

On s'intéresse à la décomposition de l'identité d'un espace vectoriel comme somme de projecteurs...

1) Avec deux projecteurs

Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E et $q = \text{Id}_E - p$.

- Montrer que q est un projecteur.
- Montrer que $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.
- Montrer que si E est de dimension finie, alors la trace de p est égale à son rang.

2) Avec trois projecteurs

- Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E .
Montrer que si $p + q$ est un projecteur, alors $p \circ q = 0$.
- Soit p, q et r trois projecteurs d'un espace vectoriel E , tels que $p + q + r = \text{Id}_E$.
Montrer que $p \circ q = q \circ p = p \circ r = r \circ p = q \circ r = r \circ q = 0$ et $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q) \oplus \text{Im}(r)$.

3) Cas général en dimension finie

Soit $(p_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille de k projecteurs d'un espace E de dimension finie, tels que $\sum_{1 \leq i \leq k} p_i = \text{Id}_E$.

- Montrer que $E = \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$.
- Montrer que $n = \text{rg}(p_1) + \dots + \text{rg}(p_k)$.
- Montrer que $E = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_k)$.
- Montrer que $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$.
- Montrer que si $(f_i)_{1 \leq i \leq k}$ est une famille d'endomorphismes d'un espace E de dimension finie tels que $\sum_{1 \leq i \leq k} f_i = \text{Id}_E$ et $\sum_{i=1}^k \text{rg}(f_i) \leq n$, alors les f_i sont des projecteurs.

4) Quatre projecteurs en dimension infinie

- Soit f un endomorphisme d'un espace de dimension finie, de rang 1.
Montrer que f est un projecteur si et seulement si $\text{tr}(f) = 1$.
- En déduire la forme générale des matrices 2×2 qui représentent un projecteur.
- Soit a un scalaire quelconque. Trouver deux matrices de projecteurs de somme égale à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2-a \end{pmatrix}$.
- On considère $E = \mathbf{R}[X]$ muni de sa base canonique $(e_i)_{i \in \mathbf{N}}$ (c-à-d $e_i = X^i$).
Soit f et g les deux endomorphismes de E définis par $f(e_i) = \alpha_i e_i$ et $g(e_i) = \beta_i e_i$
où $\alpha = (0, 2, -2, 4, -4, 6, \dots)$ et $\beta = (1, -1, 3, -3, 5, \dots)$.
 - Montrer qu'il existe quatre projecteurs p, q, r et s tels que $p + q = f$ et $r + s = g$.
 - Que vaut $p + q + r + s$? A-t-on $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q) \oplus \text{Im}(r) \oplus \text{Im}(s)$?