 21)

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de trace nulle et $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes.

- $\mathcal{H}$ et $\mathcal{N}$ sont-ils des espaces vectoriels?
- Montrer que l'espace engendré par $\mathcal{N}$ est inclus dans $\mathcal{H}$. Cette inclusion est-elle une égalité?

Exercice 10 (Centrale 25)

1) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{Ker}(M)$, $\text{Im}(M)$, $\text{Ker}(M^2)$, $\text{Im}(M^2)$.

$\text{Ker}(M)$ et $\text{Im}(M)$ sont-ils supplémentaires? $\text{Ker}(M^2)$ et $\text{Im}(M^2)$ sont-ils supplémentaires?

2) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

On note $N(u) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Ker}(u^k)$ et $C(u) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \text{Im}(u^k)$.

a) Montrer que $N(u)$ et $C(u)$ sont deux sous-espaces supplémentaires stables par u .

b) Montrer que l'endomorphisme induit par u sur $C(u)$ est un automorphisme.

c) Montrer que l'endomorphisme induit par u sur $N(u)$ est nilpotent.

d) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N(u) = \text{Ker}(u^p)$ et $C(u) = \text{Im}(u^p)$.

e) Montrer que si F et G sont deux sous-espaces de E vérifiant

i) $E = F \oplus G$

ii) F est stable par u et u induit sur F un automorphisme,

iii) G est stable par u et u induit sur G un endomorphisme nilpotent

alors $F = C(u)$ et $G = N(u)$.

Exercice 11 (Navale 25)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et D_A l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M + M^T = \text{tr}(M)A$.

Montrer que D_A est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

Exercice 12 (Centrale 25) Soit f une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ vérifiant $f(AB) = f(A)f(B)$ pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose $\Phi(M) = \text{tr}(f(M))$. Montrer que $\Phi(AB) = \Phi(BA)$ pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\text{tr}(f(M)) = \alpha \text{tr}(M)$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 13 (Mines-Ponts 22) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $f_A(M) = AM$. Déterminer la trace et le rang de f_A .

Exercice 14 (Mines-Ponts 21)

Montrer que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & x_2 & 1 & 0 \\ x_1^2 & 2x_1 & x_2^2 & 2x_2 & 2 \\ x_1^3 & 3x_1^2 & x_2^3 & 3x_2^2 & 6x_2 \\ x_1^4 & 4x_1^3 & x_2^4 & 4x_2^3 & 12x_2^2 \end{vmatrix}$ est nul si et seulement si $x_1 = x_2$.

Exercice 15 (Mines-Télécom 21)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$. Montrer que $\det(A) = 1$.

Exercice 16 (Mines-Télécom 24)

Soit F un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que toute matrice non nulle de F soit inversible. Soit A et B deux matrices non nulles de F . Montrer que $x \mapsto \det(xA - B)$ est polynomiale; préciser son degré et son coefficient dominant. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha A - B \notin GL_n(\mathbb{C})$. Conclusion?

Exercice 17 (TPE-IVP 19) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ tel que $x^2 = yz$.

Calculer le déterminant de la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par : $(A_n)_{i,i} = 2x$ pour $1 \leq i \leq n$; $(A_n)_{i,i-1} = y$ et $(A_n)_{i-1,i} = z$ pour $2 \leq i \leq n$; les autres coefficients étant nuls.

Exercice 18 (Mines-Ponts 18)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.