

Exercice 1 (CCINP 23)

- a) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^{2n})$ tel que $u^2 = 0$ et $\text{rg}(u) = n$.
Montrer que $\text{Ker} u = \text{Im} u$. En déduire que u peut être représentée par $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.
- b) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^{3n})$ tel que $u^3 = 0$ et $\text{rg}(u) = 2n$.
Montrer que $\text{Ker} u = \text{Im} u^2$. En déduire que u peut être représentée par $\begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (CCP 2018) Soit E un $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie et f un endomorphisme de rang 1.

- a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $f \circ f = \lambda f$.
- b) Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
- (i) $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$ (ii) $f \circ f \neq 0$ (iii) $\exists \mu \in \mathbf{K}^*$ tel que μf soit un projecteur