

Définition 1 Une *norme* sur un espace vectoriel E est une application $N : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ vérifiant :

- i) $N(x) = 0 \iff x = 0_E$ (*séparation*)
- ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K}, N(\lambda \cdot x) = |\lambda|N(x)$ (*homogénéité*)
- iii) $\forall (x, y) \in E \times E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (*inégalité triangulaire*)

On dit alors que (E, N) est un espace normé et l'on définit la distance entre deux éléments de E par : $d(x, y) = N(x - y)$.

Exemple 1 Norme associée à un produit scalaire dans un espace préhilbertien réel

Exemple 2 Normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbf{K}^n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$

Exemple 3 Norme $\|\cdot\|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbf{K}$

Définition 2 Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

- 1) La *boule ouverte* de centre a et de rayon R est : $B(a, R) = \{x \in E, N(x - a) < R\}$
- 2) La *boule fermée* de centre a et de rayon R est : $B_f(a, R) = \{x \in E, N(x - a) \leq R\}$
- 3) La *sphère* de centre a et de rayon R est : $S(a, R) = \{x \in E, N(x - a) = R\}$
- 4) Une partie A de E est dite *bornée* s'il existe $R > 0$ tel que : $\forall x \in A, N(x) \leq R$
- 5) Une partie A de E est dite *convexe* lorsque : $\forall (x, y) \in A \times A, \forall t \in [0, 1], (1 - t)x + ty \in A$

Remarque Une boule est toujours convexe (et symétrique par rapport à son centre).

Définition 3 On dit qu'une suite (x_n) d'éléments d'un espace normé (E, N) converge vers $\ell \in E$ lorsque $N(x_n - \ell)$ tend vers 0.

Proposition 1 Unicité de la limite

Proposition 2 Toute suite convergente est bornée.

Proposition 3 Limite d'une combinaison linéaire de suites convergentes

Proposition 4 Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Définition 4 Deux normes N_1 et N_2 sont dites équivalentes lorsqu'il existe deux réels α et β tels que : $\forall x \in E, N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$ et $N_2(x) \leq \beta N_1(x)$.

Proposition 5 Si deux normes sont équivalentes, toute suite bornée pour l'une l'est aussi pour l'autre; et toute suite convergente pour l'une converge pour l'autre *vers la même limite*.

Théorème Sur un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire Dans un espace de dimension finie, la convergence d'une suite équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.