

Exercice 1 (*Mines-Télécom 22*) Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont tous égaux à 1. On pose $b_{i,j} = [A^{-1}]_{i,j}$ et $M = JA^{-1}$.

- a) Expliciter les coefficients de M et donner son rang.
- b) Montrer que $\det(A - J) = \left(1 - \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} b_{i,j}\right) \det(A)$.

Exercice 2 (*Mines-Ponts 2017*) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Montrer que :
 $\det(A) = \det(B) = \det(A - B) = \det(A + B) = 0 \implies \forall (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \det(xA + yB) = 0$.

Exercice 3 (*ENSEA 23*) Soit E l'espace des fonctions de classe C^2 de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$. Pour f et g dans E on pose : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$.

- a) Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
- b) Soit $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f = f''\}$.
Montrer que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.

Exercice 4 (*Centrale 23*) Dans $\mathbf{R}[X]$ on pose : $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

- a) Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.
- b) Montrer que la famille $((X - 1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}[X]$.
- c) Déterminer l'orthogonal de $\mathbf{R}_n[X]$.