Exercice 1

Soit $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ une série alternée vérifiant :

i) $\forall n\in\mathbf{N},\ u_n>0$

ii) $\frac{u_{n+1}}{u_n}\to 1$ quand $n\to+\infty$

iii) la suite (u_n) converge en décroissant vers 0

iv) $\forall n\in\mathbf{N},\ u_{n+2}-u_{n+1}\geqslant u_{n+1}-u_n$

1) Justifier de façon précise l'existence de $R_n=\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k u_k$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.

2) Vérifier que : $\forall n\in\mathbf{N},\ |R_n|+|R_{n+1}|=u_n$.

3) Vérifier que : $\forall n\in\mathbf{N},\ |R_n|-|R_{n+1}|=\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\left(u_{n+p}-u_{n+p+1}\right)$.
En déduire la monotonie de la suite (R_n).

4) Montrer que : $\forall n\in\mathbf{N},\ \frac{u_n}{2}\leqslant |R_n|\leqslant \frac{u_{n-1}}{2}$.

5) En déduire que R_n est équivalent à $(-1)^n\frac{u_n}{2}$ quand n tend vers l'infini.

6) Application : trouver un équivalent de $a_n=\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln(k)}{k}$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $E_n=\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. La matrice identité de E_n sera notée I_n.
Pour $A\in E_n$ et $j\in[\![1,n]\!]$ on note A_j la j-ième colonne de la matrice A.
On s'intéresse à l'application u qui à toute matrice A de E_n associe la matrice B dont la j-ième colonne est $B_j=S-A_j$ où $S=\sum_{k=1}^{n}A_k$.

1) Dans cette question, $n=2$ et E_2 est muni de la base $\mathscr{B}=(K_1,K_2,K_3,K_4)$
où $K_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $K_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $K_3=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $K_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

1.1) Vérifier que u est un endomorphisme de E_2.

1.2) Déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.

1.3) Montrer que u est une symétrie et préciser ses éléments caractéristiques.

1.4) Pour $A\in E_2$, exprimer le déterminant de $u(A)$ en fonction de celui de A.

On revient au cas général et on admet que u est un endomorphisme de E_n.

2) Trouver l'expression du déterminant de $u(A)$ en fonction de celui de A

3) Soit J_n la matrice de E_n dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $U_n=J_n-I_n$.

3.1) Montrer que $u(A)=AU_n$ pour toute matrice A de E_n.

3.2) En déduire un polynôme annulateur de u de degré 2.

3.3) Factoriser ce polynôme puis déterminer, pour $k\in\mathbf{N}$, l'expression de u^k en fonction de I_n et u.

3.4) Cette expression est-elle encore valable pour $k\in\mathbf{Z}$?