

Exercice 1 (CCINP 24)

- 1) Rappeler la forme d'une matrice de Vandermonde et l'expression de son déterminant.
- 2) Pour $k \in \mathbf{N}$ on pose $f_k(x) = e^{kx}$. Montrer que la famille $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est libre.
- 3) a) Sans les calculer, montrer que $X^3 + X + 1$ admet trois racines distinctes dans $\mathbf{C}$, que l'on notera α , β et γ .
- b) Résoudre le système
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 (Mines-Télécom 24) Soit p un projecteur d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E et $\mathcal{H}$ l'ensemble des endomorphismes h de E vérifiant $h \circ p + p \circ h = 0$.

- 1) Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$.
- 2) Montrer que si $h \in \mathcal{H}$ alors l'image et le noyau de p sont stables par h .
- 3) Préciser l'allure de la matrice de $h \in \mathcal{H}$ dans une base adaptée à p .
- 4) En déduire la dimension de $\mathcal{H}$.

Exercice 3 (CCINP 22)

Soit f un endomorphisme d'un espace E , représenté par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B}$.

- a) Montrer que $E = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$.
- b) Trouver un vecteur de $\text{Ker}(f^2)$ qui ne soit pas dans $\text{Ker}(f)$.
- c) Trouver une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle f soit représenté par $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- d) Montrer que si un endomorphisme g commute avec f alors $\text{Ker}(f^2)$ est stable par g .
- e) En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g tel que $g \circ g = f$.

Exercice 4 (ENSEA 2017) Soit E un espace vectoriel de dimension n , $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans de E . Montrer que $\dim(\cap_{i=1}^p H_i) \geq n - p$.

Indication : considérer $\Phi : H_1 \times \dots \times H_p \rightarrow E^{p-1}; (x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_2 - x_1, \dots, x_p - x_1)$.

Exercice 5 (Mines-Ponts 18)

Calculer la trace et le déterminant de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ défini par : $u(M) = M^T$.

Exercice 6 (TPE-IVP 19) Soit $(x, y, z) \in \mathbf{C}^3$ tel que $x^2 = yz$.

Calculer le déterminant de la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ définie par : $(A_n)_{i,i} = 2x$ pour $1 \leq i \leq n$; $(A_n)_{i,i-1} = y$ et $(A_n)_{i-1,i} = z$ pour $2 \leq i \leq n$; les autres coefficients étant nuls.