

Définition 1 Soit I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

On dit que (f_n) converge simplement sur I lorsque, pour tout x de I , la suite $(f_n(x))$ converge.

Soit alors $f(x)$ la limite simple de $f_n(x)$. On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur I lorsque $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Remarque 1 Cela revient à : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.

Remarque 2 La convergence uniforme passe aux combinaisons linéaires, mais ni aux produits ni aux composées, comme le montre la suite $f_n(x) = (x + 1/n)^2$.

Définition 2 On dit qu'une série de fonctions converge simplement (resp. uniformément) lorsque la suite des sommes partielles converge simplement (resp. uniformément). Si la convergence simple est établie, il reste alors à étudier la convergence uniforme de la suite des restes vers 0.

Définition 3 Une série de fonctions $\sum f_n$ est dite *normalement convergente* sur I lorsque la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ est convergente.

Proposition 1 La convergence normale implique la convergence uniforme (et absolue).

Proposition 2 Si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément sur I vers f , alors f est continue sur I .

Remarque 3 Application à la continuité de la somme d'une série de fonctions.

Proposition 3 Si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément sur $[a, b]$ vers g , alors $\int_a^b f_n(t) dt$ tend vers $\int_a^b g(t) dt$ quand n tend vers l'infini.

Remarque 4 Application à l'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

Proposition 4 Soit (f_n) une suite d'applications de classe C^1 sur un intervalle I .

Si (f_n) converge simplement sur I vers une application f et si (f'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une application h , alors f est de classe C^1 sur I et $f' = h$.

En outre, la convergence de (f_n) est alors uniforme sur tout segment de I , ce qui permet d'étendre le théorème aux applications de classe C^k sous l'hypothèse de convergence simple des $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leq j \leq k-1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ sur tout segment de I .

Remarque 5 Application à la dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

Remarque 6 Soit (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers f sur un intervalle I . Si chacune des fonctions f_n admet une limite b_n (réelle ou complexe) en a , extrémité finie ou infinie de I , alors la suite (b_n) est convergente et $f(x)$ tend vers la limite des b_n quand x tend vers a . C'est le *théorème de la double limite* : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)$.

Désormais, le programme officiel ne mentionne plus que l'application aux séries de fonctions :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$