Exercice 1 *(CCINP 25)* Pour $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ on pose $\langle P,Q\rangle = \sum\limits_{k=0}^{\min(n,m)} a_k b_k$.

1) Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $E=\mathbf{R}[X]$.
2) Montrer que $f : P\mapsto P(0)$ est lipschitzienne puis déterminer l'orthogonal du noyau de f.
3) Montrer que $f : P\mapsto P(1)$ n'est pas lipschitzienne puis déterminer l'orthogonal du noyau de f.

Exercice 2 *(Mines-Télécom 25)* Soit E un espace préhilbertien réel. On suppose que F est un sous-espace dense de E, c'est-à-dire que tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de F. On se donne un vecteur unitaire v et l'on considère G, l'orthogonal de la droite engendrée par v.

a) Montrer que : $\forall (x,y)\in F\times F,\ \langle x,v\rangle\cdot y-\langle y,v\rangle\cdot x\in F\cap G$
b) Montrer que tout élément de G est limite d'une suite d'éléments de $F\cap G$.

Exercice 3 *(Mines-Télécom 25)* Soit E un espace euclidien.
On fixe un réel $k\in[0,1[$ et l'on considère l'ensemble $F=\left\{f\in\mathscr{L}(E)\ \middle|\ \forall x\in E,\ \|f(x)\|\leqslant k\|x\|\right\}$.

a) Déterminer l'ensemble F lorsque $k=0$.
b) Vérifier que l'application identité Id_E n'appartient pas à F.
c) Montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
d) Montrer qu'il existe une norme sur $\mathscr{L}(E)$ telle que F soit une boule fermée pour cette norme.

Exercice 4 *(CCINP 25)* Soit $E=\mathscr{C}^2([0,1],\mathbf{R})$. Pour $f\in E$ on note : $N_0(f)=\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t$, $N_1(f)=\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right|+\int_0^1|f'(t)|\,\mathrm{d}t$ et $N_2(f)=\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right|+\left|\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right|+\left|\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t\right|$.

1) Soit $f : x\mapsto\sin(2\pi x)$. Calculer $N_0(f)$, $N_1(f)$ et $N_2(f)$.
2) N_0 est une norme usuelle. Montrer que N_1 est une norme. Est-ce que N_2 est une norme ?
3) Monter que : $\forall f\in E,\ \exists c\in[0,1],\ f(c)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
4) Montrer que : $\forall f\in E,\ N_0(f)\leqslant N_1(f)$.
   Existe-t-il une fonction f non identiquement nulle telle que $N_1(f)=N_0(f)$?
5) Les normes N_0 et N_1 sont-elles équivalentes ?

Exercice 5 *(CCINP 25)* Soit $a\in\mathbf{R}$, pour $P\in\mathbf{R}[X]$ on pose : $N_a(P)=|P(a)|+\int_0^1|P'(t)|\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que N_a est une norme sur $\mathbf{R}[X]$.
2) Montrer que, pour tout $P\in\mathbf{R}[X]$, $|P(1)|\leqslant|P(0)|+\int_0^1|P'(t)|\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que N_0 et N_1 sont équivalentes.
3) Plus généralement, montrer que N_a et N_1 sont équivalentes pour $0\leqslant a\leqslant 1$.
4) Montrer que si une suite de vecteurs converge dans une espace vectoriel normé,
   alors la suite des normes de ces vecteurs converge vers la norme de la limite de cette suite.
5) Montrer que si $1\leqslant a<b$ alors N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
   Indication : on pourra considérer, pour $c\in]a,b[$, la suite (P_n) avec $P_n=\left(\frac{X}{c}\right)^n$.

Exercice 6 *(Mines-Ponts 17)*

1) Soit E un $\mathbf{R}$-espace de dimension finie et F un sous-espace de E.
   Montrer que la limite d'une suite convergente d'éléments de F est toujours dans F.
2) Pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et $p\in\mathbf{N}$, soit $S_p(A)=\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}$. Montrer que $\big(S_p(A)\big)$ est convergente.
3) Soit $\exp(A)=\lim_{p\to\infty}S_p(A)$. Montrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A.
4) Existe-t-il un polynôme P tel que : $\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, $\exp(A)=P(A)$?